

广义 Stokes 方程的完全边界积分表示式 及其在求解 N-S 方程中的应用¹⁾

刘希云

(华东工学院, 南京 210014)

杨炸生

(南京航空学院, 210016)

提要 为了解 N-S 方程组各变量相互耦合, 本文采用 Peaceman-Rachford 算子分裂法, 将时间相依的 N-S 方程组分解成不存在上述耦合特性的线性和非线性的子问题。线性子问题具有广义 Stokes 方程类型。本文采用多重互易法, 即采用多阶拉普拉斯算子基本解逐步变换, 将其解表示成完全边界积分形式, 从而使问题的计算维数降低一维。广义 Stokes 方程的算例以及二维圆柱在剪切流中的 Stokes 绕流解, 都表明多重互易算法具有高效特点, 而且后者与文[3]解析解吻合得非常好。

关键词 广义 Stokes 方程, Navier-Stokes 方程, 边界元方法

一、引言

数值求解 N-S 方程组的困难, 在于运动方程中的非线性项与连续方程的相互耦合。为了解除此耦合, 本文对时间相依的 N-S 方程组采用 Peaceman-Rachford 算子分裂法, 将 N-S 方程分裂成线性和非线性子问题。这样可以解除变量的相互耦合。线性子问题为非线性子问题提供流场的初值。线性子问题是广义 Stokes 问题, 可用共轭梯度迭代法求解。在求解过程中, 需要解一系列广义 Stokes 问题。为此, 需要寻求一种求解广义 Stokes 问题的高效算法。

本文采用多重互易法^[1], 即采用多阶的拉普拉斯算子基本解将广义 Stokes 方程表示成完全边界积分形式。这样, 只需在流场边界上划分元素, 利用边界元方法解, 从而大大减少了未知数个数和计算机内存, 使计算速度加快。为求解 N-S 方程组提供一种高效、快速的方法。

二、不可压 N-S 方程及 Peaceman-Rachford 算子分裂法

时间相依的不可压 N-S 方程组为

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla p = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2)$$

1) 国家自然科学基金资助课题。

本文于 1991 年 12 月 6 日收到第一稿, 1992 年 3 月 10 日收到修改稿。

式中 \mathbf{V} 为速度, p 为压强, ν 为粘性系数. 边界条件为: 在物面上, $\mathbf{V} = 0$; 在无穷远边界上, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\infty$. 如果区域 Ω 是 R^N ($N = 2, 3$) 上有界域, 更一般的边界条件表示成

$$\mathbf{V}|_{\Gamma} = \mathbf{g} \quad (3)$$

根据不可压条件(2)式, 给定的函数 \mathbf{g} 应满足

$$\int_{\Gamma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (4)$$

式中 \mathbf{n} 为边界 Γ 上的单位外法矢量. 此外, 初始条件为 $\mathbf{V}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{x})$, 是给定的函数.

求解 N-S 方程组的困难在于(1)式中的非线性项 $(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V}$ 和连续方程(2)式的耦合. 为此对 N-S 方程组采用 Peaceman-Rachford 的算子分裂法, 即给定 $\mathbf{V}^0 = \mathbf{V}_0$, 对于 $n \geq 0$, 得到如下的两个子方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{V}^{n+1/2} - \mathbf{V}^n}{\Delta t/2} - \frac{\nu}{2} \nabla^2 \mathbf{V}^{n+1/2} + \nabla p^{n+1/2} - \frac{\nu}{2} \nabla^2 \mathbf{V}^n - (\mathbf{V}^n \cdot \nabla)\mathbf{V}^n \\ \nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1/2} = 0 \\ \mathbf{V}^{n+1/2} = \mathbf{g}^{n+1/2} \quad \text{在边界 } \Gamma \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^{n+1/2}}{\Delta t/2} - \frac{\nu}{2} \nabla^2 \mathbf{V}^{n+1} + (\mathbf{V}^{n+1} \cdot \nabla)\mathbf{V}^{n+1} \\ - \frac{1}{2} \nu \nabla^2 \mathbf{V}^{n+1/2} - \nabla p^{n+1/2} \\ \mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{g}^{n+1} \quad \text{在边界 } \Gamma \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这样, 从 \mathbf{V}^n 计算 $\mathbf{V}^{n+1/2}$ 和 $p^{n+1/2}$, 然后再从 $\mathbf{V}^{n+1/2}$ 和 $p^{n+1/2}$ 计算 \mathbf{V}^{n+1} .

从(5)式和(6)式可见, N-S 方程中变量耦合已被解除. 线性子问题的解 $\mathbf{V}^{n+1/2}$ 和 $p^{n+1/2}$ 为非线性子问题提供初值. 因此, 线性问题的高效算法是关键. 从(5)式可见, 线性子问题的方程属于广义 Stokes 方程类型, 即(5)式在 $n + 1/2$ 时间层可写成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \mathbf{V} - \beta \nabla^2 \mathbf{V} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \mathbf{V} = \mathbf{g} \quad \text{在边界 } \Gamma \text{ 上} \\ \alpha = \frac{2}{\Delta t} \\ \beta = \nu/2 \\ \mathbf{f} = \frac{1}{2} \nu \nabla^2 \mathbf{V}^n - (\mathbf{V}^n \cdot \nabla)\mathbf{V}^n + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{V}^n \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

因为 n 步时间层的物理量是已知的, 所以 \mathbf{f} 是确定的. 为了使(7)式的解表示成完全边界积分形式, 使问题的计算维数降低一维, 采用共轭梯度法与多重互易法相结合的计算方法.

三、广义 Stokes 问题的共轭梯度和多重互易算法

对式(7)的共轭梯度解的步骤为^[2]:

第一步 确定初值, 先给出边界 Γ 上压强 p 的初值 λ^0 , 按下面式(8)解出边界 Γ 上 $\partial p^0 / \partial n$, 再由边界上 λ^0 通过数值微分求出 $\partial p^0 / \partial S$, 这样可求得 ∇p^0 , 然后顺次求解(9)

式到(13)式。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 p^0 &= \nabla \cdot f && \text{在区域 } \mathcal{Q} \text{ 上} \\ p^0 &= \lambda^0 && \text{在边界 } \Gamma \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha V^0 - \beta \nabla^2 V^0 &= f - \nabla p^0 && \text{在域 } \mathcal{Q} \text{ 上} \\ V^0 &= g^0 && \text{在边界 } \Gamma \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} -\nabla^2 \phi^0 &= \nabla \cdot V^0 && \text{在域 } \mathcal{Q} \text{ 上} \\ \phi^0 &= 0 && \text{在边界 } \Gamma \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

定义 $r^0 = - \left. \frac{\partial \phi^0}{\partial n} \right|_{\Gamma}$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi^0 &= 0 && \text{在域 } \mathcal{Q} \text{ 上} \\ \frac{\partial \varphi^0}{\partial n} &= r^0 && \text{在边界 } \Gamma \text{ 上} \\ \int_{\Gamma} \varphi^0 d\Gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \theta^0 &= 0 && \text{在域 } \mathcal{Q} \text{ 上} \\ \theta^0 &= r^0 && \text{在边界 } \Gamma \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$g^0 = \frac{\alpha}{\beta} \varphi^0|_{\Gamma} + 4\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} r^0|_{\Gamma} + 4 \left. \frac{\partial \theta^0}{\partial n} \right|_{\Gamma} \quad (13a)$$

$$w^0 = g^0 \quad (13b)$$

对于 $n \geq 0$, 根据上述步骤, 确定了 $\lambda^n, p^n, V^n, \varphi^n, r^n, g^n, w^n$. 然后再按下列步骤计算 $\lambda^{n+1}, p^{n+1}, V^{n+1}, \phi^{n+1}, r^{n+1}, g^{n+1}$ 和 w^{n+1} .

第二步 下降

$$\left. \begin{aligned} \nabla \bar{p}^n &= 0 && \text{在域 } \mathcal{Q} \text{ 上} \\ \bar{p}^n &= w^n && \text{在边界 } \Gamma \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha \bar{V}^n - \beta \nabla^2 \bar{V}^n &= -\nabla \bar{p}^n && \text{在域 } \mathcal{Q} \text{ 上} \\ \bar{V}^n &= 0 && \text{在边界 } \Gamma \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} -\nabla^2 \phi^n &= \nabla \cdot V^n && \text{在域 } \mathcal{Q} \text{ 上} \\ \phi^n &= 0 && \text{在边界 } \Gamma \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\rho^n = \frac{- \int_{\Gamma} r^n g^n d\Gamma}{\int_{\Gamma} \frac{\partial \phi^n}{\partial n} w^n d\Gamma} \quad (17)$$

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n - \rho^n w^n \quad (18)$$

$$p^{n+1} = p^n - \rho^n \bar{p}^n \quad (19)$$

$$V^{n+1} = V^n - \rho^n \bar{V}^n \quad (20)$$

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \rho^n \phi^n \quad (21)$$

$$r^{n+1} = r^n + \rho^n \left. \frac{\partial \phi^n}{\partial n} \right|_{\Gamma} \quad (22)$$

第三步 构造新的下降方向, 解下列方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \bar{\varphi}^{n+1} &= 0 && \text{在域 } Q \text{ 上} \\ \frac{\partial \bar{\varphi}^{n+1}}{\partial n} &= r^{n+1} && \text{在边界 } \Gamma \text{ 上} \\ \int_{\Gamma} \bar{\varphi}^{n+1} d\Gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \bar{\theta}^{n+1} &= 0 && \text{在域 } Q \text{ 上} \\ \bar{\theta}^{n+1} &= r^{n+1} && \text{在边界 } \Gamma \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

定义

$$g^{n+1} = \frac{\alpha}{\beta} \bar{\varphi}^{n+1} \Big|_{\Gamma} + 4 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} r^{n+1} \Big|_{\Gamma} + 4 \frac{\partial \bar{\theta}^{n+1}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \quad (25)$$

$$h^n = \frac{\int_{\Gamma} r^{n+1} g^{n+1} d\Gamma}{\int_{\Gamma} r^n g^n d\Gamma} \quad (26)$$

$$w^{n+1} = g^{n+1} + h^n w^n \quad (27)$$

重复以上步骤,直到 w^n 收敛为止. 从上面求解步骤可见,迭代过程中需要多次求解拉普拉斯方程式(11),(12),(14),(23)和(24),泊松方程式(8),(10)和(16),广义 Stokes 方程式(9)和(15). 拉普拉斯方程解的边界积分表示式是众所周知的,而广义 Stokes 方程也可写成泊松方程形式,即令

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{V} + \frac{1}{\beta} \nabla P - \frac{1}{\beta} \mathbf{f} \quad (28)$$

那么(7)式可写成

$$\nabla^2 \mathbf{V} = \mathbf{A}_0 \quad (29)$$

(29)式即泊松方程形式.

对(29)式两边乘拉普拉斯方程基本解 G_0^* ,并在域 Q 进行积分,有

$$\int_Q \nabla^2 \mathbf{V} G_0^* dQ = \int_Q \mathbf{A}_0 G_0^* dQ \quad (30)$$

应用格林公式,式(30)可写成

$$\int_{\Gamma} G_0^* \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial G_0^*}{\partial n} \mathbf{V} d\Gamma + \int_Q \mathbf{V} \nabla^2 G_0^* dQ = \int_Q \mathbf{A}_0 G_0^* dQ \quad (31)$$

采用多重互易法^[1],令

$$\left. \begin{aligned} G_0^* &= \nabla^2 G_1^* \\ G_1^* &= \nabla^2 G_2^* \\ G_j^* &= \nabla^2 G_{j+1}^* \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \nabla^2 \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_2 &= \nabla^2 \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_j &= \nabla^2 \mathbf{A}_{j-1} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

那么(31)式右边可写成

$$\int_Q \mathbf{A}_0 G_0^* dQ = \int_Q \mathbf{A}_0 \nabla^2 G_1^* = \int_{\Gamma} \mathbf{A}_0 \frac{\partial G_1^*}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial n} G_1^* d\Gamma + \int_Q G_1^* \nabla^2 \mathbf{A}_0 dQ$$

$$\int_{\Omega} G_1^* \nabla^2 A_0 d\Omega - \int_{\Omega} \nabla^2 G_1^* A_0 d\Omega - \int_{\Gamma} A_1 \frac{\partial G_1^*}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial A_1}{\partial n} G_1^* d\Gamma + \int_{\Omega} G_1^* \nabla^2 A_1 d\Omega$$

余此类推, (31) 式右边可写成

$$\int_{\Omega} A_0 G_0^* d\Omega - \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \left(A_j \frac{\partial G_{j+1}^*}{\partial n} - \frac{\partial A_j}{\partial n} G_{j+1}^* \right) d\Gamma \quad (34)$$

对于二维问题, 根据文[1], 可推出

$$\left. \begin{aligned} G_0^* &= \frac{1}{4\pi} \ln R^2 \\ G_j^* &= \frac{1}{4\pi} C_j R^{2j} (\ln R^2 - D_j) \\ C_j &= \frac{1}{4^j (j!)^2} \quad j = 1, 2, \dots \\ D_j &= 2 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{j} \right) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

式中 R 表示动点 r 到定点 r_0 之间的距离, G_j^* 称为 j 阶拉普拉斯算子基本解。

这样(30)式可写成

$$\frac{1}{2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma} \left(G_0^* \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n} - \mathbf{V} \frac{\partial G_0^*}{\partial n} \right) d\Gamma - \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \left(A_j \frac{\partial G_{j+1}^*}{\partial n} - \frac{\partial A_j}{\partial n} G_{j+1}^* \right) d\Gamma \quad (36)$$

那么式(7)广义 Stokes 方程就变成完全边界积分形式。

从(35)式看到, C_j 随 j 增加衰减很快, 例如, $C_3 = 4 \cdot 3 \times 10^{-4}$, $C_4 = 6.8 \times 10^{-6}$ 。因此, 一般取 $j = 3$, G_3^* 就非常接近于零, 取到 3 阶就可以保证计算精度要求。

如果令

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{\beta} \nabla p - \frac{1}{\beta} \mathbf{f} \\ B_1 &= \nabla^2 B_0 \\ B_i &= \nabla^2 B_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

那么式(28), 可写成

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{V} + B_0 \\ A_1 &= \nabla^2 A_0 - \frac{\alpha}{\beta} \nabla^2 \mathbf{V} + \nabla^2 B_0 \\ &= \frac{\alpha}{\beta} A_0 + B_1 \\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} \mathbf{V} + B_0 \right) + B_1 \end{aligned}$$

余此类推

$$A_i = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{i+1} \mathbf{V} + \sum_{i=0}^j B_i \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{i-1} \quad (38)$$

四、算 例

1. 广义 Stokes 方程的解

如果令 $t = 0$, (7) 式可写成

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{V} &= \frac{\alpha}{\beta} \mathbf{V} + \frac{1}{\beta} \nabla p \\ \nabla^2 p &= 0 \\ \mathbf{V}|_r &= \mathbf{g} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{\beta} \nabla p$$

$$\mathbf{B}_i = 0 \quad i \neq 1$$

$$A_i = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^i \left(\frac{\alpha}{\beta} \mathbf{V} + \frac{\nabla p}{\beta}\right)$$

因此, (36) 式可写成

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma} \left(G_0^* \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n} - \mathbf{V} \frac{\partial G_0^*}{\partial n} \right) d\Gamma \\ - \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\mathbf{V} + \frac{1}{\alpha} \nabla p \right) \frac{\partial G_i^*}{\partial n} - G_i^* \frac{\partial}{\partial n} \left(\mathbf{V} + \frac{1}{\alpha} \nabla p \right) \right] \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^i d\Gamma \end{aligned} \quad (40)$$

对于(40)式利用边界元方法离散求解, i 分别取 1, 2, 3. 计算结果如图 1 所示. 取 $\alpha = 0.01$, $\beta = 1$, 设圆柱体半径为 $R_0 = 1$, 流场外边界 $R_{\infty} = 6$, 边界条件为: 物面上 $\mathbf{V} = 0$, 在 $R = R_{\infty}$ 上 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\infty} = 1$. p 的初值都取 1, 在 AST/386 微机上运行, 迭代一次需要 40 秒钟左右. 当 $J = 1$ 时, 迭代 50 次, 误差达 0.00044, $J = 2$ 时, 迭代 12 次, 误差达 10^{-9} , $J = 3$ 时, 迭代 14 次, 误差达 10^{-9} . 从图中可看出, $J = 2$ 和 $J = 3$ 两条曲线完全重合, 而 $J = 1$ 稍有偏差, 因此取 $J = 2$, 就可以达到精度要求. 图中 θ 是矢径 \mathbf{r} 和负 x 轴夹角.

2. 均匀前切流绕圆柱 Stokes 流动

取 $\alpha = 0$, (7) 式成为

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{V} &= \frac{1}{\beta} \nabla p \\ \nabla^2 p &= 0 \\ \mathbf{V}|_r &= \mathbf{g} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

(41) 式为 Stokes 流动. 由(28)式,

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\beta} \nabla p \\ A_i &= 0 \quad i \neq 0 \end{aligned}$$

所以(36)式变成

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{V}(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma} \left(G_0 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n} - \mathbf{V} \frac{\partial G_0}{\partial n} \right) d\Gamma \\ - \int_{\Gamma} \frac{1}{\beta} \left(\nabla p \frac{\partial G_1^*}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} (\nabla p) G_1^* \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (42)$$

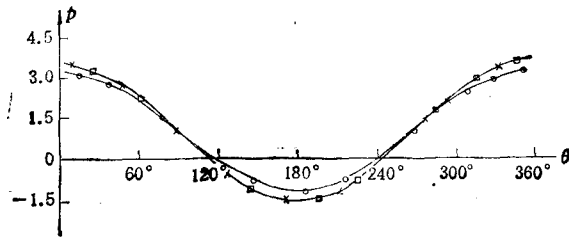


图 1 广义 Stokes 解
(物面压强 p 分布)

○ $J=1$ × $J=2$ □ $J=3$

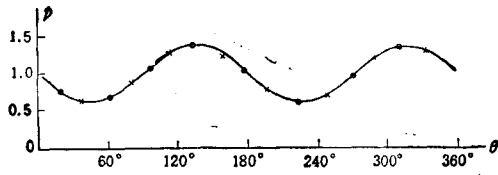


图 2 Stokes 解($R=1.5$, 物面上压强 p 分布)

○ 文[3]解析解 × 本文数值解

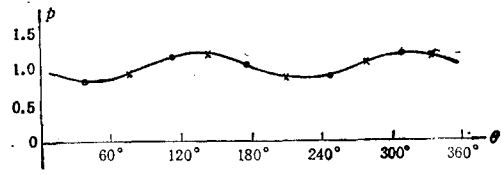


图 3 Stokes 解($R=1.5$, 圆周线上压强 p 分布)

○ 文[3]解析解 × 本文数值解

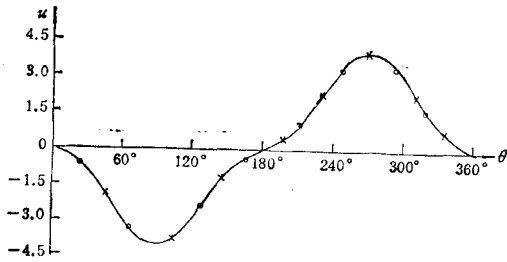


图 4 Stokes 解($R=1.5$, 圆周线上速度 u 分布)

○ 文[3]解析解 × 本人数值解

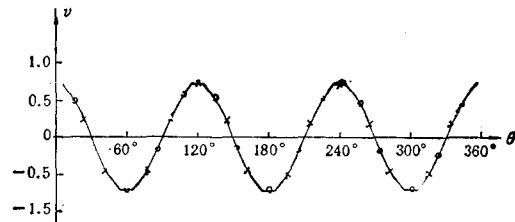


图 5 Stokes 解($R=1.5$, 圆周线上速度 v 分布)

○ 文[3]解析解 × 本文数值解

(42)式相当取 $J=1$, 它精确地满足(41)式。

用式(42)求解均匀剪切流绕圆柱的 Stokes 流动。计算结果如图 2 到图 5 所示, 图中 θ 仍是矢径 r 和负 x 轴夹角。图 2 表示圆柱表面上压强 p 分布, 图 3 到图 5 分别表示半径 $R=1.5$ 的圆周线上压强 p , 速度 u 和 v 的分布。从图中看出本文的数值解和文[3]解析解非常吻合。

参 考 文 献

- [1] 杨峰生. 定常可压缩无粘流非线性方程解的完全边界积分表示式. 航空学报, 1991, (3).
- [2] Bristeau M O et al., Numerical Methods for the Navier-Stokes Equations Applications to the Simulation of Compressible and Incompressible Viscous Flows. Computer Physics Reports 1987 (6): 73-187
- [3] Milne-Thomson L M. 理论流体力学, 北京, 机械工业出版社. 李裕文, 晏名文译. 782-783

THE COMPLETE BOUNDARY INTEGRAL FORMULATION FOR GENERALIZED STOKES EQUATION AND ITS APPLICATION TO THE SOLUTION OF NAVIER-STOKES EQUATION

Liu Xiyun

(East China Institute of Technology, Nanjing 210014, China)

Yang Zousheng

(Nanjing Aeronautical Institute, Nanjing 210016, China)

Abstract In order to decouple the variables in Navier-Stokes equations, the Peaceman-Rachford operator splitting method is used in this paper to discretize the time dependent Navier-Stokes equations into linear and nonlinear subproblems. In these subproblems the coupling mentioned above is avoided. The linear subproblems are quite close to the generalized Stokes equations. A multi-reciprocity method is used to obtain the complete boundary integral formulation for the solution of the generalized Stokes equation to reduce the dimensionality of the problem to be solved by one. The numerical examples for generalized Stokes equations and the Stokes flow of cylindrical body in shear flow show that the multi-reciprocity method presented in this paper is efficient and the results are in good agreement with the analytical solution given in reference [3].

Key words generalized Stokes equation, Navier-Stokes equation, boundary element method