

动态测试与边界元法相结合的 模态振型参数识别¹⁾

朱继梅 相小宁

(上海机械学院, 200093, 上海)

摘要 试验模态分析中,要获得完整的模态振型,需要在所有自由度方向都进行测量。为了减少测点数以及为了补足某些无法测量的自由度,本文提出用边界元法的解析关系来扩展动态测试的数据。这样,在进行试验模态分析时,就可以减少测点,增加数据平滑性,并且提高数据精度。经过仿真及实例,验证了方法的可行性。

关键词 试验模态分析、边界元法、振型参数识别

一、引言

近二十年来,振动系统试验模态分析技术获得了很大的进展。对于一般的结构,利用激振信号和响应信号,可以在频域或时域里进行数据处理而获得结构的各阶模态参数。通常,模态固有频率的识别往往可以达到足够高的精度,但是对于模态的振型参数则很难保持高精度,特别是对于高阶模态更其如此。而且,对于有 n 个自由度的结构离散模型,要获得其完整的模态振型,需要获知其 n 个有关的传递函数,也即需要有 n 个测点。这对于自由度数较多的复杂结构,往往不易做到,而且有些自由度方向的响应是极难测量的。尤其是转角自由度,即使对于一块形状规则的平板而言,也是无法直接测量的。故而测量得到的模态振型通常是不完整的。这对于某些需要利用模态振型的信息来进行分析或综合的问题来说,就显得不足了。例如利用试验获得的结构模态振型来进行结构的动力修改或对修改后引起的影响的预估,则模态振型的精度和完备性就直接影响到预估的结果。为了获得完整的振型,有些文献提出了将实测振型中缺少的自由度上的振型值补足的方法,例如用附加质量测试^[1]、局部插值^{[2],[3]}、总体插值^{[4],[5]}等等。其实,各个自由度上的响应都是受结构总体的动力特性的制约的,如果将测量与解析结合起来,在了解各自由度上响应的解析关系的基础上,就可以用少数测点上的测量响应值扩充到全体自由度上,从而大大减少测试的工作量,并且不必用人为假设的插值就可补充不易测量的测点响应值,大大提高振型的测试精度。这种测试与解析相结合的方法,相信是有潜力的和有发展前景的。

边界元法是近二十年来取得很大进展的一种数值计算方法。边界元法利用格林公式将区域内的问题转化成边界积分方程。离散边界积分方程就将区域内部各点的运动参数与边界上离散节点的运动参数联系了起来。如果在进行试验模态分析时,测得一部分内

¹⁾ 国家自然科学基金资助项目。

本文于1991年4月22日收到第一稿,于1991年10月15日收到修改稿。

部点的响应,就可以利用边界积分方程配点,经过边界响应参数的传递实现区域内部的自由度扩展,从而用不完整的内部测点而获得较高精度的完整的模态振型数据。

边界元法在结构动力学问题上的实施,经常受到动力问题边界积分方程中函数形式的基本解不易求得的困扰。为此,本文作者在文献[6]至[8]中提出了用多种形式的正交级数解作为近似基本解以求解板类结构的动力问题,获得了较好的结果。加上边界元法使问题的维数降低、计算工作量减少、输入数据少、程序简便、在微机上就能实现等等优点,因而便于与测试结合起来。

本文中,作者将动态测试与边界元法结合以进行试验模态分析。由于着重于方法上的探讨,本文仍以结构较简单的平板作为研究对象,包括各向同性板及各向异性板。

二、原理与方法

为更普遍一点起见,列出正交各向异性板动力问题的控制方程

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (1)$$

其中 D_1, D_2, D_3 为板的刚度系数, $\bar{m}$ 为板的质量面密度, $w(x, y, t)$ 为板的横向动力响应, $f(x, y, t)$ 为激振载荷。对于简谐激励 $f = F(x, y)e^{i\omega t}$, 有响应 $w = W(x, y)e^{i\omega t}$, 其中 ω 为激振频率。此时,控制方程可简化为:

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \bar{m}\omega^2 W = F \quad (2)$$

以基本解 W^* 作为权函数乘方程两边,然后对全域积分,再应用格林公式将区域积分变换到边界积分,即可得到如下形式的边界积分方程^[6]:

$$\begin{aligned} C_i W(x_i, y_i) = & \int_{\Omega} F W^* d\Omega + \oint_{\Gamma} \left[R_n(W) W^* - M_n(W) \frac{\partial W^*}{\partial n} \right. \\ & \left. + \frac{\partial W}{\partial n} M_n(W^*) - W R_n(W^*) \right] d\Gamma \\ & + \sum_{j=1}^k \Delta_j M_r(W^*) W_j - \sum_{j=1}^k \Delta_j M_r(W) W_j^* \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$C_i = \begin{cases} 1 & \forall (x_i, y_i) \in \Omega \\ \theta_i/2\pi & \forall (x_i, y_i) \in \Gamma \\ 0 & \forall (x_i, y_i) \notin \Omega \text{ 及 } \Gamma \end{cases}$$

Ω 为板的积分域, Γ 为板的边界, $M_n(\)$ 、 $M_r(\)$ 、 $R_n(\)$ 分别为对应于法向弯矩、扭矩、等效剪力的微分算子, $\Delta M_r(\)$ 为角点上扭矩之跳跃值, θ 为边界点两切线的夹角。将边界 Γ 划分成 n 个边界元,并采用最简单的常数直线单元,以各单元的中点作为单元的节点,则离散化的边界积分方程为:

$$C_i W(x_i, y_i) = \int_{\Omega} F W^* d\Omega + \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)_j \int_{\Gamma_{ij}} M_n(W^*) d\Gamma + (R_n(W))_j \int_{\Gamma_{ij}} W^* d\Gamma \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^{n_e} \left[(M_n(W))_k \int_{\Gamma_{ek}} \left(-\frac{\partial W^*}{\partial n} \right) d\Gamma + (R_n(W))_k \int_{\Gamma_{ek}} W^* d\Gamma \right] \\
& + \sum_{i=1}^{n_f} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)_i \int_{\Gamma_{fi}} M_n(W^*) d\Gamma + W_i \int_{\Gamma_{fi}} (-R_n(W^*)) d\Gamma \right] \\
& + \sum_{i=1}^k \Delta_i M_r(W^*) W_i - \sum_{i=1}^k \Delta_i M_r(W) W_i^* \quad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_i W_{,n_0}(x_i, y_i) = & \int_{\Omega} F W_{,n_0}^* d\Omega + \sum_{i=1}^{n_e} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)_i \cdot \int_{\Gamma_{ei}} M_{n,n_0}(W^*) d\Gamma + (R_n(W))_i \right. \\
& \cdot \left. \int_{\Gamma_{ei}} W_{,n_0}^* d\Gamma \right] \\
& + \sum_{k=1}^{n_e} \left[(M_n(W))_k \cdot \int_{\Gamma_{ek}} \left(-\frac{\partial W^*}{\partial n} \right)_{,n_0} d\Gamma + (R_n(W))_k \cdot \int_{\Gamma_{ek}} W_{,n_0}^* d\Gamma \right] \\
& + \sum_{i=1}^{n_f} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial n} \right)_i \cdot \int_{\Gamma_{fi}} M_{n,n_0}(W^*) d\Gamma + W_i \cdot \int_{\Gamma_{fi}} (-R_{n,n_0}(W^*)) d\Gamma \right] \\
& + \sum_{i=1}^k \Delta_i M_{r,n_0}(W^*) \cdot W_i - \sum_{i=1}^k \Delta_i M_r(W) \cdot W_{,n_0}^* \quad (5)
\end{aligned}$$

其中 Γ_{ei} 、 Γ_{ek} 、 Γ_{fi} 分别表示简支、固支、自由的边界段, n_e 、 n_s 、 n_f 分别表示在这些边界上的单元数, 单元总数为 $n = n_e + n_s + n_f$, 下标, n_0 表示对 n_0 方向的坐标的偏导。

式(4)及式(5)将区域内点 (x_i, y_i) 的梯度响应 W 及转角响应 $W_{,n_0}$ 与边界上各节点的变量 (即 $W, \frac{\partial W}{\partial n}, M_n(W), R_n(W)$) 联系起来。对于齐次线性的边界条件, 每一边界节点上有 2 个未知变量, n 个单元就有 $2n$ 个变量, 再加上 k 个角点所对应的未知变量 $\Delta M_r(W)$, 边界未知量共 $(2n + k)$ 个。在一般情况下, 角点影响并不很大, 也可以略去不计, 则边界未知量为 $2n$ 个。如果我们在区域内部测量得 $(2n + k)$ 个响应值 (挠度或转角响应都是可以的, 但通常是测取 $(2n + k)$ 个挠度), 则利用式(4)就可以解出在 ω 频率下的全部边界未知量。而一旦边界未知量全部知道之后, 就不难再利用式(4)及式(5)定出区域内任意点的挠度和转角响应。这样在识别模态振型时, 测取部分点的频响函数, 就可以依次扩展到全部自由度上。

式(4)及式(5)中的基本解 W^* 很难找到函数形式的封闭解, 可按作者在文献[6]中所提出的用级数形式的近似基本解来代替

$$W^*(x, y) = \sum_{m=0}^P \sum_{n=0}^Q C_{mn} T_m(x) T_n(y)$$

其中 $T_m(x)$, $T_n(y)$ 可以是三角函数, Hermite 正交多项式函数、Tchebychev 正交多项式函数或者加权的三角函数等等。也可以是相近问题的理论基本解叠加上修正用的级数项。级数项数 $P \times Q$ 根据具体情况选定。

三、数值仿真与实例

数值仿真算例

作者曾对各向同性简支方板、各向异性矩形板、各向异性 L 形板及 U 形板等作过仿真识别。以仿真的测量值来扩展其他自由度方向的响应值, 获得较好的效果。为简明地说明方法的可行性, 以下仅列出各向同性简支方板的仿真结果。

简支方板的几何尺寸为 $200 \times 200 \times 1\text{cm}^3$, 弹性模量 $E = 9.408 \times 10^9 \text{N/cm}$, 剪切弹性模量

$$G = 1.509 \times 10^9 \text{N/cm},$$

泊松比 $\mu = 0.30$, 质量面密度

$$\bar{m} = 7.8 \times 10^{-3} \text{kg/cm}^2.$$

板中心 O 点作用有集中载荷 $F = 980 \text{N}$, 激振频率 $\omega = 124 \text{rad/s}$

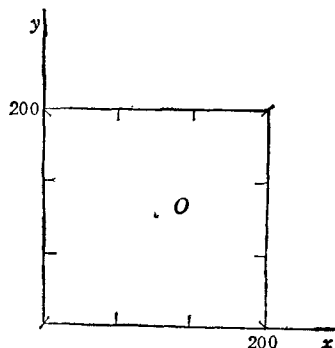


图 1 各向同性方板

每边划分成 3 个边界单元, 如图 1 所示。采用由 Tchebychev 正交多项式函数组成的级数形式的近似基本解, 级数项数取 4×4 。用边界元法计算得到的板内 81 点的挠度和转角响应见表 1 的第 3 列。由于板的几何形状及载荷都是对称的, 故只列出板的 $1/4$ 区域内的 15 点的响应值, 并以此作为准确的响应值。边界上共 12 个单元, 24 个边界未知量 (略去角点影响)。由于对称, 只需在表 1 的第 3 列内选用 6 个挠度响应值作为仿真的测量值, 见表 1 第 4 列, 然后用本文方法识别出其余各点的挠度和转角响应值, 见表 1 第 5 列。

表 1 方板的振型识别

1 点号	2 点的坐标		3 准确的响应值			4 仿真的测量值	5 识别得到的响应值		
	$x(\text{cm})$	$y(\text{cm})$	$W(\text{cm})$	$\theta_x(^{\circ})$	$\theta_y(^{\circ})$	$W(\text{cm})$	$W(\text{cm})$	$\theta_x(^{\circ})$	$\theta_y(^{\circ})$
1	20	20	0.0139	-15.94	-15.94	0.0139		-15.95	-15.94
2	40	20	0.0304	-10.41	-306.90		0.0304	-10.42	-306.41
3	60	20	0.0444	0.34	-262.41	0.0444		0.34	-262.02
4	80	20	0.0537	8.80	-112.25		0.0537	8.81	-112.08
5	100	20	0.0569	11.92	58.15	0.0569		11.93	58.07
6	40	40	0.0663	-201.85	-201.85		0.0663	-201.54	-201.54
7	60	40	0.0970	3.66	-172.60		0.0970	3.68	-172.32
8	80	40	0.1172	165.62	-73.80		0.1172	165.41	-73.68
9	100	40	0.1242	225.27	38.30		0.1242	224.97	38.25
10	60	60	0.1420	3.15	3.15	0.1420		3.16	3.17
11	80	60	0.1715	141.65	1.41		0.1715	141.46	1.42
12	100	60	0.1818	192.66	-0.57	0.1818		192.40	-0.57
13	80	80	0.2072	60.69	60.69	0.2072		60.60	60.60
14	100	80	0.2196	82.52	-31.21		0.2196	82.40	-31.18
15	100	100	0.2327	-42.50	-42.50		0.2327	-42.45	-42.45

从表 1 的第 3 列与第 5 列的比较,可看到挠度响应的识别值与准确值完全一致,转角响应的识别值与准确值之间略有差异,但其误差是微乎其微的。

实例

周边自由各向同性板,几何尺寸为 $40.1 \times 22.7 \times 0.25 \text{cm}^3$,物理参数为 $E = 20.2 \times 10^9 \text{N/cm}$, $G = 7.94 \times 10^8 \text{N/cm}$, $\mu = 0.26$, $\bar{m} = 7.8 \times 10^{-3} \text{kg/cm}^2$ 。

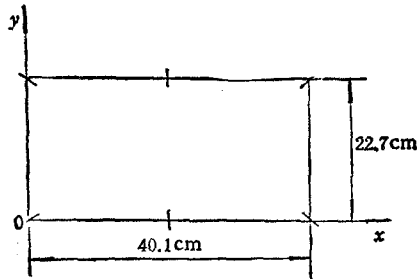


图 2 各向同性矩形板

先用正弦激振法在板的中心点加上集中激振力激出各阶模态,在板上划分网格测量其模态振型,然后采用其中部分数据,结合边界元法识别其余各点的振型值。在用边界元法计算时,边界上共划分 6 个单元(见图 2),加上 4 个角点,边界未知量共 16 个,因此需要测量出 16 个振型数据,由于板的对称性因此仅需测量 1/4 区域内的振型数据,即仅需测得 4 个振型数据就可以识别出整个板的各阶挠度和转角振型。近似基本解仍采用 Tchebychev 多项式形式的级数解。级数项数为

5×3 。

表 2、表 3 分别列出第 1 阶模态(固有频率为 93 Hz)及第 3 阶模态(固有频率为 261 Hz)的模态振型识别结果。比较表 2、表 3 中第 3 行与第 5 行对应的数据,识别结果的精度可认为已足够工程上应用的要求。

表 2 矩形板的第 1 阶模态振型识别 ($f_1 = 93 \text{Hz}$)

1 点 号	2 点的坐标		3 振型的测量值 $W(\text{cm})$	4 用于识别的测量值 $W(\text{cm})$	5 识别的振型值 $W(\text{cm})$
	$x(\text{cm})$	$y(\text{cm})$			
1	0.00	0.00			0.0153
2	5.01	0.00			-0.0132
3	10.02	0.00			0.0021
4	15.04	0.00			0.0188
5	20.05	0.00			0.0254
6	0.00	4.54			-0.0269
7	5.01	4.54	-0.0111	-0.0111	
8	10.02	4.54	0.0020		0.0014
9	15.04	4.54	0.0099	0.0099	
10	20.05	4.54	0.0130		0.0129
11	0.00	9.08			-0.0381
12	5.01	9.08	-0.0113	-0.0113	
13	10.02	9.08	0.0014		0.0013
14	15.04	9.08	0.0084	0.0084	
15	20.05	9.08	0.0113		0.0108

表 3 矩形板的第3阶模态振型识别 ($f_3 = 261\text{Hz}$)

1 点 号	2 点的坐标		3 振型的测量值 $W(\text{cm})$	4 用于识别的测量值 $W(\text{cm})$	5 识别的振型值 $W(\text{cm})$
	$x(\text{cm})$	$y(\text{cm})$			
1	0.00	0.00			-0.1719
2	5.01	0.00			-0.3273
3	10.02	0.00			-0.3318
4	15.04	0.00			-0.3050
5	20.05	0.00			-0.2919
6	0.00	4.54			0.0924
7	5.01	4.54	-0.0310	-0.0310	
8	10.02	4.54	-0.0312		-0.0357
9	15.04	4.54	-0.0159	-0.0159	
10	20.05	4.54	-0.0063		-0.0061
11	0.00	9.08			0.1832
12	5.01	9.08	0.0681	0.0681	
13	10.02	9.08	0.0663		0.0633
14	15.04	9.08	0.0811	0.0811	
15	20.05	9.08	0.0914		0.0899

四、结 论

通过计算机仿真及实例的验证,说明本文提出的方法是可行的。只要在精度允许的范围内将边界划分成尽可能少的边界元,就可以大大减少为获得完整的模态振型所必需的测点数。譬如,完全可以将板的每一条自然边取作为一个单元,如作者在[8]中所采用过的那样,边界未知量可压缩到很少。这样,虽只用了较少的测点,却可以定出域内任意一点的响应,从而获得很丰富的振型信息。而且这种方法所需要的测量数据数与所需识别的模态阶数无关。当识别高阶模态振型时,仍然只需要用与边界未知量相同数目的测量数据,故而对识别高阶振型特别有利。

边界积分方程是解析的表达式,只要边界元模型恰当则所扩充的自由度方向的响应必然具有较高的精度。从仿真及实例的结果已充分说明了这一点。这比目前通用的用人为插值或最小二乘优化的方法来扩充自由度显然要合理得多。从边界积分方程不难定出域内各点的转角响应,因此对于难以直接测量的转角自由度也很容易加以扩充。

本文所提的方法是以板类结构为研究对象,但其原理和方法对其他类型的结构也是同样可以适用的。

边界元法的最大限制是对特定问题其函数形式的基本解往往不易求得。作者在文献[6]至[8]中所探讨的近似基本解可以在一定程度上解决问题。因此只要能列出该结构动力问题的边界积分方程,就有可能应用本文所提出的方法来识别模态振型。

参 考 文 献

- [1] Kanda H, Wei M L et al. Structural dynamic modification using mass additive technique. Proceedings of the 4th IMAC, 1986
- [2] Chung Y T and Craig R R. Experimental substructure coupling with rotational coupling coordinate. AIAA,

- 85—0759, 1985
- [3] Micheal M D and Pardon C C. The estimation of rotational degree of freedom for structural dynamic modification. Proceedings of the 5th IMAC, 1987
 - [4] O'Collaham J C and Liewn I H. An efficient method for determining rotating degrees of freedom for analytical and experimental modal data. Proceedings of the 4th IMAC, 1986
 - [5] Avitable P and O'Collaham J C. Expansion of rotational degrees of freedom using shape function. Proceedings of the 6th IMAC, 1988
 - [6] Zhu J and Gu P. Dynamic response of orthotropic plate using BEM with approximate fundamental solution. *Journal of Sound and Vibration*, 1991 150(2)
 - [7] Xiang X and Zhu J. Approximate fundamental solution by the use of tchebychev orthogonal polynomials in boundary element method. Proceedings of the International Conference on Structural Engineering and Computation, 1990
 - [8] Zhu J and Liu B. Dynamic boundary element method for structures with damping. Proceedings of the International Conference on Vibration Problems in Engineering, 1990

AN APPROACH LINKING TEST AND B. E. M. ANALYSIS TO IDENTIFY MODAL SHAPE PARAMETERS

Zhu Jimei Xiang Xiaoning

(Shanghai Institute of Mechanical Engineering)

Abstract In experimental modal analysis, it is necessary to measure the response data in directions of all degrees of freedom to obtain the complete mode shape information. In order to decrease the number of measurement points and, especially, to complement the data of those degrees of freedom which are unable to be detected, this paper suggests an approach utilising the analytical relations derived by B.E.M. to extend the dynamic measurement data. By use of this method, in experimental modal analysis, we can take less measurement points, increase data smoothness and improve accuracy. Simulations and testing examples verified the feasibility of the method offered.

Key words experimental modal analysis, boundary element method, identification of modal shape parameters