

振荡管流换热的理论解*

赵令德 朱谷君 曹玉璋 李波

(北京航空航天大学402教研室, 100083)

摘要 本文从流体在管内振荡的运动方程和流体及管壁的能量方程出发, 经过变量转换对常微分方程组进行求解, 得到了计及管壁影响的振荡流体轴向换热的一般理论解。由这解, 可以导出各种特殊条件下的表达式, 包括已有的各种解析解。本解经数字化而制成各种图线, 它们与已有的实验数据基本吻合。

关键词 振荡管流, 强化传热, 非定常流动, 不可压层流, 斯托克司边界层

1. 引言

许多学者的理论和实验研究都证实流体在管内作轴向振荡运动时可以强化轴向的质量传递。作为这一研究的自然延伸, 1984年文献[1]首次公布了大参数条件下振荡管流换热的理论解和初步的实验验证。随后, 文献[2]给出了小参数条件下的理论解。本文给出一般条件下的理论解, 由这解可以导出文献[1—3]中的特殊结果

2. 解析解

本文求解的是流体在管内振荡时的轴向换热问题, 其中不包括管壁的轴向导热, 但却考虑了管壁的存在对流体轴向换热的影响。不可压常物性的牛顿流体, 不计重力, 在无限长刚性直圆管中, 由随时间作正弦变化的压力梯度引起的层流运动的运动方程为

$$U_{\tau} = -\rho^{-1}p_x + \nu(U_{rr} + U_r/r) \quad (1)$$

$$-p_x = P e^{i\omega\tau} \quad (2)$$

式中 τ 为时间, x 为轴向坐标, r 为径向坐标, U 为轴向速度, ρ 为流体密度, p_x 为轴向压力梯度, ν 为流体运动粘度, P 为常数, ω 为振荡频率。对应的边界条件为: $U|_{r=R_1} = 0$, $U_r|_{r=0} = 0$ 。其解由文献[4]给出

$$U(r, \tau) = (iP/\rho\omega)[J_0(i^{3/2}r/R_1\text{Wom})/J_0(i^{3/2}\text{Wom}) - 1]e^{i\omega\tau} \quad (3)$$

式中 J_0 为虚宗量的第一类零阶 Bessel 函数, R_1 为圆管内半径, Wom 为 Womersley 数, $R_1(\omega/\nu)^{1/2}$ 。

为了用潮式位移量 Δx 替换常数 P , 计算出振荡周期中单向排出的最大流体体积 V_T , 即:

$$V_T = \int_0^{\pi/\omega} \int_0^{R_1} U(r, \tau) 2\pi r dr d\tau \quad (4)$$

将式(3)代入式(4)并积分之, 可得:

* 国家自然科学基金资助项目

本文于1991年2月8日收到第一稿, 1991年6月1日收到修改稿

$$V_T^2 = F(\text{Wom}) \cdot 4\pi^2 R_1^2 P^2 / \text{Wom}^8 \nu^4 \rho^2 \quad (5)$$

定义潮式位移量 $\Delta x = V_T / \pi R_1^2$, 因而

$$(\Delta x / R_1)^2 = V_T^2 / \pi^2 R_1^4 = F(\text{Wom}) \cdot 4 R_1^2 P^2 / \text{Wom}^8 \nu^4 \rho^2 \quad (6)$$

式中 $F(\text{Wom}) = (B \text{Wom}^3 + B' - B'' \text{Wom} - B''' \text{Wom}^2) / B \text{Wom}^3$, 而函数

$$B = \text{ber}^2(\text{Wom}) + \text{bei}^2(\text{Wom}),$$

B', B'' 和 B''' 是 B 的一, 二, 三阶导数, ber 和 bei 是 Kelvin 函数。

忽略粘性耗散, 流体和管壁中的能量方程为

$$T_\tau + U(r, \tau) T_x = a_f (T_{rr} + T_r/r + T_{xx}) \quad (0 < r < R_1) \quad (7)$$

$$T_\tau = a_w (T_{rr} + T_r/r + T_{xx}) \quad (R_1 < r < R_2) \quad (8)$$

式中 T 为温度, a_f 和 a_w 分别为流体和管壁的导热系数, R_2 为圆管外半径。假设在流体和管壁中有相同构造的温度型^[3]:

$$T(x, r, \tau) = \gamma [x + R_1 g(r) e^{i\omega\tau}] \quad (9)$$

代入 (7) 和 (8) 式中可得:

$$g_f''(\eta_1) + g_f'(\eta_1)/\eta_1 + g_f(\eta_1) = i f(\eta_1)/\omega R_1 \quad (10)$$

$$g_w''(\eta_1) + g_w'(\eta_1)/\eta_1 + \sigma g_w(\eta_1) = 0 \quad (11)$$

式中

$$f(\eta_1) e^{i\omega\tau} = U(r, \tau).$$

$$\eta_1 = i^{3/2} \text{Wom} \sqrt{P_r r / R_1} = i^{3/2} \text{Wom} \sqrt{P_r} \eta.$$

$$\sigma = a_f / a_w.$$

求解方程 (10) 和 (11) 所用的边界条件为

$$g_f' = 0 \quad \eta_1 = 0$$

$$g_w' = 0 \quad \eta_1 = i^{3/2} \text{Wom} \sqrt{P_r R_2 / R_1}$$

$$g_f = g_w, \quad \lambda_f / \lambda_w = g_w' / g_f' \quad \eta_1 = i^{3/2} \text{Wom} \sqrt{P_r}$$

用待定系数法求出常微分方程 (10) 和 (11) 的通解为

$$g_f(\eta_1) = A_1 J_0(\eta_1) + B_1 Y_0(\eta_1) + (i\pi/2\omega R_1) \left[Y_0(\eta_1) \int J_0(\eta_1) f(\eta_1) \eta_1 d\eta_1 - J_0(\eta_1) \int Y_0(\eta_1) f(\eta_1) \eta_1 d\eta_1 \right] \quad (12)$$

$$g_w(\eta_1) = A_2 J_0(\eta_1 \sqrt{\sigma}) + B_2 Y_0(\eta_1 \sqrt{\sigma}) \quad (13)$$

根据轴对称温度分布条件可得 $B_1 = 0$; 根据圆管外壁绝热条件可得

$$B_2 = -A_2 J_1(i^{3/2} \text{Wom} \sqrt{P_r \sigma R_2 / R_1}) / Y_1(i^{3/2} \text{Wom} \sqrt{P_r \sigma R_2 / R_1}).$$

将 B_1, B_2 分别代入 (12) 和 (13) 式中并积分之, 得:

$$g_f(\eta) = [P / \rho \omega^2 R_1 I_0(i^{1/2} \text{Wom})] [A I_0(i^{1/2} \text{Wom} \sqrt{P_r} \eta) - (P_r / P_r - 1) I_0(i^{1/2} \text{Wom} \eta) + I_0(i^{1/2} \text{Wom})] \quad (14)$$

$$g_w(\eta) = A_2 [J_0(i^{3/2} \text{Wom} \sqrt{P_r \sigma} \eta) - Y_0(i^{3/2} \text{Wom} \sqrt{P_r \sigma} \eta) \cdot J_1(i^{3/2} \text{Wom} \sqrt{P_r \sigma R_2 / R_1}) / Y_1(i^{3/2} \text{Wom} \sqrt{P_r \sigma R_2 / R_1})] \quad (15)$$

根据圆管内壁面处温度和热流连续可确定系数 A 和 A_2 。由于我们所关心的是流体内的温

度分布,这里只给出(14)式中 A 的表达式:

$$A = \frac{P_r}{P_r - 1} [P_r^{-1} I_0(i^{1/2} \text{Wom}) - K \mu \sigma^{-1/2} P_r^{-1/2} I_1(i^{1/2} \text{Wom})] / [I_0(i^{1/2} \text{Wom} P_r^{1/2}) - K \mu \sigma^{-1/2} I_1(i^{1/2} \text{Wom} P_r^{1/2})] \quad (16)$$

$$K = [I_0(i^{1/2} \text{Wom} P_r^{1/2} \sigma^{1/2}) K_1(i^{1/2} \text{Wom} P_r^{1/2} \sigma^{1/2} R_2 / R_1) + I_1(i^{1/2} \text{Wom} P_r^{1/2} \sigma^{1/2} R_2 / R_1) K_0(i^{1/2} \text{Wom} P_r^{1/2} \sigma^{1/2})] / [I_1(i^{1/2} \text{Wom} P_r^{1/2} \sigma^{1/2}) K_1(i^{1/2} \text{Wom} P_r^{1/2} \sigma^{1/2} R_2 / R_1) - I_1(i^{1/2} \text{Wom} P_r^{1/2} \sigma^{1/2} R_2 / R_1) K_1(i^{1/2} \text{Wom} P_r^{1/2} \sigma^{1/2})] \quad (17)$$

式中 $\mu = \lambda_f / \lambda_w$, $I_0(i^{1/2} z) = J_0(i^{3/2} z)$, $i I_1(i^{1/2} z) = J_1(i^{3/2} z) = \text{ber}_1 z + i \text{bei}_1 z$,

$K_0(i^{1/2} z) = \text{ker} z + i \text{kei} z$, $K_1(i^{1/2} z) = i(\text{ker}_1 z + i \text{kei}_1 z)$.

将式(14),(16)和(17)代入式(9)中,可得流体中的温度分布,在此基础上应用流体的轴向换热量计算式:

$$\int_0^{2\pi/\omega} Q(\tau) d\tau = \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{R_1} -\lambda_f (\partial T / \partial x) 2\pi r dr d\tau + \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^{R_1} \rho_f C_f \cdot u(r, \tau) T(r, \tau) 2\pi r dr d\tau \quad (18)$$

并定义当量导热系数为

$$\int_0^{2\pi/\omega} Q(\tau) d\tau = -\lambda_e (\partial T / \partial x)_0 \pi R_1^2 2\pi / \omega \quad (19)$$

式中 $(\partial T / \partial x)_0$ 为静止流体的轴向温度梯度。经过十分冗长的推导,管内振荡流体的当量导热系数或当量导温系数可写成:

$$\begin{aligned} (\lambda_e - \lambda_f) / \lambda_f = & (a_e - a_f) / a_f = 0.25 \text{Wom} / F(\text{Wom}) \cdot (\Delta x / R_1)^2 \cdot B^{-1} \\ & \cdot P_r / (P_r + 1) \{ (P_r + 1) / (P_r - 1) [\text{ber}(\text{Wom}) \text{ber}'(\text{Wom}) \\ & + \text{bei}(\text{Wom}) \text{bei}'(\text{Wom})] - A_r [P_r^{-1/2} \text{ber}(\text{Wom}) \text{ber}'(\text{Wom} P_r^{1/2}) \\ & + P_r^{-1/2} \text{bei}(\text{Wom}) \text{bei}'(\text{Wom} P_r^{1/2}) + \text{ber}(\text{Wom} P_r^{1/2}) \text{ber}'(\text{Wom}) \\ & + \text{bei}(\text{Wom} P_r^{1/2}) \text{bei}'(\text{Wom})] - A_i [P_r^{-1/2} \text{bei}(\text{Wom}) \text{ber}'(\text{Wom} P_r^{1/2}) \\ & - P_r^{-1/2} \text{ber}(\text{Wom}) \text{bei}'(\text{Wom} P_r^{1/2}) + \text{ber}(\text{Wom} P_r^{1/2}) \text{bei}'(\text{Wom}) \\ & - \text{bei}(\text{Wom} P_r^{1/2}) \text{ber}'(\text{Wom})] \} \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $A = A_r + i A_i$, A 的表达式即(16)式。

对于 $P_r = 1$ 的流体:

$$\begin{aligned} (\lambda_e - \lambda_f) / \lambda_f = & -0.25 \text{Wom}^2 / F(\text{Wom}) \cdot (\Delta x / R_1)^2 \cdot B^{-1} \{ 0.25 [\text{ber}'^2(\text{Wom}) \\ & + \text{bei}'^2(\text{Wom})] + A_r \text{Wom}^{-1} [\text{ber}(\text{Wom}) \text{ber}'(\text{Wom}) \\ & + \text{bei}(\text{Wom}) \text{bei}'(\text{Wom})] \} \end{aligned} \quad (21)$$

式中 A' 为

$$A' = A_r' + i A_i' = -\{ 1 - 1/2 i^{1/2} \text{Wom} [K \mu \sigma^{-1/2} - I_1(i^{1/2} \text{Wom}) / I_0(i^{1/2} \text{Wom})] \} / \{ 1 - K \mu \sigma^{-1/2} [I_1(i^{1/2} \text{Wom}) / I_0(i^{1/2} \text{Wom})] \} \quad (22)$$

式中 K 的表达式同前,但取 $P_r = 1$ 的值。

3. 理论解的简单讨论

理论解的结果表明: 流体在管内振荡时的轴向换热强化倍数 $(\lambda_e / \lambda_f - 1)$ 是 $\Delta x / R_1$,

Wom , P_r , R_2/R_1 , λ_f/λ_w 和 a_f/a_w 等变量的函数。理论解及各种特殊情况下的表达式都表明强化倍数正比于 $(\Delta x/R_1)^2$, 这与文献[1—3, 5, 6, 8]的结果一致。这规律可以从振荡条件下流体中的等温面面积增大和温度梯度增大来解释^[7]。把强化倍数与 $(\Delta x/R_1)^2$ 的比值定义为 R_{kl} , 它等于 Δx 取圆管半径 R_1 时的强化倍数。图 1 给出 R_{kl} 随各参数变化的理论曲线。

Wom 数对 R_{kl} 的影响如图 1 所示。曲线表明, R_{kl} 随 Wom 数的增大而单调增大, 就双对数座标中的斜率而言明显地可分为三部分, 斜率最小段的范围和位置均随流体 P_r 数而变化。按照 Wom 数的定义, $Wom = R_1(\omega/\nu)^{1/2} = [(\pi R_1^2/\nu)/(\pi/\omega)]^{1/2}$, 它实际上反映了扰动粘性传递所需时间与振荡半周期之间的关系。由此出发, 可以说明图示斜率变化的原因是 Wom 数对速度型与位移型影响的结果。

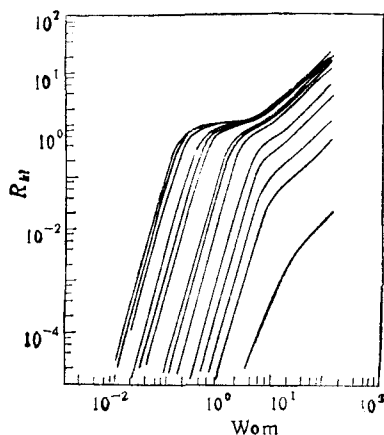


图 1 内壁绝热的理论曲线

自左至右, P_r 数依次为: 1000, 800, 500, 160, 100, 60, 10, 7, 3.5, 1.0, 0.5, 0.2, 0.1, 0.01

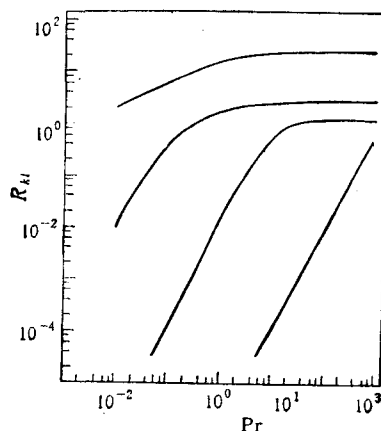


图 2 R_{kl} 随 P_r 数变化的理论曲线

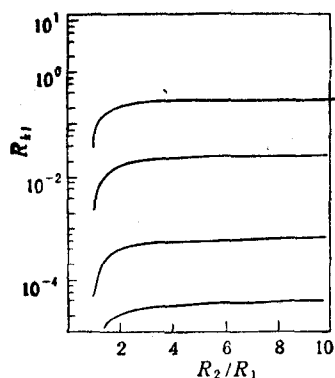
$R_2/R_1 = 1.6$, $\sigma = \mu = 10^{-3}$

自下而上对应的 wom 数为 0.1, 1.0, 10, 100

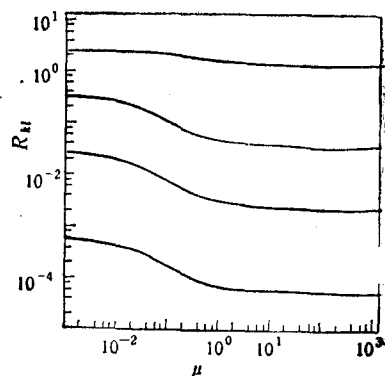
图 2 是 R_{kl} 随 P_r 数的变化曲线。关于 P_r 的影响可以结合等温面的变化来考虑。不振荡时的等温面是圆截面, 其面积最小; 振荡后由于有轴向位移, 在同一截面上产生了温度差, 因而等温面增大, 使得换热面积和温度梯度增大。这种增大作用随 P_r 减小而削弱, 因为在相同条件下, P_r 减小可使圆截面上温度的变化减小。用类似于对 Wom 的分析方法, P_r 的影响可表示为 $Wom \sqrt{P_r} = R_1 \sqrt{\omega/a} = \left(\frac{\pi R_1^2}{a} \frac{1}{\omega} \right)^{1/2}$ 。这实际上是某种特别定义的 F_0 数, 它反映了热扰动的分子传递速度与振荡半周期之间的关系。

图 3 是 R_{kl} 随 R_2/R_1 变化的曲线。管壁的作用类似于蓄热器, 使振荡流体的轴向换热效果增强, 但是壁厚增大的作用受热扰动在半周期内的传递深度的限制, 管壁外层不能有效地参与蓄热和放热, 因而当 R_2/R_1 增加时, R_{kl} 在一开始是增加的但很快就趋于常数。

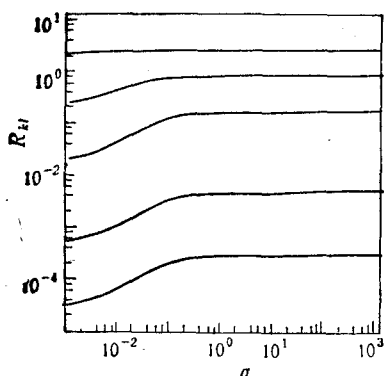
图 4 和图 5 是 μ 和 σ 对 R_{kl} 的影响图线。 μ 值减小可使壁内的热扰动加深, 蓄热器的作用加强, 因而 R_{kl} 值增大。在一定的 μ 值下, σ 增大意味着管壁热容量与流体热容量之比加大, 同样使蓄热器作用加强, R_{kl} 也就增大。

图 3 R_{kf} 随 R_2/R_1 变化的理论曲线 $P_r = 3.5$, $\sigma = 0.0382$, $\mu = 0.0396$

自下而上对应的 Wom 数为 0.1, 0.2, 0.5, 1.0.

图 4 R_{kf} 随 μ 变化的理论曲线 $P_r = 3.5$, $R_2/R_1 = 1.6$, $\sigma = 0.0382$

自下而上对应的 Wom 数为 0.2, 0.5, 1.0, 10.

图 5 R_{kf} 随 σ 变化的理论曲线 $P_r = 10$, $R_2/R_1 = 1.6$, $\mu = 0.0396$

自下而上对应的 Wom 数为 0.2, 0.5, 1.0, 10, 100.

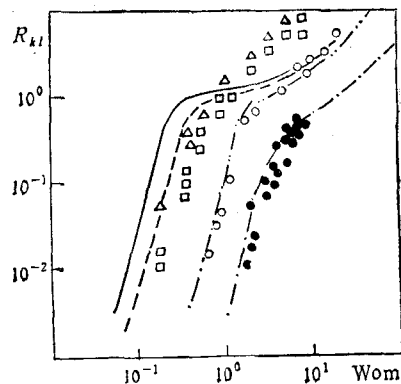


图 6 理论解与实验数据的对比。二者条件相同。

● 管内壁绝热, $P_r = 1$, 取自文献 [8]○ $R_2/R_1 = 2$, $P_r = 3.5$, $a_f/a_w = 0.0382$, $\lambda_f/\lambda_w = 0.0396$ □ $R_2/R_1 = 2$, $P_r = 60$, $a_f/a_w = 0.0159$, $\lambda_f/\lambda_w = 0.0228$ △ $R_2/R_1 = 2$, $P_r = 160$, $a_f/a_w = 0.0129$, $\lambda_f/\lambda_w = 0.0149$,

取自文献 [6]

图 6 是理论曲线与实验结果的对比。

致谢 作者在此向北京航空航天大学应用数理系赵世诚教授表示感谢, 本文在准备过程中曾得到他的许多帮助。

参 考 文 献

- [1] Kurzweg, U. H. and Zhao Lingde, Heat transfer by high-frequency oscillations. *Physics of fluids*, 1984, 27:2624
- [2] Kurzweg U. H., Enhanced heat conduction in fluids subjected to sinusoidal oscillations. *J. Heat Tran. (ASME)*, 1985, 107: 459
- [3] Watson, E. J., Diffusion in oscillatory Pipe flow. *J. F. M.*, 1983, 133: 233-244

- [4] Schlichting. H., *Boundary Layer Theory*. 7th ed. 1979.
- [5] 朱谷君、赵令德、曹玉璋. 管内流体的振荡传热分析. 航空动力学报, 1987, 2(2):153
- [6] 王相锋、高红岩、朱定国、曹玉璋、赵令德. 管内流体振荡强化传热的实验研究. 中国工程热物理学报, 1989, 10(1):78
- [7] 曹玉璋、赵令德、朱谷君. 管内流体振荡强化换热的机理研究. 航空动力学报, 1989, 4(2):105
- [8] Joshi. C. H., Kamm. R. D., Drazan. J. M. and Slutsky A. S., Gas exchange in laminar Oscillatory flows. J. F. M. 1983, 133, 245—254

THEORETICAL SOLUTION ON HEAT TRANSFER IN OSCILLATORY PIPE FLOW

Zhao Lingde, Zhu Gujun, Cao Yuzhang, Li Bo

(402 Teaching Group, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract Starting from the equations of motion of the oscillatory pipe flow, together with the energy equations of the fluid and of the pipe wall, by solving the set of ordinary differential equations using variable transformation and taking pipe wall effect into account, a general analytical solution of the axial heat transfer of oscillatory flow is obtained. Based upon this analytical solution, formulae for heat transfer in various special cases can be derived, some of which reduce to known analytical results. The theoretical curves have been drawn and in general they agree with existing experimental data well.

Key words oscillatory pipe flow, enhanced heat transfer, unsteady flow, incompressible laminar flow, Stokes' boundary layer