

一种复合材料的大挠度曲梁单元

王寿梅 韩耀新 周潮

(北京航空航天大学100083,北京)

提要 本文研究了加劲壳的非线性有限元分析方法,提出了一种梁元素来模拟加筋。该元素具有曲轴线,任意形状的薄壁剖面和任意铺层方式,与三维退化曲壳元素完全协调,相对于壳中面可以有偏心。所分析的结构可以是层合复合材料加劲壳或各向同性材料单层加劲壳。

关键词 梁壁曲梁,加劲壳,复合材料

主要符号表

ϵ ——位形; t ——时间; x ——坐标; u ——位移; ρ ——密度; v ——体积; p ——单位密度所对应的体力; e ——线性应变成分; ϵ ——Green-Lagrange 应变; σ ——Cauchy-Euler 应力; S ——第二类 Piola-Kirchhoff 应力; $\delta(\)$ ——变分记号; D_{ijr} ——材料刚度张量; $\|(\)\|$ ——取单位矢量; W ——外力功; $\Delta(\)$ ——从时间 t 到 $t + \Delta t$ 的增量; $(\)$ ——参考位形标记; $(\)$ ——向量记号; $(\)^T$ ——矩阵转置; $(\)(\)$ ——时间 t 的量; $(\)$ ——结点位移; $(\)'$ ——时间导数; $(\)$ ——矩阵记号; $(\)_{i,j} = \partial(\)/\partial x_j$

1. 前言

壳元和梁元是构成加劲壳有限元模型的两个基本单元,其有限元列式有两种不同途径:一是基于传统的梁与壳理论,一是作为退化的三维连续体。前者对于非线性分析来说不很合适,因为在列式中总要引进若干误差,而且难以做到沿壳与梁的连线上完全协调。

关于退化三维壳单元,已经有众多的文献,例如文献^[4-7]。我们在计算中引用了[4]和[5]的成果。和对壳单元的研究相比,对加筋梁单元的研究看来并不充分。有许多研究基于经典梁理论,未曾计及与壳元的协调要求。例如,在线性分析方面:文献[8]研究了复合材料矩形剖面直梁。文[9]~[11]研究了各向同性曲梁。文[12]研究了复合材料矩形剖面常曲率梁。在非线形分析方面,文[13]~[16]讨论了各向同性材料的梁单元,其中文[16]计及了工字形剖面的翘曲。文[17]和[18]研究了复合材料,其中文[17]只限于矩形剖面平面曲梁,文[18]则计及薄壁剖面的翘曲,但为此在横剖面上采用了许多结点和自由度。

在加劲壳分析中,有许多工作致力于旋转加劲壳或甚至是圆柱加劲壳的线性计

本文于1991年5月30日收到,1991年9月10日收到修改稿。

算^[19-22],而文[23]则研究了几何非线性的各向同性圆柱壳。文[24]讨论了各向同性材料组合剖面曲梁的线性静力和线性稳定性分析,该梁是退化的三维体,能与双曲壳协调。文[25]研究了任意形状双曲加劲壳的非线性分析,并用于复合材料,其壳和梁都是退化的三维体,但它的加筋仅限于矩形剖面。

对于工程实际应用来说,作者认为加劲壳的分析应当包括以下的特征:(1)任意双曲壳和与之适配的曲梁;(2)各向同性或复合材料;(3)不同形状的薄壁剖面;(4)计及几何非线性,甚至材料非线性;(5)包括剪切效应。从作者所作的文献调查来看,这方面的研究看来还未被注意过。Liao 和 Reddy 的文章^[25]是公开发表的最新研究成果,该文指出:“从文献评述看来,层合各向异性加劲壳及壳型结构的非线性分析看来还没有得到应有的注意。特别是,文献中尚未发现使用退化三维壳元及相关联的曲梁元作复材加劲壳的分析。”而这正是本项研究的内容。为了达到这一目标,关键在于发展一种完善的曲梁单元,这是我们三年前就着手研究的课题^[26]。

2. 变分原理及有限元离散化

求解非线性问题通常用增量法,由变分原理可得^[5]:

$$\int_{\bar{v}} \bar{D}_{ijrs}(t) \Delta e_{rs} \delta \Delta e_{ij} d\bar{v} + \int_{\bar{v}} S_{ij}(t) \delta \Delta \eta_{ij} d\bar{v} - \delta W - \int_{\bar{v}} S_{ij}(t) \delta \Delta e_{ij} d\bar{v} \quad (1)$$

(1)式左端之第二项的被积函数可改用位移梯度表示之

$$S_{ij}(t) \delta \Delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} S_{ij}(t) \delta (\Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j}) = \delta \Delta u_{k,i} S_{ij}(t) \Delta u_{k,i}$$

故

$$\int_{\bar{v}} \bar{D}_{ijrs}(t) \Delta e_{rs} \delta \Delta e_{ij} d\bar{v} + \int_{\bar{v}} \delta \Delta u_{k,i} S_{ij}(t) \Delta u_{k,i} d\bar{v} - \delta W - \int_{\bar{v}} S_{ij}(t) \delta \Delta e_{ij} d\bar{v}$$

写成矩阵形式:

$$\int_{\bar{v}} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \bar{\mathbf{D}}(t) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} d\bar{v} + \int_{\bar{v}} \delta \Delta \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{S}}(t) \Delta \mathbf{u} d\bar{v} - \delta W - \int_{\bar{v}} \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{S}(t) d\bar{v}$$

其中 $\Delta \mathbf{u}$ 是 $\Delta u_{i,j}$ 的向量式,其余见文[5]。

离散化后,则有

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(t) \Delta \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{R} - \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{K}(t) &= \int_{\bar{v}} \mathbf{B}^T (\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{D}}(t) \mathbf{T} + \hat{\mathbf{S}}(t)) \mathbf{B} d\bar{v} \\ \mathbf{F}(t) &= \int_{\bar{v}} \mathbf{B}^T \mathbf{T}^T \mathbf{S}(t) d\bar{v} \end{aligned}$$

$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{B} \Delta \hat{\mathbf{u}}$; $\Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{B} \Delta \hat{\mathbf{u}}(t)$; $\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T} \Delta \mathbf{u}$, \mathbf{R} 为时间 $t + \Delta t$ 的等效结点外载

3. 曲梁单元

(1) 曲梁单元的几何描述

1) 梁的轴线 通过梁轴上若干结点, 可用插值曲线逼近它的轴线, 如下式所示:

$$\bar{x}_i = L_n(\xi)x_i^n \quad i = 1, 2, 3$$

其中 x_i 为总体坐标, L 是一维插值形函数, n 为结点号, $n = 1, 2, \dots, m$. ξ 是自然坐标. 显然, 轴上一点的切线单位向量可用上式对 ξ 微分求得.

2) 梁的横剖面 横剖面的方位用一对正交单位向量来表示. 在结点处, 它们记为 \mathbf{j}_1^i 和 \mathbf{j}_2^i . 在梁轴的其它点处, 可以用插值公式

$$\mathbf{j}_l = L_n(\xi)\mathbf{j}_l^n \quad l = 1, 2$$

我们把 $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$ 和 \mathbf{j}_3 构成的坐标系称为切面坐标系, 并在 \mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2 坐标面内定义横剖面上的一点, 把坐标记为 y_1 和 y_2 . 该坐标系的原点认为在加劲壳的中面上, 因而允许梁剖面有偏心. 绝大多数薄壁剖面可以看成是若干狭长矩形的组合体, 对于每一个子矩形有:

$$y_1 = \bar{y}_1 + \frac{1}{2} b \eta_1 \sin \theta + \frac{1}{2} h \eta_2 \cos \theta$$

$$y_2 = \bar{y}_2 - \frac{1}{2} b \eta_1 \cos \theta + \frac{1}{2} h \eta_2 \sin \theta$$

其中 \bar{y}_1 和 \bar{y}_2 是子矩形中心点的偏心, h 和 b 分别代表长边和短边, θ 是其长边对 i_1 轴的倾角, η_1 和 η_2 是自然坐标. 曲线周界的薄壁剖面可以用许多子矩形来近似地代表.

用这种方式定义的剖面, 甚至允许有初始扭转和锥度. 此时, 先在结点处的剖面上定义不同的坐标轴和不同的子矩形

$$y_l^n = y_l^n(\bar{y}_1^n, \bar{y}_2^n, b^n, h^n, \theta^n) \quad l = 1, 2$$

然后沿“母线”方向作插值, 以形成“梁壁曲面.”“母线”指梁壁上具有相同 η_1 和 η_2 的点的轨迹.

注意这是切面坐标系里的值, 它们以梁轴为原点, 且分别沿着 i_1 和 i_2 的方向.

3) 梁上任一点的总体坐标 将 y_l 换算到总体坐标并与 \bar{x}_i 相加

$$x_i = \bar{x}_i + \bar{x}_i = L_n(\xi) \left(x_i^n + \sum_{l=1}^2 y_l j_l^n \right) = N_n^T d_i^n$$

$$N_n = L_n(\xi) [1, y_1, y_2]^T \quad j_l^n = [x_i^n j_l^n j_{2i}^n]^T$$

任一点的坐标向量是

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T = N_n^T d^n$$

$$N_n = L_n(\xi) [1, y_1, y_2, I_3]$$

$$d^n = [x_i^n j_l^n]^T, \quad j_l^n \text{ 是向量 } \mathbf{j}_l \text{ 的列阵表示.}$$

4) 局部坐标系 沿母线切线方向上的单位向量是 $\mathbf{K}_1 = \|\mathbf{x}_{i, \xi}\|$. 把横剖面周线的切线单位向量记为 \mathbf{K}_2 , 则 \mathbf{K}_1 和 \mathbf{K}_2 构成了梁壁表面的切平面. 其法线 \mathbf{K}_3 可从其向量积获得. 注意 \mathbf{K}_1 与 \mathbf{K}_2 可能不垂直, 为得到正交坐标系可用 $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_3 \times \mathbf{K}_1$.

(2) 位移形状函数 把变形前、后梁上任一点的坐标记为

$$\mathbf{x}_i(t) = N_n^T d_i^n(t); \quad \mathbf{x}_i(t + \Delta t) = N_n^T d_i^n(t + \Delta t)$$

由上式相减得位移

$$\Delta u = N_n \Delta \hat{u}^n$$

$$N_n = N_n^T T^n = L_n(\xi) [I_3 y_1 \dot{I}_n^T(\xi) + y_2 \dot{I}_n^T(\xi)]$$

其中

$$\dot{I}_n^T(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & \text{反对称} \\ -j_{13}^n(\xi) & 0 \\ j_{12}^n(\xi) & -j_{11}^n(\xi) & 0 \end{bmatrix}$$

$\Delta \hat{u}^n$ 是结点平移与转动自由度。

(3) 应变和应力 根据熟知的公式可写出在局部坐标轴内的应变表达式。对薄壁剖面, 可认为材料处于平面应力状态, 同时又认为 ϵ_{22} 的大小由剖面在横向自由伸缩决定, 即 $\sigma_{22} = 0$, 则

$$\sigma = \left(D_{11} - \frac{D_{21}D_{12}}{D_{22}} \right) \epsilon_{11} + \left(D_{13} - \frac{D_{23}D_{12}}{D_{22}} \right) \gamma_{12}$$

$$\tau = \left(D_{31} - \frac{D_{21}D_{32}}{D_{22}} \right) \epsilon_{11} + \left(D_{33} - \frac{D_{23}D_{32}}{D_{22}} \right) \gamma_{12}$$

4. 数值例题

(1) 矩形空心截面悬臂梁, 梁的每边均为复合材料层合板。每边的铺层方案允许不同。各铺层和梁的尺寸见图 1。在梁的端部受一集中垂直载荷 1780N。材料常数为 $E_f = 0.147\text{MPa}$, $E_r = 0.011\text{MPa}$, $\nu_{fr} = 0.28$, $G_{fr} = 0.00621\text{MPa}$ 。梁的端部垂直位移-铺设角 θ 图及文献[18]的解见图 2。

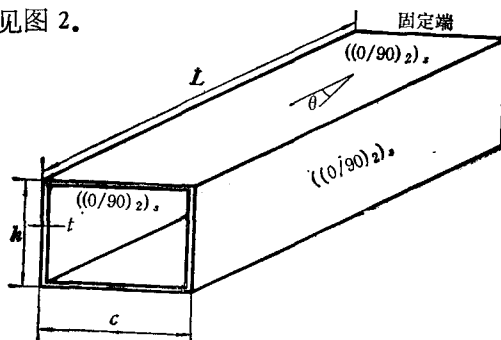


图1 悬臂盒式梁

$$L = 2540\text{mm} \quad h = 50\text{mm} \quad c = 100\text{mm} \quad t = 2.5\text{mm}$$

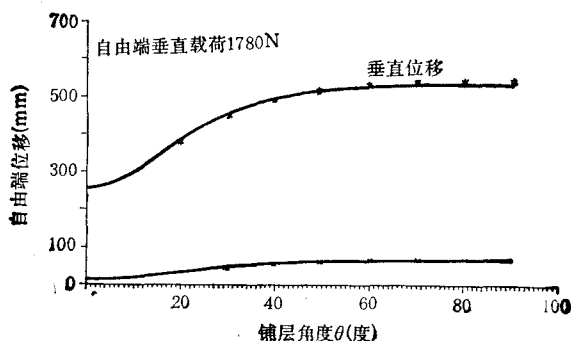


图2 复合材料盒式悬臂梁

— 本文分析 *A. D. Stemple, S. W. Lee^[18]

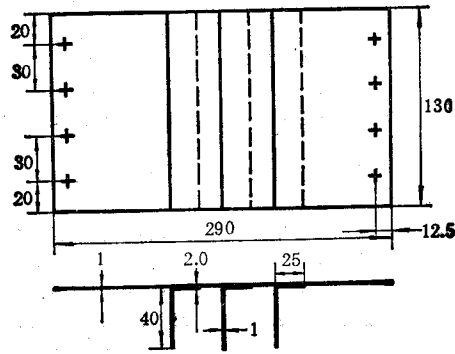


图 3 加筋板的几何尺寸

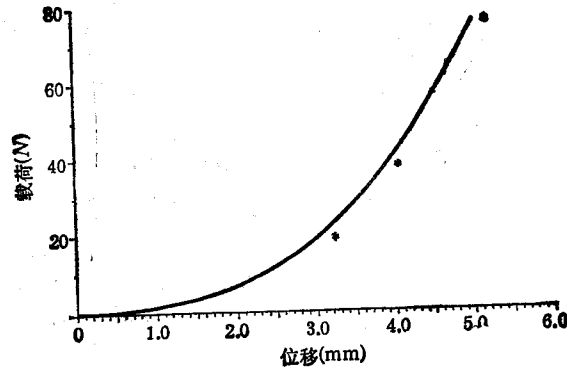


图 4 加筋板的载荷-位移曲线

—本文分析 *实验结果

(2) 复材加劲板的大变形分析(图 3)。板尺寸为 $290 \times 130 \times 1 \text{mm}^3$, 铺层 ($\pm 45^\circ/0^\circ/90^\circ$), 各层厚度相同。角形加筋铺层 ($\pm 45^\circ/\pm 45^\circ$), 上缘宽 25mm, 厚 1mm, 侧缘高 40mm, 厚 1mm。各层厚度相同。三根加筋位于中央和距短边 100mm 处。在距短边 12.5mm 处用螺栓固定, 长边则自由。在中间加筋上距边缘各为 20mm 的范围内施加四个等间距的集中力, 各为 196N。分析结果与实验测量的对比见图 4。

参 考 文 献

- [1] Ahmad, S, Irons B M and Zienkiewicz O C. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* (1970), 2: 419—451.
- [2] Ramm E. A plate/shell element for large deflections and rotations. In *Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis* (Edited by Bathe K J Oden J T and Wunderlich W). M. I. T. Press, Cambridge, MA(1977).
- [3] Krakeland B. Large displacement analysis of shell considering elastic-plastic and elasto-viscoplastic materials. Report No. 776, The Norwegian Inst. of Tech. Norway (1977).
- [4] Chang T Y and Sawamiphakdi K. *Comput. Struct.* (1981); 13: 331—340.
- [5] Bathe K J *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ(1982).
- [6] Bathe K J and Bolourichi S. *Comput. Struct.* (1980), 11: 23—48.
- [7] Chao W C and Reddy J N. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* (1984), 20: 1991—2007.

- [8] Yuan F G and Miller R E. *Comput. Struct.* (1989), 31: 757—745.
- [9] Hsu Y T, Fu C C and Schelling D R. *Comput. Struct.* (1990), 34: 313—318.
- [10] Palaninathan R and Chandrasekharan P S. *Comput. Struct.* (1985), 21: 663—669.
- [11] Benedetti A and Tralli A. *Comput. Struct.* (1989), 33: 1437—1449.
- [12] Bhimaraddi A, Carr A J and Moss P J. *Comput. Struct.* (1989), 31: 309—318.
- [13] Sandhu T S. et. al., *Comput. Struct.* (1990), 35: 66—79.
- [14] Crisfield M A. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* (1990), 81: 131—150.
- [15] Hsiao, et. al., *Comput. Struct.* (1987), 26: 693—701.
- [16] Canei A and Gattass M., *Int. J. Numer. Meth. Engng.* (1990), 30: 207—231.
- [17] Karamamidis, D. *Comput. Struct.* (1988), 29: 623—632.
- [18] Stemple A D and Lee S W. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* (1989), 28: 2143—2160.
- [19] Kohnke P C and Schnobrich W C. *J. Struct. Div. ASCE.* (1972), 98: 1483—1510.
- [20] Venkatesh A and Rao K P. *Comput. Struct.* (1985), 20: 669—682.
- [21] Venkatesh A and Rao K P. *Comput. Struct.* (1980), 12: 825—832.
- [22] Bhimaraddi, A. Carr A J and Moss P J. *Comput. Struct.* (1989), 33: 295—306.
- [23] Ji Z and Teh K. *Comput. Struct.* (1990), 34: 585—592.
- [24] Ferguson G H and Clark R H. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* (1979), 14: 581—592.
- [25] Liao C L and Reddy, J N. *Comput. Struct.* (1990), 34: 805—815.
- [26] 王寿梅, 韩耀新、初扭转剖面空心薄壁层合曲梁单元. 北京航空航天大学科学研究报告, BH-B 3547(1989).

A CURVED STIFFENER BEAM ELEMENT FOR LARGE DEFL- ECTION ANALYSIS OF COMPOSITE SHELLS

Wang Shoumei, Han Yaixin and Zhou Chao

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

Abstract The paper studies nonlinear F. E. analysis of stiffened shells, presenting a beam element to simulate the stiffeners. The beam element has curved axis, thin-walled cross section with arbitrary shape and arbitrary layup, and is fully compatible with the shell element. Eccentricity is also accounted for. The material may be isotropic or composites.

Key words Curved thin-walled beam, Stiffened shell, Composite