

关于等温间断的稳定性

高 飞

(中国工程物理研究院北京研究生部, 100038)

提要 本文考察导热流体中等温间断的稳定性问题, 给出了稳定间断的条件:

$$\frac{p_1}{p_0} > \frac{\gamma}{2 - \gamma},$$

它比等温间断的产生条件 $\left(\frac{p_1}{p_0} > \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma}\right)$ 要强。

关键词 导热流体, 等温激波, 稳定性

1. 引言

在理想流体中, 激波为一间断面。当计及粘性和热传导时, 间断被“抹平”, 化为连续区。但须指出, 两种“抹平”机制不同, 单独的热传导只能消除较弱激波的间断。如激波足够强, 则过渡区中将产生新的间断, 称为等温间断, 或等温激波。这一现象早在本世纪初即被瑞利所发现。文献[1], [2]详细讨论了等温间断的产生及其性质, 给出等温间断产生的条件: $i' < -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T1}$ 。这里 $i = \rho_0 u_0 = \rho_1 u_1$, u 为波坐标系中流体速度, ρ 为流体密度, $V = \frac{1}{\rho}$ 为比容, p 为压强, T 为温度; 脚标“0”和“1”分别标志波前和波后状态。注意到 $-\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = \rho^2 c_T^2$ (c_T 为等温声速), 上面条件化为

$$u_1 < c_{T1}, \quad (1.1)$$

即相对波后流体, 波的传播速度是亚等温声速的。对于理想气体, 从上式可得到产生等温间断的波速和压强条件^{[1][2]}:

$$\frac{D_0}{c_{r0}} > \sqrt{\frac{3\gamma - 1}{\gamma(3 - \gamma)}}, \quad \frac{p_1}{p_0} > \frac{\gamma + 1}{3 - \gamma} \quad (1.2)$$

$\left(\gamma = \frac{c_p}{c_v}, D_0 \text{ 为波速, } c_{r0} \text{ 为波前绝热声速}\right)$ 。

周知, 绝热激波具有如下重要性质:

$$u_0 > c_{r0}, \quad u_1 < c_{r1}. \quad (1.3)$$

上式同时也是激波稳定性条件, 它表示波阵面上小扰动不会改变波前状态, 而波后状态改变必将传至波阵面。对于等温间断, 是否存在类似(1.3)式性质? 等温间断是否稳定? 这就是本文将要考察的问题。

本文于1991年8月29日收到第一稿, 于1992年1月30日收到修改稿。

2. 等温间断稳定条件

描绘导热流体中一维平面波方程可写作:

$$(I) \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_T \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \\ c_v \frac{\partial T}{\partial t} + c_v v \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{T}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

式中 $F = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$ 为热流, 状态方程 $p = p(\rho, T)$, 定容比热 $c_v = c_v(\rho, T)$, 导热系数 $\kappa = \kappa(\rho, T)$ 均为已知函数, 其余符号为通用. 以下假设流体为理想气体: $p = R\rho T$, $c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, R 为气体常数. 对于定常波, 所有变量只依赖于 $\xi = x - Dt$, D 为波速. 在波座标系中, 流体速度 $u = v - D$. 设未扰动态为静止, 则

$$v_0 = 0, u_0 = v_0 - D = -D \equiv D_0 > 0$$

(设波沿 $-x$ 方向传播). 方程组 (I) 化为:

$$(II) \begin{cases} u \frac{d\rho}{d\xi} + \rho \frac{du}{d\xi} = 0, & (2.1) \\ u \frac{du}{d\xi} + \frac{RT}{\rho} \frac{d\rho}{d\xi} + R \frac{dT}{d\xi} = 0, & (2.2) \\ uR \frac{dT}{d\xi} + (\gamma - 1)RT \frac{du}{d\xi} + \frac{\gamma - 1}{\rho} \frac{dF}{d\xi} = 0, & (2.3) \\ \frac{dT}{d\xi} = -\frac{F}{\kappa}. & (2.4) \end{cases}$$

从方程组 (II) 易得三个积分关系式^[2]:

$$\sigma \equiv \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{u_0}{u} = \frac{D_0}{u} \equiv \frac{1}{w}, \quad (2.5)$$

$$z \equiv \frac{RT}{D_0^2} = (1 + z_0)w - w^2, \quad (2.6)$$

$$f \equiv \frac{F}{\rho_0 D_0^3} = -\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} (1 - w)(w - w_1), \quad (2.7)$$

$$w_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2\gamma z_0}{\gamma + 1}, \quad (2.8)$$

其中 $z_0 = \frac{RT_0}{D_0^2} = \frac{c_{T_0}^2}{D_0^2}$, 对于给定 T_0 , z_0 标志波强度, z_0 愈小, 波愈强, $z_0 = 0$ 对应强波极限. 波后速度 w_1 由波前状态 z_0 和 γ 决定. 已知 w_1 , 易求波后密度 ρ_1 和温度 T_1 , 它们也由 z_0 和 γ 决定.

积分关系式 (2.5)——(2.7) 对任意 ξ 成立, 对于等温间断面, 有 $\tilde{z}_0 = z_1$. 这里上标“~”表示间断面前的值. 将 (2.6) 式代入, 得 $\tilde{w}_0 + w_1 = 1 + z_0$, 再代入 (2.8), 得

$$\tilde{w}_0 = \frac{2}{\gamma + 1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} z_0 \quad (2.9)$$

从 $\tilde{z}_0 = z_1$, (2.6) 和 (2.8) 还可得 $\tilde{u}_0 u_1 = \tilde{z}_0 = z_1$, 或写成量纲量:

$$\tilde{u}_0 u_1 = \tilde{c}_{T0}^2 = c_{T1}^2. \quad (2.10)$$

等温间断产生要求 $u_1 < c_{T1}$, 因此必有 $\tilde{u}_0 > c_{T0}$. 由此得等温间断重要性质:

$$\tilde{u}_0 > c_{T0}, \quad u_1 < c_{T1} \quad (2.11)$$

上式与 (1.3) 式形式相似, 只须以 c_T 取代 c_s 即可. 但必须指出, (2.11) 式不能表示等温间断稳定性条件. 问题在于在导热流体中小扰动传播速度不是完全等于等温声速, 而是依赖于波长, 其相速值在 c_T 和 c_s 之间(见附录). 因此, 为保证任意波长的小扰动不改变波前状态, 单有 $\tilde{u}_0 > \tilde{c}_{T0}$ 是不够的, 而还必须要求

$$\tilde{u}_0 > \tilde{c}_{s0} \quad (2.12)$$

利用 (2.6) 和 (2.9) 两式, 从 (2.12) 式可得等温间断稳定性的波速和压强条件:

$$\frac{D_0}{c_{s0}} > \sqrt{\frac{2\gamma-1}{\gamma(2-\gamma)}}, \quad \frac{p_1}{p_0} > \frac{\gamma}{2-\gamma}. \quad (2.13)$$

对比 (1.2) 式可见, 等温间断稳定性条件比产生条件强 (例如, 对于 $\gamma = \frac{5}{3}$, 产生条件为 $p_1 > 2p_0$, 而稳定条件为 $p_1 > 5p_0$). 因此, 存在一个强度范围

$$\frac{2\gamma-1}{\gamma(2-\gamma)} > \frac{D_0}{c_{s0}} > \frac{3\gamma-1}{\gamma(3-\gamma)}, \quad \frac{\gamma}{2-\gamma} > \frac{p_1}{p_0} > \frac{\gamma+1}{3-\gamma}, \quad (2.14)$$

其中等温间断已经产生, 但不稳定.

3. 解的存在条件与两类声速的关系

综上所述可见, 方程组 (II) 有三类解(连续解、不稳定间断和稳定间断), 其存在条件与波的强度及两类声速密切相关(表 1).

表 1 各类解与两类声速关系

解	波 速 条 件			压 强 条 件
连续	$u_0 > c_{s0}$		$c_{T1} < u_1 < c_{s1}$	$\frac{p_1}{p_0} < \frac{\gamma+1}{3-\gamma}$
不稳定间断	$u_0 > c_{s0}$	$\tilde{c}_{T0} < \tilde{u}_0 < \tilde{c}_{s0}$	$u_1 < c_{T1} < c_{s1}$	$\frac{\gamma+1}{3-\gamma} < \frac{p_1}{p_0} < \frac{\gamma}{2-\gamma}$
稳定间断	$u_0 > c_{s0}$	$\tilde{u}_0 > \tilde{c}_{s0} > \tilde{c}_{T0}$	$u_1 < c_{T1} < c_{s1}$	$\frac{p_1}{p_0} > \frac{\gamma}{2-\gamma}$

为了进一步认识上述三类解性质, 下面将方程组 (II) 改写为相对变量导数的显式, 并在 (u, T) 平面上考察解的存在条件. 由于 $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{u_0}{u}$, 下面只写出 $\frac{du}{d\xi}$, $\frac{dF}{d\xi}$ 和 $\frac{dT}{d\xi}$:

$$(III) \quad \begin{cases} \frac{du}{d\xi} = \frac{RF}{\kappa} \frac{u}{u^2 - c_T^2}, & (3.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dF}{d\xi} = \frac{\rho u R F}{\kappa} \frac{u^2 - c_T^2}{u^2 - c_T^2}, & (3.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dT}{d\xi} = -\frac{F}{\kappa}, & (3.3) \end{cases}$$

从方程(3.1)和(3.2)可见,当 $u = c_T$, $\frac{du}{d\xi}$ 和 $\frac{dF}{d\xi}$ 化为 ∞ . 这显示出非线性陡化形成间断的机制,同时也确定了产生间断的条件: 解从波头到波尾中间必经过 $u = c_T$. 由于波头处 $u_0 > c_{i0} > c_{T0}$, 故波尾处 $u_1 < c_{T1}$ 即为产生间断条件. 其次,方程(3.3)不包含 $u^2 - c_T^2$ 分母,故温度 T 仍然可以连续,这决定间断的等温性质. 对存在等温间断的上述证明,比传统方法^{[1][2]}更为简明和直接. 再次,方程(3.2)中显式包含两类声速以及 $u - c_s$ 和 $u - c_T$ 因子,明确提示解的性质必与两类声速相关,这一点在 (u, T) 平面上表现尤为明显(图1).

图1上一系列抛物线为积分曲线,由(2.6)式确定. GK 为波头($w = 1$), GA 为波尾($w = w_1$),两者之间为波区. GLO 为绝热声速线($w = \sqrt{rz}$),它将波区一分为二: 波前区 GKL 中 $u > c_s$, 波后区 GAL 中 $u < c_s$. CMO 为等温声速线

$$(w = \sqrt{z}),$$

它将波尾一分为二: GC 上 $u_1 > c_{T1}$, 故 GHC 为连续解区, CA 上 $u_1 < c_{T1}$, 故 $HCAK$ 为间断解区. CB 为等温间断之“头”($w = \tilde{w}_0$), 解从 HK 连续变化到 CB , 等温跃变到 CA . CB 与绝热声速线交于 E , 并被分为两段: EB 段位于 $u > c_s$ 区, 在 EB 线上 $\tilde{u}_0 > \tilde{c}_{s0}$, 故 $JKDA$ 为稳定间断解区; CE 段位于 $u < c_s$ 区, CE 线上 $\tilde{u}_0 < \tilde{c}_{s0}$, 故 $HJCD$ 为不稳定间断解区. 总之,从图1可见,等温声速线与波尾线交点 C 决定等温间断的产生条件,而绝热声速线与等温间断波前线 CB 之交点 E 决定等温间断的稳定性条件. 一般说,激波稳定性问题是一个包括多方面内容的复杂问题^[3-5],以上讨论是初步的,深入、全面的研究还有待进一步的工作.

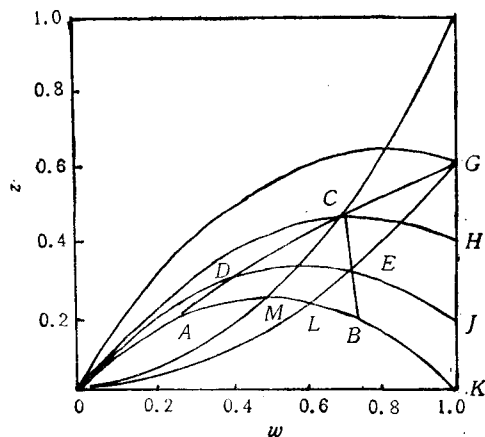


图1 (z, w) 平面图

$$z = \frac{RT}{D_0^2}, w = \frac{u}{D_0}, r = \frac{5}{3}$$

附录

为了确定导热流体中小扰动传播速度,将方程组(1)线性化,令小扰动正比于 $e^{-i\omega t + ikx}$, 则线性化方程组有解条件给出色散方程:

$$1 - \frac{c_s^2 k^2}{\omega^2} + i \frac{\kappa}{\rho c_v} \frac{k^2}{\omega} \left(1 - \frac{c_s^2 k^2}{\omega^2} \right) = 0.$$

设 k 为实数,则 ω 必为复数. 令 $\omega = \alpha + i\beta$ (α, β 为实数), 从上式得定 α, β 的方程:

$$\alpha^2 - \beta^2 - \frac{k^2}{r} - \beta + \frac{(3\alpha^2 - \beta^2)\beta}{k^2} = 0,$$

$$\alpha^2 - 3\beta^2 - k^2(1 + 2\beta) = 0,$$

上式中 α, β, k 均已无量纲化: $[k] = k_c = \frac{\rho c_v c_s}{\kappa}$, $[\alpha] = [\beta] = c, k_c$. 上面方程给出解: $\beta < 0$, 它

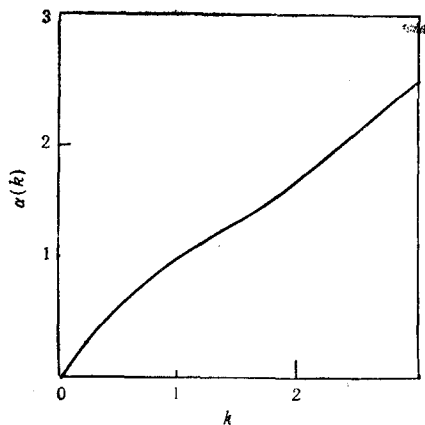
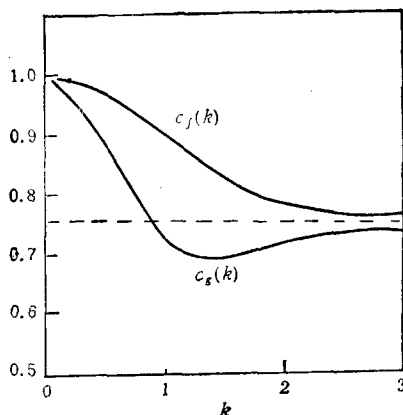


图2 色散关系图

图3 相速 $c_f(k)$ 和群速 $c_g(k)$ 图 (c_i 为单位).

标志波的衰减. 色散关系 $\alpha = \alpha(k)$ 的形式见图 2, 据此得到的相速 $c_f = \frac{\alpha}{k}$ 和群速 $c_g = \frac{d\alpha}{dk}$ 见图 3.

从图 3 可见, 相速 c_f 介于 c_i 和 c_T 之间, 但群速 c_g 可小于等温声速 c_T . 因此, 等温间断稳定性条件要求 $u_1 < c_{g\min} \cdot c_g(k)$ 无解析表达式, 数值计算给出 $c_{g\min} \approx 0.71c_i$ ($\gamma = \frac{5}{3}$). 从 $u_1 < 0.71c_{s1}$ 可得强度条件. 对 $\gamma = \frac{5}{3}$ 和 $\gamma = \frac{7}{5}$ 两种情况计算表明, 只要 $\bar{u}_0 > \bar{u}_{s0}$ 成立, 则 $u_1 < c_{g\min}$ 也成立. 因此, (2.12) 和 (2.13) 为等温间断稳定性条件的结论不变.

参 考 文 献

- [1] Landau LD and Lifshitz EM. Fluid Dynamics, Pergaman, New York, 1959.
- [2] Zel'dovich Y and Raizer Y. Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena, Academic, New York, 1967
- [3] Anile AM and Russo G. *Phys. Fluids*, 1987, 30: 1045
- [4] Fowles GR and Houwing A. *Phys. Fluids*, 1984, 27: 27
- [5] Кузнецов. Н. М. *УФН*, 1989, 159: 493

ON THE STABILITY OF ISOTHERMAL DISCONTINUITY

Gao Fei

(Beijing Graduate School, Chinese Academy of Engineering Physics, Beijing 100088, China)

Abstract In this paper the stability of isothermal discontinuity in a fluid is studied. It is shown that there may exist three kinds of steady shock waves: shock wave with smooth transition region unstable isothermal shock and stable isothermal shock. The conditions for the appearance of a stable isothermal shock are derived according to the general principle. For ideal gases we obtain: $\frac{p_1}{p_0} > \frac{\gamma}{2-\gamma}$.

Key words thermal conduction, isothermal shock, stability