第 24 卷 第 5 期　　力 学 学 报　　Vol. 24, No. 5
1992 年 9 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Sept., 1992

用于弹性蠕变损伤问题的参变量变分原理*

曾 攀　　孙训方

(西南交通大学应用力学研究所，成都 610031)

提要　参变量变分原理是近年来发展的用于处理数学物理问题中边界待定边值问题的一种有效方法，本文建立起用于蠕变损伤问题结构分析的参变量变分原理，该原理将原问题化为求解带约束条件的泛函极值，其约束条件就是由蠕变损伤本构关系推导出的系统状态方程组；该原理物理意义明确、表达式简单并且规范，容易为计算机实现。本文给出原理的证明，并就 2.25Cr-1Mo 钢在 550℃ 下的蠕变问题给出实例。

关键词　参变量变分原理，蠕变，损伤

1. 问题的提法与本构关系描述

蠕变损伤的结构分析，除常规的结构变形分析外，还耦合有蠕变和损伤处理，基本方程包括连续介质力学方程、蠕变方程以及损伤方程[1][2]，具体的表达式如下(以增量的形式)。

(1) 平衡方程

$$d\sigma_{ij,j} + db_i = 0 \quad 在\,\Omega\,中 \tag{1}$$

(2) 应变-位移关系

$$2d\varepsilon_{ij} = du_{i,j} + du_{j,i} \quad 在\,\Omega\,中 \tag{2}$$

(3) 本构关系

$$d\sigma_{ij} = H_{ijkl}d\varepsilon^e_{kl} \tag{3}$$

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon^e_{ij} + d\varepsilon^p_{ij} \tag{4}$$

$$\frac{d\varepsilon^c_{ij}}{dt} = q_{ij}(\sigma_{ij}, D) \tag{5}$$

$$\frac{dD}{dt} = h(\sigma_{ij}, D) \tag{6}$$

(4) 边界及初始条件

$$d\sigma_{ij}\cdot n_j = d\overline{T}_i \quad 在\,S_1\,上 \tag{7}$$

$$du_i = d\bar{u}_i \quad 在\,S_2\,上 \tag{8}$$

$$\varepsilon^c_{ij}|_{t=0} = 0 \tag{9}$$

$$D|_{t=0} = 0 \tag{10}$$

* 本文由国家博士后科学基金资助.
本文于 1991 年 2 月 2 日收到第一稿，于 1991 年 6 月 6 日收到修改稿.

这里,弹性本构关系式(3)不考虑损伤耦合作用的影响.

以上,σ_{ij} 为应力张量,ε_{ij},ε^e_{ij},ε^c_{ij} 分别为总应变、弹性应变及蠕变应变张量;H_{ijkl} 为弹性系数张量;b_i 为体力向量;$\bar{T}_i$ 为外力向量;u_i 为位移向量;$\bar{u}_i$ 为给定边界位移向量;D 为损伤变量;Ω 为物体空间;S_1 为力边界;S_2 为位移边界.

(5)式和(6)式是蠕变和损伤方程的一般形式,对于单轴蠕变问题,Leckie 和 Hayhurst 给出了广泛应用的形式[5]:

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = B\left(\frac{\sigma}{1-D}\right)^n \tag{11}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{A}{\phi+1}\frac{\sigma^p}{(1-D)^\phi} \tag{12}$$

其中 B,n,A,p 和 ϕ 均为待定的材料常数,在唯象学的方法中,这些材料常数均是通过对宏观试验结果的拟合而确定.

70年代初,Hayhurst 首先引入了"多轴蠕变断裂等时面"的概念[6],为将 Kachanov-Robatnov 理论(5)及(6)式应用于多轴问题的分析奠定了基础,相应的表达式为[6]:

$$\frac{d\varepsilon^c_{ij}}{dt} = \frac{3}{2}B\sigma_{eq}^{n-1}S_{ij}(1-D)^{-n} \tag{13}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{A}{\phi+1}\frac{[\alpha\sigma_1+(1-\alpha)\sigma_{eq}]^p}{(1-D)^\phi} \tag{14}$$

其中 $\sigma_1,\sigma_{eq},S_{ij}$ 分别为最大主应力,Von-Mises 等效应力及应力偏量,α 为多轴损伤法则中的系数.

下面就 Kachanov-Rabatnov 理论一般的表达式(5)(6)式进行研究.

由于本构关系的复杂性、多样性以及高度非线性,因而必须进行一些数学处理并给出一般性描述,下面推导(3)~(6)的统一表达式.

将蠕变方程按一阶展开,并将(3)及(4)式代入,有

$$F^{(c)}_{ij}(d\varepsilon_{ij}, dD, \lambda^c_{ij}) = 0 \tag{15}$$

其中

$$F^{(c)}_{ij}(d\varepsilon_{ij}, dD, \lambda^c_{ij}) = q_{ij}(\sigma^0_{ij}, D^0)dt + \frac{\partial q_{ij}}{\partial\sigma_{ij}}H_{ijkl}d\varepsilon_{kl}dt - \left(\frac{\partial q_{ij}}{\partial\sigma_{ij}}H_{ijkl}dt+1\right)\lambda^c_{kl} + \frac{\partial q_{ij}}{\partial D}dD\,dt \tag{16}$$

而

$$\lambda^c_{ij} = d\varepsilon^c_{ij} \tag{17}$$

(15)式是关于 $d\varepsilon_{ij}$, dD, λ^c_{ij} 的线性方程.

对损伤方程(6)也作同样的展开和处理,有

$$F^{(D)}(d\varepsilon_{ij}, dD, \lambda^c_{ij}) = 0 \tag{18}$$

其中

$$F^{(D)}(d\varepsilon_{ij}, dD, \lambda^c_{ij}) = h(\sigma^0_{ij}, D^0)dt + \frac{\partial h}{\partial\sigma_{ij}}H_{ijkl}d\varepsilon_{kl}dt - \frac{\partial h}{\partial\sigma_{ij}}H_{ijkl}\lambda^c_{kl}dt + \left(\frac{\partial h}{\partial D}dt - 1\right)dD \tag{19}$$

(18) 式同样是关于 $d\varepsilon_{ij}, dD, \lambda^c_{ij}$ 的线性方程。

表达式 (15) 及 (18) 就构成了蠕变损伤过程的本构描述，也就是控制物体损伤发展过程的状态方程组。

2. 变分原理

首先构造一个势能泛函 Π：

$$\Pi(d\varepsilon_{ij}, du_i, \lambda^c_{ij}) = \int_\Omega \left\{\frac{1}{2} d\varepsilon_{ij} H_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - \lambda^c_{ij} H_{ijkl} d\varepsilon_{kl}\right\} d\Omega - \left[\int_\Omega db_i du_i d\Omega + \int_{s_1} d\bar{T}_i du_i ds\right] \tag{20}$$

根据现代优化控制理论的基本思想，所讨论的问题可分为两个部分[3]：一是构造描述该系统的指标函数，二是在容许域内使该指标函数在状态方程控制下取最优。变量也分为两类，一类是系统的状态变量，另一类是控制变量(也叫参变量)，前者描述系统的状态，而后者对该系统的发展起控制作用，并且在变分运算过程中不参加变分作用。下面建立起用于蠕变损伤问题结构分析的参变量变分原理。

势能原理：对于任一时刻 t，就时间增量 dt 的范围内，即 $[t, t+dt]$，在所有满足应变位移关系 (2)、几何边界条件 (8) 的可能位移增量场中，真实解使得泛函 (20) 在状态方程 (15)、(18) 以及初始条件 (9)(10) 的控制下取总体最小，其中 du_i (或 $d\varepsilon_{ij}$) 是自变量函数，λ^c_{ij} 是不参加变分的参变量，其物理意义为蠕变应变增量，这是现代变分原理可以不对参变量求变分的重要思想[3][4]。

下面给出该原理的证明。

在时刻 $[t, t+dt]$ 范围内，由于泛函 Π 始终依赖于 du_i (或 $d\varepsilon_{ij}$)，则

$$\delta\Pi = \int_\Omega \{d\varepsilon_{ij} H_{ijkl} \delta(d\varepsilon_{kl}) - \lambda^c_{ij} H_{ijkl} \delta(d\varepsilon_{kl})\} d\Omega - \left[\int_\Omega db_i \delta(du_i) d\Omega + \int_{s_1} d\bar{T}_i \delta(du_i) ds\right] \tag{21}$$

将 (4) 式代入 (3) 式，有

$$d\varepsilon_{ij} H_{ijkl} = d\sigma_{kl} + d\varepsilon^c_{ij} H_{ijkl} \tag{22}$$

再将 (22) 代入 (21) 有：

$$\delta\Pi = \int_\Omega \{[d\sigma_{kl} + d\varepsilon^c_{ij} H_{ijkl}] \delta(d\varepsilon_{kl}) - \lambda^c_{ij} H_{ijkl} \delta(d\varepsilon_{kl})\} d\Omega - \left[\int_\Omega db_i \delta(du_i) d\Omega + \int_{s_1} d\bar{T}_i \delta(du_i) ds\right] \tag{23}$$

由于 (17)，即 $\lambda^c_{ij} = d\varepsilon^c_{ij}$，可由状态方程 (15)(18) 唯一确定，代入 (23) 式有

$$\delta\Pi = \int_\Omega [d\sigma_{ij} \delta(d\varepsilon_{ij}) - db_i \delta(du_i)] d\Omega - \int_{s_1} d\bar{T}_i \delta(du_i) ds \tag{24}$$

对 (24) 式的第一项应用 Green 定理，有

$$\int_\Omega d\sigma_{ij} \delta(d\varepsilon_{ij}) d\Omega = \int_{s_1} d\sigma_{ij} n_j \delta(du_i) ds - \int_\Omega d\sigma_{ij,j} \delta(du_i) d\Omega \tag{25}$$

代入 (24) 式

$$\delta\Pi = -\int_\Omega [d\sigma_{ij,j} + db_i] \delta(du_i) d\Omega + \int_{s_1} (d\sigma_{ij} n_j - d\bar{T}_i) \delta(du_i) ds \tag{26}$$

令 $\delta\Pi = 0$，并考虑到 $\delta(du_i)$ 的任意性及足够小，有

$$d\sigma_{ij,j} + db_i = 0 \quad \text{在}\,\Omega\,\text{中} \tag{27}$$

$$d\sigma_{ij}n_j - d\bar{T}_i = 0 \quad \text{在}\,S_1\,\text{上} \tag{28}$$

这就是平衡方程和应力边界条件，进一步有 $\delta^2\Pi \geqslant 0$，所以由 $\delta\Pi = 0$ 导出的状态变量函数 du_i（或 $d\varepsilon_{ij}$）使得 Π 取总体最小值，由于 (20) 是在状态方程 (15)(18) 以及初始条件 (9)(10) 的控制下取极值，因此，在整个过程中也同时满足蠕变-损伤规律

综上所述，蠕变损伤问题的参变量变分原理为：

$$\underset{du_i\,(\text{或}\,d\varepsilon_{ij})}{\text{minimize}} \quad \Pi(d\varepsilon_{ij},\, du_i,\, \lambda^c_{ij}) \tag{29}$$

Subject to

$$F^{(c)}_{ij}(d\varepsilon_{ij}, dD, \lambda^c_{ij}) = 0 \tag{30}$$

$$F^{(D)}(d\varepsilon_{ij}, dD, \lambda^c_{ij}) = 0 \tag{31}$$

$$\varepsilon^c_{ij}|_{t=0} = 0 \tag{32}$$

$$D|_{t=0} = 0 \tag{33}$$

3. 实例

2.25Cr-1Mo 钢在 550℃ 下的蠕变

试验数据取自文献[7]，这是单轴等应力蠕变试验，即外载 $\sigma^0 = \text{constant}$，蠕变方程和损伤方程取 (11)(12) 式的形式，由 (30) 及 (31) 可有以下数值计算表达式：

$$d\tilde{\varepsilon}^c = \left[1 + \frac{n}{(1-D^0)}dD\right]\frac{d\tilde{\tau}}{(1-D^0)^n} \tag{34}$$

$$dD = \frac{(1-D^0)d\tilde{\tau}}{(\phi+1)(1-D^0)^{\phi+1} - \phi d\tilde{\tau}} \tag{35}$$

以上 $d\tilde{\varepsilon}^c$、$d\tilde{\tau}$ 分别为归一化蠕应变增量及归一化时间增量，即

$$d\tilde{\varepsilon}^c = d\varepsilon^c/(\dot{\varepsilon}_{\min}t_f) \tag{36}$$

$$d\tilde{\tau} = dt/t_f \tag{37}$$

其中 Norton 律常数：

$$\dot{\varepsilon}_{\min} = B\sigma^{0n} \tag{38}$$

$$t_f = 1/A\sigma^{0p} \tag{39}$$

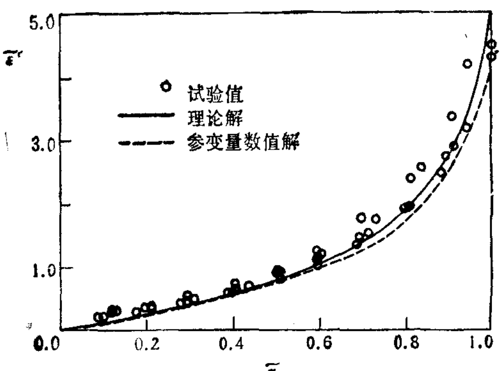

图 1 2.25 Cr-1Mo 钢(550℃ 下)的蠕变曲线

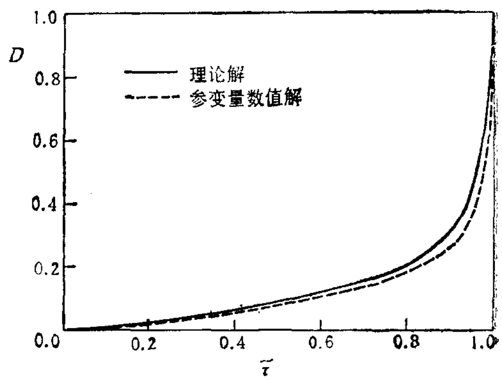

图 2 2.25 Cr-1Mo 钢(在 550℃ 下)的损伤曲线

本文取时间步长 $\Delta\tilde{\tau}=0.1$，利用(35)式对 ΔD 进行计算，然后代入(34)式对 ε^c 进行计算，计算结果和试验结果以及理论解进行比较(见图 1 和图 2)。

由于该问题是单轴一维问题，较容易直接从(11)(12)式求解微分方程得到理论解，但对于稍为复杂的问题是很难求出理论解的，只能依靠数值求解，由图 1 及图 2 中的比较可以看出，本文所建立的用于损伤问题结构分析的变分原理是有效的，在该实例中，$\tilde{\tau}$ 的增量步长取得较大 ($\Delta\tilde{\tau}=0.1$)，因而会影响计算精确度，特别是在 $\tilde{\tau}\geqslant 0.7$ 后由于曲线的发展变化很大，需要取较小的 $\Delta\tilde{\tau}$ 才能获得非常满意的结果，这里只是给出一个实例以说明本文所建立方法的一个应用。

4. 小结

本文建立了用于弹性蠕变损伤问题结构分析的参变量变分原理，概括如下：

$$\begin{aligned}&\text{Minimize}\ \Pi(d\varepsilon_{ij},du_i,\lambda^c_{ij})\\&du_i\ (\text{或}\ d\varepsilon_{ij})\\&\text{s. t.}\qquad F^{(c)}_{ij}(d\varepsilon_{ij},dD,\lambda^c_{ij})=0\\&\qquad\qquad F^{(D)}(d\varepsilon_{ij},dD,\lambda^c_{ij})=0\end{aligned}$$

其主要的特点为：

(1) 对蠕变损伤本构关系进行了一般性描述，并表达成关于 $d\varepsilon_{ij},dD,\lambda^c_{ij}$ 的线性方程组，就蠕变损伤问题具有普遍意义。

(2) 本文所建立的变分原理简单、明了，容易为数值方法(如有限元技术)进行处理。

(3) 文中就 2.25Cr-1Mo 钢在 550℃ 下的蠕变问题给出应用的实例。

参　考　文　献

[1] Kachanov LM. The time to failure under creep condition Izv Akad Nauk, SSSR Tekh Nauk, 1958, 8: 26—31

[2] Rabotnov YM. Creep problems in structural members. Amsterdam, North-Holland, 1969

[3] Zhong WX and Zhang R L. The parametric variational principle for elastoplasticity. ACTA Mechanica Sinica, 1988, 4(2): 134—137

[4] 钟万勰，岩土力学中的参变量最小余能原理力学学报，1986，(3)

[5] Leckie FA and Hayhurst DR. Constitutive equations of creep rupture. ACTA Metallurgy, 1977, 25: 1059

[6] Hayhurst D R. Creep rupture under malti-axial states of stress. Journal of Mechanical Physical Solids, 1972, 20: 381—390

[7] 刘彦，一种含局部化效应的蠕变损伤理论及其在蠕变裂纹扩展中的应用. 西南交通大学博士论文，1990: 17—20

THE VARIATIONAL PRINCIPLE FOR ELASTIC CREEP-DAMAGE PROBLEM

Zeng Pan Sun Xunfang
(*Institute of Applied Mechanics, Southwest Jiaotong University, Chengdu* 610031, *China*)

Abstract The parametric variational principle (PVP) is powerful to solve the non-linear unspecified boundary problems in continuum mechanics. By the PVP, this paper studies the elastic-creep-damage problem. The proposed principle, a development of optimum control theory, is to minimize a constructed potential energy functional under the constrained conditions which are converted from the creep-damage equations. The mathematical proof of principle is given. Also, the paper quotes the results of creep experiments of 2.25Cr-1Mo steel at 550°C to show an application of the proposed principle. The principle is easy to be put into practice by computer.

Key words parametric variational principle, creep, damage