

具有固支边的强厚度叠层板的精确解*

范家让 盛宏玉

(合肥工业大学, 230009)

摘要 抛弃任何有关位移或应力模式的人为假设,在文献[1]、[2]的基础上,引入 δ -函数,对具有固支边的强厚度叠层矩形板在任意荷载作用下建立其状态方程。给出静力、动力和稳定问题的精确解,其解满足弹性力学所有方程,并计及了所有弹性常数。

关键词 叠层厚板,状态方程, δ -函数,精确解

一、引言

各种中厚板理论由于基于某种人为假设,致使弹性力学基本方程只能部分被满足,且不能计及所有弹性常数。而对强厚度板,各家理论全部失效。S. Srinivas 等^[3]采用三维弹性力学位移法分析了四边简支叠层矩形板。随着层数增加,该方法需处理大量未知量。文献[1]、[2]运用状态空间法解决了同样的问题,但仅有三个未知量。对其他边界条件下的强厚度叠层矩形板,不少学者则认定是不可能得到精确解析解的。本文在文献[1]、[2]的基础上,引入单位脉冲函数和 δ -函数,给出了具有固支边界的强厚度叠层矩形板的静、动和稳定问题的精确解。

二、一对边固支另一对边简支的单层板的状态方程

图1(a)所示为一正交异性单层板,坐标轴沿弹性主方向,板厚为 h , $x=0$, a 两边固支, $y=0$, b 两边简支,在板的顶面受横向分布力 $q(x,y)$ 作用。现将固支边变为简支边,并加上原固支边的拉、压反力,则图1(a)和图1(b)等价。

引入单位脉冲函数,其定义为

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时;} \end{cases} \quad H(x-x_0) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = x_0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x \neq x_0 \text{ 时;} \end{cases} \quad x \in [0, x_0]$$

根据上面的定义,有

$$\frac{dH(x)}{dx} = -\delta(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时;} \end{cases}$$
$$\frac{dH(x-x_0)}{dx} = \delta(x-x_0) = \begin{cases} \infty & \text{当 } x = x_0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } x \neq x_0 \text{ 时} \end{cases}$$

* 国家自然科学基金资助项目。

本文于1991年12月20日收到。

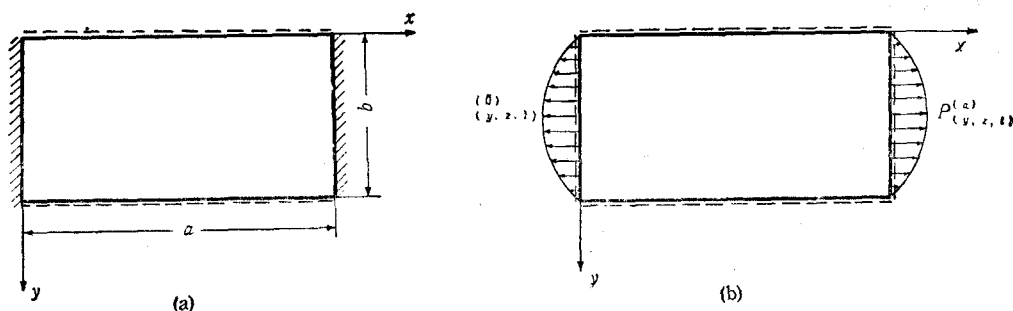


图1 一对边固支另一对边简支的单层板

$\delta(x)$ 和 $\delta(x-x_0)$ 称为 Dirac 函数. 在通常意义下, $H(x-x_0)$ 在 $x=x_0$ 点无导数, 但导数是差商的极限, 从研究 $H(x-x_0)$ 的差商入手, 引出了有重要意义的 δ -函数. 目前关于 δ -函数的研究已比较充分, 它可以求导、积分, 并能展成三角级数.

$$\sigma_x = \bar{\sigma}_x + H(x)P^{(0)}(y, z, t) + H(x-a)P^{(a)}(y, z, t) \quad (1)$$

将(1)式代入平衡方程得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= F^2 U + \delta(x)P^{(0)} - \delta(x-a)P^{(a)} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= F^2 V \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= F^2 W \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, U 、 V 和 W 分别是沿 x 、 y 和 z 方向的位移. 对静力、动力和稳定问题, F^2 分别等于 0 , $\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 和 $P_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, ρ 为材料密度, P_y 是作用在 $y=0, b$ 二边上的均布压力. 将方程(2)与常规的平衡方程相比可见, 若把方程(2)第一式右端的二、三项设想为体积力, 则其对应的正应力场为 σ_x .

将应变-位移关系代入正交异性体的应力-应变关系后, 得

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial W}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \\ \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

记 $X = \tau_{xx}$, $Y = \tau_{yz}$, $Z = \sigma_x$, $\alpha = \frac{\partial}{\partial x}$, $\beta = \frac{\partial}{\partial y}$, $\xi^2 = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, 并令 $C_1 = -\frac{C_{13}}{C_{33}}$, $C_2 = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}$, $C_3 = C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}$, $C_4 = C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}$, $C_5 = -\frac{C_{23}}{C_{33}}$, $C_6 = C_{66}$, $C_7 = \frac{1}{C_{33}}$, $C_8 = \frac{1}{C_{55}}$, $C_9 = \frac{1}{C_{44}}$, 从(2)、(3)两式消去 $\bar{\sigma}_x, \sigma_y$ 和 τ_{xy} 后, 得

$$\frac{\partial}{\partial z} [UVZXYW]^T = \bar{D}[uvZXYw]^T + \bar{B} \quad (4)$$

其中

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_8 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_9 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & -\beta & \xi^2 \\ \xi^2 - C_2\alpha^2 - C_6\beta^2 & -(C_3 + C_6)\alpha\beta & C_1\alpha & 0 & 0 & 0 \\ -(C_3 + C_6)\alpha\beta & \xi^2 - C_6\alpha^2 - C_4\beta^2 & C_5\beta & 0 & 0 & 0 \\ C_1\alpha & C_5\beta & C_7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\bar{B} = [0 \ 0 \ 0 \ [P^{(0)}\delta(x) - P^{(a)}\delta(x-a)] \ 0 \ 0]^T \quad (6)$$

被消去的 $\bar{\sigma}_x, \sigma_y$ 和 τ_{xy} 可由下式求得

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2\alpha & C_3\beta & -C_1 \\ C_3\alpha & C_4\beta & -C_5 \\ C_6\beta & C_6\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ Z \end{Bmatrix} \quad (7)$$

取

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum_m \sum_n U_{mn}(z) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega_{mn}t} \\ V &= \sum_m \sum_n V_{mn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega_{mn}t} \\ Z &= \sum_m \sum_n Z_{mn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega_{mn}t} \\ X &= \sum_m \sum_n X_{mn}(z) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega_{mn}t} \\ Y &= \sum_m \sum_n Y_{mn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega_{mn}t} \\ W &= \sum_m \sum_n W_{mn}(z) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega_{mn}t} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

考虑(1)、(7)和(8)三式不难发现, 在简支边 $y=0, b$ 处, 边界条件 $W=U=\sigma_y=0$ 得到满足; 在固支边 $x=0, a$ 处, 因 $\bar{\sigma}_x=0$, σ_x 分别等于 $P^{(0)}$ 和 $P^{(a)}$. 此外, 在固支边上 $W=V=0$ 已经满足, 剩下尚需满足的是边界条件 $U=0$.

根据 δ -函数的性质, 有

$$\int_0^a \delta(x) f(x) dx = f(0), \quad \int_0^a \delta(x-a) f(x) dx = f(a)$$

将 δ -函数展成余弦级数, 得

$$\delta(x) = \frac{2}{a} \sum_m \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad \delta(x-a) = \frac{2}{a} \sum_m (-1)^m \cos \frac{m\pi x}{a}$$

于是可取

$$\left. \begin{aligned} \delta(x) P^{(0)} &= \frac{2}{a} \sum_m \sum_n P_n^{(0)}(z) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega_{mn}t} \\ \delta(x-a) P^{(a)} &= \frac{2}{a} \sum_m \sum_n (-1)^m P_n^{(a)}(z) \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega_{mn}t} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

把(8)、(9)两式代入(4)式,对每对 $m-n$ 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [U_{mn}(z)V_{mn}(z)Z_{mn}(z)X_{mn}(z)Y_{mn}(z)W_{mn}(z)]^T \\ = D[U_{mn}(z)V_{mn}(z)Z_{mn}(z)X_{mn}(z)Y_{mn}(z)W_{mn}(z)]^T + B_{mn}(z) \end{aligned} \quad (10)$$

式中

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_8 & 0 & -\zeta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_9 & -\eta \\ 0 & 0 & 0 & \zeta & \eta & -\rho\omega^2 \\ C_2\zeta^2 + C_6\eta^2 - \rho\omega^2 & (C_3 + C_6)\zeta\eta & C_1\zeta & 0 & 0 & 0 \\ (C_3 + C_6)\zeta\eta & C_6\zeta^2 + C_4\eta^2 - \rho\omega^2 & C_5\eta & 0 & 0 & 0 \\ -C_1\zeta & -C_5\eta & C_7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$B_{mn}(z) = \left[0 \ 0 \ 0 \ \frac{2}{a} [P_n^{(0)}(z) - (-1)^m P_n^{(a)}(z)] \ 0 \ 0 \right]^T \quad (12)$$

$$\zeta = \frac{m\pi}{a}, \quad \eta = \frac{n\pi}{b}, \quad \omega = \omega_{mn}$$

至此,除变量 z 外,其他变量已全部消除。在控制论理论中,称方程(10)为常系数非齐次状态方程。通过该方程不难证明各力学量不能是坐标 z 的多项式。然而,在一般板壳理论中,都人为地假定各力学量是某一坐标的多项式,这就导致了基本方程之间的互不相容,这也正是现行诸家板壳理论的误差根源。此类误差将随板厚的增加而剧增,从而使这些理论在求解问题的厚度方面带来极大的限制。

三、一对边固支另一对边简支叠层板的状态方程及其解

图 2(a) 所示一具有 P 层正交异性材料构成的叠层板, $x=0, a$ 两边固支, $y=0, b$ 两边简支。在局部坐标系内(图 2-b), 其第 j 层的状态方程为(10)式, 该方程的解为^[4]

$$R_j(z) = D_j(z)R_j(0) + C_j(z), \quad z \in [0, h_j] \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} R_j(z) &= [U_{mn}(z)V_{mn}(z)Z_{mn}(z)X_{mn}(z)Y_{mn}(z)W_{mn}(z)]_j^T \\ R_j(0) &= [U_{mn}(0)V_{mn}(0)Z_{mn}(0)X_{mn}(0)Y_{mn}(0)W_{mn}(0)]_j^T \\ D_j(z) &= e^{D_j \cdot z} \\ C_j(z) &= \int_0^z e^{D_j \cdot (z-\tau)} \frac{z}{a} [0 \ 0 \ 0 \ [P_n^{(0)}(\tau) - (-1)^m P_n^{(a)}(\tau)] \ 0 \ 0]_j^T d\tau \end{aligned} \quad (14)$$

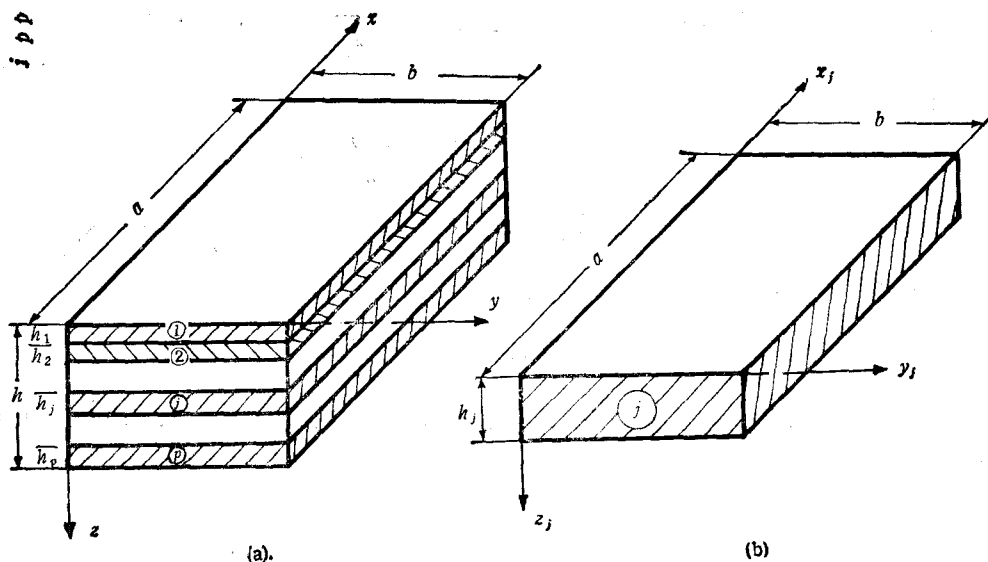


图 2 一对边固支另一对边简支的叠层板

下标 j 表示对第 j 层而言. 将 $P_n^{(0)}(z)$ 和 $P_n^{(o)}(z)$ 展成如下级数:

$$P_n^{(0)}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} E_{ln}^{(0)} \cos \frac{l\pi z}{h_j}, \quad P_n^{(o)}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} E_{ln}^{(o)} \cos \frac{l\pi z}{h_j}$$

则

$$C_j(z) = \frac{z}{a} \int_0^z e^{D_j \cdot (z-\tau)} \left[0 \ 0 \ 0 \ \sum_{l=0}^{\infty} (E_{ln}^{(0)} - (-1)^n E_{ln}^{(o)}) \cos \frac{l\pi \tau}{h_j} \ 0 \ 0 \right]_i^T d\tau \quad (15)$$

剩下的问题是计算矩阵 $e^{D_j \cdot z}$. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ 为 D_j 的特征值, 其相应的特征向量为 $V_1, V_2, \dots, V_6$, 则由线性代数知: 必存在一个矩阵 $P_j = [V_1 V_2 \dots V_6]_i$ 及其逆阵 P_j^{-1} 使 D_j 变换为对角线标准形, 且有

$$D_j(z) = e^{D_j \cdot z} = P_j \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 z} & & \\ & e^{\lambda_2 z} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_6 z} \end{bmatrix}_i P_j^{-1} \quad (16)$$

$$C_j(z) = \frac{z}{a} \int_0^z P_j \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(z-\tau)} & & \\ & e^{\lambda_2(z-\tau)} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_6(z-\tau)} \end{bmatrix}_i P_j^{-1} \times \left[0 \ 0 \ 0 \ \sum_{l=0}^{\infty} (E_{ln}^{(0)} - (-1)^n E_{ln}^{(o)}) \cos \frac{l\pi \tau}{h_j} \ 0 \ 0 \right]_i^T d\tau \quad (17)$$

在 (13) 式中令 $z = h_j$, 有

$$R_j(h_j) = D_j(h_j)R_j(0) + C_j(h_j)$$

上式对叠层板任一层均成立. 分别取 $j = 1, 2$, 有

$$R_1(h_1) = D_1(h_1)R_1(0) + C_1(h_1), \quad R_2(h_2) = D_2(h_2)R_2(0) + C_2(h_2) \quad (18)$$

注意到 (14) 式, 不难看出 (18) 式中的 $R_1(h_1)$ 和 $R_2(0)$ 分别是第一层下表面和第二层

上表面的各力学量。根据层间位移和应力的连续条件,这两组力学量应相等,于是有

$$\begin{aligned} R_2(h_2) &= D_2(h_2)[D_1(h_1)R_1(0) + C_1(h_1)] + C_2(h_2) \\ &= D_2(h_2)D_1(h_1)R_1(0) + D_2(h_2)C_1(h_1) + C_2(h_2) \end{aligned}$$

$R_1(0)$ 是第一层上表面各力学量,叫做初始值。逐层类推,可将整个叠层板上、下表面的力学量用下式联结:

$$R_p(h_p) = \Pi R_1(0) + \bar{\Pi} \quad (19)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} &= D_p(D_{p-1} \cdots D_2 C_1 + D_{p-1} \cdots D_3 C_2 + \cdots + C_{p-1}) + C_p \\ \Pi &= \prod_{i=p}^1 D_i, \quad D_i = D_i(h_i), \quad C_i = C_i(h_i), \quad (i = 1, 2, \cdots, p) \end{aligned}$$

在通常情况下,作用在板上、下表面的外力是已知的,故(19)式实际上是关于板上、下表面六个位移分量以及边界正应力的矩阵方程。 Π 为六阶方阵, $\bar{\Pi}$ 为六阶列阵。当 $q(x, y) = q = \text{const}$ 时,取(19)式中的第 3、4 和 5 三式,则可求得

$$\begin{Bmatrix} U_{mn}(0) \\ V_{mn}(0) \\ W_{mn}(0) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{36} \\ \Pi_{41} & \Pi_{42} & \Pi_{46} \\ \Pi_{51} & \Pi_{52} & \Pi_{56} \end{bmatrix}^{-1} \left(\frac{16q}{mn\pi^2} \begin{Bmatrix} \Pi_{33} \\ \Pi_{43} \\ \Pi_{53} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Pi_3 \\ \Pi_4 \\ \Pi_5 \end{Bmatrix} \right) \quad (20)$$

现在考虑边界条件。如前所述,除了条件

$$\text{在 } x = 0, a \text{ 处, } U = 0 \quad (21)$$

尚需满足外,其余边界条件已经满足。要满足(21)式,由(8)式知必须

$$\sum_m [U_{mn}(z)]_j = 0, \quad \sum_m (-1)^m [U_{mn}(z)]_j = 0, \quad (j = 1, 2, \cdots, p) \quad (22)$$

从(13)式出发,利用层间位移和应力的连续条件,仿照(19)式的推导过程,可将任一层的力学量用初始值 $R_1(0)$ 表示:

$$R_j(z) = \Pi_j(z)R_1(0) + \Pi_j(z), \quad (j = 1, 2, \cdots, P) \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_j(z) &= D_j(z) \prod_{i=j-1}^1 D_i(h_i) \\ \Pi(z) &= D_j(z)[D_{j-1}(h_{j-1}) \cdots D_2(h_2)C_1(h_1) + D_{j-1}(h_{j-1}) \cdots D_3(h_3)C_2(h_2) + \cdots \\ &\quad + C_{j-1}(h_{j-1})] + C_j(z) \end{aligned}$$

矩阵方程(23)共有六个方程,取其中第一个方程,并考虑到(20)式后,得

$$\begin{aligned} [U_{mn}(z)]_j &= [\Pi_{11}(z)\Pi_{12}(z)\Pi_{16}(z)]_j \left\{ \begin{bmatrix} \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{36} \\ \Pi_{41} & \Pi_{42} & \Pi_{46} \\ \Pi_{51} & \Pi_{52} & \Pi_{56} \end{bmatrix}^{-1} \left(\frac{16q}{mn\pi^2} \begin{Bmatrix} \Pi_{33} \\ \Pi_{43} \\ \Pi_{53} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \Pi_3 \\ \Pi_4 \\ \Pi_5 \end{Bmatrix} \right) \right\} \\ &\quad - \frac{16q}{mn\pi^2} [\Pi_{13}(z)]_j + [\Pi_1(z)]_j, \quad \left(\begin{matrix} m, n = 1, 3, 5, \cdots \\ j = 1, 2, \cdots, P \end{matrix} \right) \quad (24) \end{aligned}$$

在(17)式中的级数 $\sum_{i=0}^{\infty}$ 如果截取前 $K_j + 1$ 项,则在(24)式中分别赋给坐标 z 以 $K_j +$

1 个值, 并将 (24) 式代入 (22) 式中的第一式, 对每对 $m-n$ 便能得到关于系数 $(E_{0n}^{(0)}, E_{1n}^{(0)}, \dots, E_{Kn}^{(0)})_i$ 的 $K_i + 1$ 个线性代数方程组. 令 $i = 1, 2, \dots, P$, 总共得到 $K_1 + K_2 + \dots + K_P + P$ 个方程以定解同样数目的待定系数. 当这些系数求出后, 不难由 (20) 式求出初始值, 再用 (23) 式求出 $R_j(z)$, 最后用 (8) 和 (7) 两式计算各力学量.

需要说明的是, 在上述求解过程中, 边界条件 (22) 式中的第二个方程没有涉及, 这是因为在对称荷载作用下 $E_{1n}^{(0)} = E_{1n}^{(0)}$, (22) 式中的两个方程完全一样. 在非对称荷载作用下, $E_{1n}^{(0)} \neq E_{1n}^{(0)}$, 此时应取 $m = 1, 2, 3, \dots$, (22) 式中的两个方程各自独立, 必须同时用来定解 $E_{1n}^{(0)}$ 和 $E_{1n}^{(0)}$.

在分析自然频率时, 因 $q = 0$, 将 (24) 式代入 (22) 式, 对每对 $m-n$ 得

$$[\Pi_{11}(z)\Pi_{12}(z)\Pi_{16}(z)] \begin{bmatrix} \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{36} \\ \Pi_{41} & \Pi_{42} & \Pi_{46} \\ \Pi_{51} & \Pi_{52} & \Pi_{56} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \Pi_3 \\ \Pi_4 \\ \Pi_5 \end{Bmatrix}_i - [\Pi_1(z)]_i = 0 \quad (25)$$

对于对称振型 $(m, n = 1, 3, 5, \dots)$, $E_{1n}^{(0)} = E_{1n}^{(0)}$, 而对反对称振型 $(m, n = 2, 4, 6, \dots)$, $E_{1n}^{(0)} = -E_{1n}^{(0)}$. 所以, (22) 式中的两个方程只有一个是独立的. 按上述原则对 (25) 式中的 z 赋值, 于是得到关于未知量 $E_{0n}^{(0)}$ 的 $K_1 + K_2 + \dots + K_P + P$ 个线性齐次代数方程. 令其系数行列式等于零, 即得频率方程. 此为超越方程, 对应无穷多个零点 (频率), 可用求任一函数零点的已有程序求出这些零点. 可见, 用本文方法求得的频谱比常规方法宽得多.

应该指出的是, 级数 $\sum_{i=0}^{\infty}$ 截取有限项, 因而在边界上沿 z 方向只有有限点得到固定, 会带来一定的误差, 但这种计算中的误差是可控的. 通过计算若发现当截取 $K_i + 1$ 项和 $K_i + 2$ 项时, 要求保留的有效数字几乎不变, 则可认为截取 $K_i + 1$ 项而得到的数值结果是在满足精度要求意义下的精确解. 迄今为止, 作者尚未发现有任何一家理论或任何一种方法能将整个边界固定.

求临界力问题和求自振频率完全类似. 若以 $(P_y)_{i\beta^2}$ 代替 ξ^2 , 或以 $(P_y)_{i\eta^2}$ 代替矩阵 (11) 中的 $\rho\omega^2$, 则对每对 $m-n$, 由方程 (25) 可求出无穷多个临界应力, 而有实际意义的是最小临界应力.

需要说明的是, 在稳定分析中, 我们总是假定在边界压力 $(P_y)_i$ 未达到临界值前, 板处于均匀应变状态. 这意味着作用在每层边界上的 $(P_y)_i$ 是按刚度大小沿厚度方向逐段均布的.

四、数值结果

下面给出的算例, 是用四倍精度在计算机 SIEMENS/7570C 上完成的. 数表中的 I_1, I_2 和 I_3 分别表示在 $x = 0, a$ 处第一, 第二和第三层沿 z 方向上的固定点数.

算例 一个三层板 (图 2, $P = 3$) 的上表面受均布压应力 q 作用, 第一和第三层材料相同, 每层均有如下的弹性常数:

$$\begin{aligned} C_{12}/C_{11} &= 0.246269, & C_{13}/C_{11} &= 0.0831715, & C_{22}/C_{11} &= 0.543103, \\ C_{23}/C_{11} &= 0.115017, & C_{33}/C_{11} &= 0.530172, & C_{44}/C_{11} &= 0.266810, \end{aligned}$$

$$C_{55}/C_{11} = 0.159914, C_{66}/C_{11} = 0.262931, C_{11}^{(1)}/C_{11}^{(2)} = 5$$

$C_{11}^{(1)}$ 和 $C_{11}^{(2)}$ 分别表示第一和第二层材料的 C_{11} 值。几何参数是 $a = b$, $h_1 = h_3 = 0.1h$, $h_2 = 0.8h$

表1 沿 Z 方向设置不同固定点数的强厚度三层板的应力和挠度

$\frac{C_{11}^{(1)}}{C_{11}^{(2)}}$	h/a	$I_1 \quad I_2 \quad I_3$	$x = a/2, y = b/2, z = 0$			$x=0, y=b/2, z=0$
			$\frac{WC_{11}^{(2)}}{qh}$	$\frac{\sigma_x}{q}$	$\frac{\sigma_y}{q}$	$\frac{\sigma_x}{q}$
5	0.8	4 12 4	1.08306	-2.12711	-1.75864	14.32289
		5 12 5	1.08340	-2.13453	-1.75925	15.38627
		5 14 5	1.08361	-2.13166	-1.75982	15.39011
		5 16 5	1.08370	-2.13159	-1.75991	15.39105

表2 不同厚宽比的三层板的应力和挠度

h/a	0.4		0.6	
	$I_1 = I_3 = 3, I_2 = 10$ 本文解	SAP84	$I_1 = I_3 = 4, I_2 = 12$ 本文解	SAP84
$\frac{WC_{11}^{(2)}}{qh}, (x = a/2, y = b/2, z = 0)$	3.54543	3.46673	1.65564	1.61018
$\sigma_x/q, (x = a/2, y = b/2)$				
上层上表面	-3.13192	-3.091	-2.16365	-2.085
上层下表面	-0.88352	-0.9052	-0.04659	-0.0575
中层上表面	-0.29686	-0.2822	-0.13072	-0.1002
中层下表面	0.14006	0.1340	-0.01821	-0.05081
下层上表面	0.73438	0.8273	-0.05129	-0.0428
下层下表面	2.90865	2.927	1.44588	1.483
$\sigma_y/q, (x = 0, y = b/2)$				
上层上表面	22.78836	8.008	17.27982	6.367
上层下表面	-11.83726	-3.082	-9.53393	-3.507
中层上表面	-2.36745	-0.6164	-1.90679	-0.7013
中层下表面	1.25856	0.4118	0.64786	0.295
下层上表面	6.29282	2.059	3.23928	1.475
下层下表面	-11.50182	-5.282	-4.75696	-2.277
$\sigma_z/q, (x = a/2, y = b/2)$				
上层上表面	-3.30321	-3.336	-2.06347	-2.024
上层下表面	-1.94347	-1.894	-0.85095	-0.7851
中层上表面	-0.55486	-0.5188	-0.33808	-0.2940
中层下表面	0.40495	0.3800	0.15250	0.1156
下层上表面	2.07187	2.118	0.81749	0.8703
下层下表面	3.43674	3.518	1.75033	1.864
$\tau_{xz}/q, (x = 0, y = b/2)$				
上层下表面	1.25779	3.995	0.96560	2.793
中层上表面	1.25779	0.799	0.96560	0.5586
中层下表面	0.64325	0.4476	0.30365	0.1776
下层上表面	0.64325	2.238	0.30365	0.8882

静力结果见表 1 和表 2, 对应的级数取项为 $m=1, 3, 5, \dots, 199$ 和 $n=1, 3, 5, \dots, 29$. 在此情况下, 各力学量基本收敛. 从表 1 可见, 若取相应于 $I_1 = I_3 = 5$, $I_2 = 14$ 作为本问题的解, 误差极小. 在表 2 中还列出了用 SAP84 给出的有限元解, 采用的是 16 节点 16 个三维块体等参元(对 1/4 板). 将本文提供的精确解与有限元解相比, 除边界力相差较大外, 内部各点力学量的误差均较小. 众所周知, 有限元解的弱点之一是边界应力很难算准. 我们曾试算过, 当网格划分更密, 从而边界上固定点数增多时, 边界应力的最大值逐渐增加. 本文解在边界上沿 y 方向是全部固定的, 所以得出的边界应力最大值和 SAP84 解相差较大. 此外, 从表 2 可看出, SAP84 解得的边界应力 τ_{xx} 在层间不满足连续条件.

当 $m = n = 1$ 时, 前三个频率和临界应力示于表 3 中, ρ_1 和 ρ_2 分别是第一和第二层的材料密度. 相应的 SAP84 解采用的单元和静力问题相同.

表 3 不同厚宽比的三层板的前三个频率参数 Ω 和临界应力参数 λ

h/a	SAP84 Ω_1	本 文 解								
		I_1	I_2	I_3	Ω_1	Ω_2	Ω_3	λ_1	λ_2	λ_3
0.1	0.08572	2	8	2	0.14599	0.31460	1.27343	0.12866	0.27757	1.05836
0.2	0.22305	2	8	2	0.30804	0.62771	1.40851	0.27114	0.55466	1.17208
0.4	0.56893	3	10	3	0.67938	1.23776	1.80702	0.59685	1.10183	1.49802

$$\frac{C_{11}^{(1)}}{C_{11}^{(2)}} = 5, \frac{\rho_1}{\rho_2} = 3, \Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho_2}{C_{11}^{(2)}}}, \lambda = \frac{\pi h}{b} \sqrt{\frac{P_{ycr}}{C_{11}}}, \left(\frac{P_{ycr}}{C_{11}}\right)_j = \text{const}, j = 1, 2, 3, P_{ycr} \text{——临界应力}$$

五、结 束 语

本文为具有固支边的薄的、中等厚度的以及强厚度的叠层矩形板提供了统一的精确解析解. 具有精度高、物理概念清晰等特点. 克服了常规解析法中基本方程之间互不相容等缺点. 和数值法相比, 精度高, 尤其是边界应力.

参 考 文 献

- [1] Fan Jiarang (范家让), Ye Jianqiao (叶建乔). Int J Solids Structures, 1990, 26: 773—778
- [2] Fan Jiarang (范家让), Ye Jianqiao (叶建乔). Int J Solids Structures, 1990, 26: 655—662
- [3] Srinivas S et al. Int J Solids Structures, 1970, 6: 1463—1481
- [4] 尤昌德. 线性系统理论基础. 电子工业出版社, 1985

EXACT SOLUTION FOR THICK LAMINATE WITH CLAMPED EDGES

Fan Jiarang Sheng Hongyu

(*Hefei University of Technology, Hefei 230009, China*)

Abstract Giving up any assumptions about displacement models and stress distribution, based on the Refs. [1] and [2] and introducing δ -function, the state equation is established for thick laminate with clamped edges under any given loads. The exact solutions are presented for the statics, dynamics and buckling. All equations of elasticity can be satisfied, and all elastic constants can be taken into account.

Key words thick laminate, state equation, δ -function, exact solution