

层状弹性半空间轴对称动力问题的奇异解¹⁾

曾三平 曹志远

(同济大学工程力学系, 上海, 200092)

摘要 本文利用 Laplace-Hankel 联合变换及传播矩阵技术导出了任意层数的层状弹性半空间轴对称动力问题时域奇异解的一般解析表达式, 并给出了奇异解数值化实施的计算方法。文末的实例计算表明了本文给出解答的正确性以及数值化实施的可靠性, 从而为进一步用边界元法直接解决由于层状介质而引起的非匀质动力问题开拓了一条潜在的途径。

关键词 奇异解、层状介质、快速 Hankel 变换、传播矩阵技术

一、引言

多层层状弹性半空间介质模型已日益为防护工程、地下工程及基础工程所采用, 这是由于该模型较合理地模拟地基物理特性沿深度方向的不均匀性, 目前的文献[1—3]也趋向采用这种模型。对于解决半无限介质动力问题具有较强生命力的边界元法, 由于难以普遍地给出任意层数层状介质动力问题奇异解的解析表达式或由于表达式难以数值实施^[4], 因而在很大程度上限制了边界元法在层状介质这一领域的应用。文献[2, 3]对每一层介质应用匀质空间动力奇异解的边界元法, 在每一交接层面及自由表面均须剖分单元, 当层数较多以及辐射影响域较大时, 计算工作量将十分庞大。

近年来许多人的工作都致力于克服这一困难以寻求层状介质的动力奇异解, Franssens^[5]导出了多层半无限介质平面问题的时域奇异解, Apsel^[6]和 Kausel^[7]分别导出了多层半空间问题的频域奇异解, 文献[8, 9]具体地探讨了频域奇异解的数值化实施。

本文的主要工作在于在时域空间中导出了任意层数层状半无限空间轴对称动力问题的奇异解一般解析表达式, 并对表达式的数值化实施进行了探讨, 数值积分采用快速 Hankel 变换, 文末给出了几个计算实例, 计算结果具有较高的精度, 为边界元法在成层介质动力问题这一领域的直接实施提供了保证。

二、基本方程及其 Laplace-Hankel 变换

图1所示的多层层状半空间模型由 N 层匀质、各向同性的水平弹性层以及第 $N+1$ 层的半无限弹性空间构成, 各层的几何及物理参数可任意。对于任意第 i 层介质, 轴对称

1) 国家教委博士基金资助项目。
本文于1991年3月4日收到。

动力问题的位移基本方程在柱坐标系下表示为:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial \Delta^i}{\partial r} + \mu_i \left(\nabla^2 u_r^i - \frac{u_r^i}{r^2} \right) + \rho_i (f_r^i - \ddot{u}_r^i) &= 0 \\ (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial \Delta^i}{\partial z} + \mu_i \nabla^2 u_z^i + \rho_i (f_z^i - \ddot{u}_z^i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中

$$\Delta^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r} + \frac{u_r^i}{r} + \frac{\partial u_z^i}{\partial z},$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2)$$

λ_i, μ_i 为第 i 层介质的 Lamé 常数, ρ_i 为密度, u_r^i, u_z^i 分别为径向和竖向位移。

由轴对称动力奇异解定义, 首先在域内任意处 (r_0, z_0) 沿径向作用环状脉冲源:

$$\left. \begin{aligned} \rho_i f_r^i &= \frac{1}{2\pi r_0} \delta(t) \delta(r - r_0) \delta(z - z_0) \\ \rho_i f_z^i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

在这种情况下, 位移奇异解 U_{ir}, U_{iz} 由以下控制方程:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial \Delta^i}{\partial r} + \mu_i \left(\nabla^2 U_{ir} - \frac{U_{ir}}{r^2} \right) - \rho_i \ddot{U}_{ir} \\ + \frac{1}{2\pi r_0} \delta(t) \delta(r - r_0) \delta(z - z_0) &= 0 \\ (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial \Delta^i}{\partial z} + \mu_i \nabla^2 U_{iz} - \rho_i \ddot{U}_{iz} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

的解确定。式中 $\delta(\cdot)$ 为 Dirac Delta 函数。

应力奇异解由本构关系:

$$S_{irr} = \lambda_i \Delta^i + 2\mu_i \frac{\partial U_{ir}}{\partial r} \quad (5a)$$

$$S_{i\theta\theta} = \lambda_i \Delta^i + 2\mu_i \frac{U_{ir}}{r} \quad (5b)$$

$$S_{izs} = \lambda_i \Delta^i + 2\mu_i \frac{\partial U_{iz}}{\partial z} \quad (5c)$$

$$S_{irs} = \mu_i \left(\frac{\partial U_{ir}}{\partial z} + \frac{\partial U_{iz}}{\partial r} \right) \quad (5d)$$

确定。

令 Laplace 变换:

$$\hat{f}(r, z, q) = \int_0^\infty f(r, z, t) e^{-qt} dt \quad (6)$$

其逆变换:

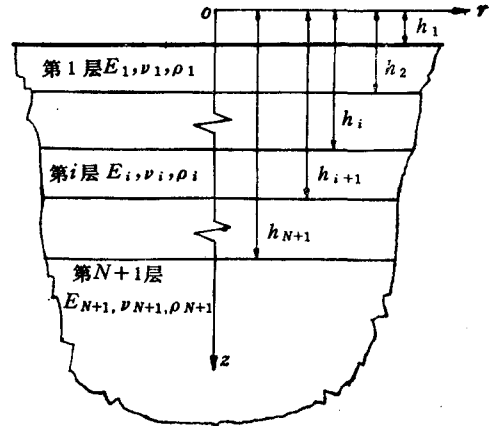


图 1

$$f(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \hat{f}(r, z, q) e^{qt} dq \quad (7)$$

对(4)式施以 Laplace 变换(6),得:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial \hat{\Delta}^i}{\partial r} + \mu_i \left(\nabla^2 \hat{U}_{ir} - \frac{\hat{U}_{ir}}{r^2} \right) - \rho_i q^2 \hat{U}_{ir} \\ + \frac{1}{2\pi r_0} \delta(r - r_0) \delta(z - z_0) = 0 \\ (\lambda_i + \mu_i) \frac{\partial \hat{\Delta}^i}{\partial z} + \mu_i \nabla^2 \hat{U}_{iz} - \rho_i q^2 \hat{U}_{iz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

这里, 我们已假定结构的初始状态为静止.

$\hat{U}_{ir}$ 的一阶及 $\hat{U}_{iz}$ 的零阶 Hankel 变换分别记为:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{ir}(\xi, z, q) &= \int_0^\infty r \hat{U}_{ir}(r, z, q) J_1(\xi r) dr \\ \bar{U}_{iz}(\xi, z, q) &= \int_0^\infty r \hat{U}_{iz}(r, z, q) J_0(\xi r) dr \end{aligned} \quad (9)$$

其逆变换为:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{ir}(r, z, q) &= \int_0^\infty \xi \bar{U}_{ir}(\xi, z, q) J_1(\xi r) d\xi \\ \hat{U}_{iz}(r, z, q) &= \int_0^\infty \xi \bar{U}_{iz}(\xi, z, q) J_0(\xi r) d\xi \end{aligned} \quad (10)$$

对方程(8)的第一式和第二式分别施以一阶及零阶 Hankel 变换,得:

$$\left. \begin{aligned} \mu_i \frac{\partial^2 \bar{U}_{ir}}{\partial z^2} - (\lambda_i + \mu_i) \xi \frac{\partial \bar{U}_{iz}}{\partial z} - [\rho_i q^2 + (\lambda_i + 2\mu_i) \xi^2] \bar{U}_{ir} \\ + \frac{1}{2\pi} J_1(\xi r_0) \delta(z - z_0) = 0 \\ (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial^2 \bar{U}_{iz}}{\partial z^2} + (\lambda_i + \mu_i) \xi \frac{\partial \bar{U}_{ir}}{\partial z} - (\rho_i q^2 + \mu_i \xi^2) \bar{U}_{iz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

类似地对(5c)及(5d)两式施以 Laplace 及 Hankel 变换,得:

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_{ir,z} &= \mu_i \left(\frac{\partial \bar{U}_{ir}}{\partial z} - \xi \bar{U}_{iz} \right) \\ \bar{S}_{iz,z} &= (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial \bar{U}_{iz}}{\partial z} + \lambda_i \xi \bar{U}_{ir} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

我们将方程(11)和方程(12)合并整理,可以写成常微分方程组的标准形式:

$$\frac{\partial}{\partial z} \{Y_1\}^i = [A] \{Y_1\}^i + \{F_1\}^i \quad (13)$$

式中:

$$[A]^i = \begin{bmatrix} 0 & \xi & \frac{1}{\mu_i} & 0 \\ -\frac{\lambda_i \xi}{\lambda_i + 2\mu_i} & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_i + 2\mu_i} \\ \rho_i q^2 + \frac{4\mu_i(\lambda_i + \mu_i)\xi^2}{\lambda_i + 2\mu_i} & 0 & 0 & \frac{\lambda_i \xi}{\lambda_i + 2\mu_i} \\ 0 & \rho_i q^2 & -\xi & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\{Y_i\}^i = [\bar{U}_{ir}, \bar{U}_{iz}, \bar{S}_{irz}, \bar{S}_{izz}]^T \quad (15)$$

$$\{F_i\}^i = \left[-\frac{1}{2\pi} J_1(\xi r_0) \delta(z - z_0), 0, 0, 0 \right]^T \quad (16)$$

经过相应的求解过程, 我们可以求出方程组(13)的通解为:

$$\{Y_i\}^i = [G]^i [E]^i \{X\}^i + \{R_i\}^i \quad (17)$$

式中:

$$[G]^i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{\xi}{\alpha_i} & -\frac{\xi}{\alpha_i} & \frac{\beta_i}{\xi} & -\frac{\beta_i}{\xi} \\ -\mu_i \frac{\alpha_i^2 + \xi^2}{\alpha_i} & \mu_i \frac{\alpha_i^2 + \xi^2}{\alpha_i} & -2\mu_i \beta_i & 2\mu_i \beta_i \\ -2\mu_i \xi & -2\mu_i \xi & \mu_i \frac{\alpha_i^2 + \xi^2}{\xi} & -\mu_i \frac{\alpha_i^2 + \xi^2}{\xi} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$[E]^i = \text{diag}[e^{-\alpha_i(z-h_i)}, e^{\alpha_i(z-h_i)}, e^{-\beta_i(z-h_i)}, e^{\beta_i(z-h_i)}] \quad (19)$$

$$\{X\}^i = [A_i, B_i, C_i, D_i]^T \quad (20)$$

$$\{R_i\}^i = -\frac{\delta_{ii}}{2\pi} J_1(\xi r_0) H(z - z_0)$$

$$\times \begin{Bmatrix} \frac{\alpha_i}{\rho_i q^2} \text{sh} \alpha_i(z - z_0) - \frac{\xi^2}{\beta_i \rho_i q^2} \text{sh} \beta_i(z - z_0) \\ \frac{\xi}{\rho_i q^2} \text{ch} \beta_i(z - z_0) - \frac{\xi}{\rho_i q^2} \text{ch} \alpha_i(z - z_0) \\ \frac{\mu_i(\alpha_i^2 + \xi^2)}{\rho_i q^2} \text{ch} \alpha_i(z - z_0) - \frac{2\mu_i \xi \beta_i}{\rho_i q^2} \text{ch} \beta_i(z - z_0) \\ \frac{\mu_i \xi(\alpha_i^2 + \xi^2)}{\beta_i \rho_i q^2} \text{sh} \beta_i(z - z_0) - \frac{2\mu_i \xi \alpha_i}{\rho_i q^2} \text{sh} \alpha_i(z - z_0) \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$\alpha_i^2 = \xi^2 + \left(\frac{q}{C_i^i}\right)^2 \quad \beta_i^2 = \xi^2 + \left(\frac{q}{C_d^i}\right)^2 \quad (22)$$

其中: $C_i^i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\rho_i}}$, $C_d^i = \sqrt{\frac{\lambda_i + 2\mu_i}{\rho_i}}$ 分别为第 i 层介质的横波速度与纵波速度; A_i 、 B_i 、 C_i 、 D_i 为第 i 层介质的四个待定积分常数; $H(\cdot)$ 为 Heviside 函数; δ_{ij} 为 Kronecker Delta 函数, 当象点所在的第 i 层与源点所在的第 j 层不同层时: $\delta_{ij} = 0 (i \neq j)$ 。

从通解(17)可以看出, 一旦积分常数 A_i, B_i, C_i, D_i 确定, 则 N 层层状半空间介质中任意一点的位移奇异解 $\bar{U}_{ir}, \bar{U}_{iz}$ 和应力奇异解 $\bar{S}_{irz}, \bar{S}_{izz}$ 便确定。

为了求出另外两个非独立的应力奇异解 $\bar{S}_{irr}, \bar{S}_{i\theta\theta}$, 我们发现经如下变换, 可将 $\bar{S}_{irr}, \bar{S}_{i\theta\theta}$ 间接地由已经求出的奇异解表示, 令:

$$S_{ir+\theta}^i = S_{irr}^i + S_{i\theta\theta}^i \quad (23)$$

$$S_{ir-\theta}^i = S_{irr}^i - S_{i\theta\theta}^i \quad (24)$$

将(5a)、(5b)代入(23)、(24)式并经 Laplace 变换, 得:

$$\hat{S}_{i,r+\theta} = 2\lambda_i \hat{\Delta}^i + 2\mu_i \left(\frac{\partial \hat{U}_{ir}}{\partial r} + \frac{\hat{U}_{ir}}{r} \right) \quad (25)$$

$$\hat{S}_{i,r-\theta} = 2\mu_i \left(\frac{\partial \hat{U}_{ir}}{\partial r} - \frac{\hat{U}_{ir}}{r} \right) \quad (26)$$

对(25)式施以零阶 Hankel 变换,得:

$$\bar{S}_{i,r+\theta} = 2(\lambda_i + \mu_i) \xi \bar{U}_{ir} + 2\lambda_i \frac{\partial \bar{U}_{iz}}{\partial z} \quad (27)$$

式中:

$$\bar{S}_{i,r+\theta}(\xi, z, q) = \int_0^\infty r \hat{S}_{i,r+\theta}(r, z, q) J_0(\xi r) dr \quad (28)$$

对(26)式施以二阶 Hankel 变换,得:

$$\bar{S}_{i,r-\theta} = -2\mu_i \xi \bar{U}_{ir} \quad (29)$$

式中:

$$\bar{S}_{i,r-\theta}(\xi, z, q) = \int_0^\infty r \hat{S}_{i,r-\theta}(r, z, q) J_2(\xi r) dr \quad (30)$$

将(17)式代入(27)及(29)式并整理,得:

$$\begin{Bmatrix} \bar{S}_{i,r+\theta} \\ \bar{S}_{i,r-\theta} \end{Bmatrix} = [G']^i [E]^i \{X\}^i + \{R_i'\}^i \quad (31)$$

其中:

$$[G']^i = \begin{bmatrix} 2\mu_i \xi & 2\mu_i \xi & \frac{2}{\xi} [(\lambda_i + \mu_i) \xi^2 - \lambda_i \beta_i^2] & \frac{2}{\xi} [(\lambda_i + \mu_i) \xi^2 - \lambda_i \beta_i^2] \\ -2\mu_i \xi & -2\mu_i \xi & -2\mu_i \xi & -2\mu_i \xi \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\{R_i'\}^i = -\frac{\delta_{ii}}{2\pi} J_i(\xi r_0) H(z - z_0)$$

$$\times \begin{Bmatrix} \frac{2\mu_i \xi \alpha_i}{\rho_i q^2} \text{sh} \alpha_i(z - z_0) - \frac{2\xi}{\beta_i \rho_i q^2} [(\lambda_i + \mu_i) \xi^2 - \lambda_i \beta_i^2] \text{sh} \beta_i(z - z_0) \\ \frac{2\mu_i \xi^3}{\beta_i \rho_i q^2} \text{sh} \beta_i(z - z_0) - \frac{2\mu_i \xi \alpha_i}{\rho_i q^2} \text{sh} \alpha_i(z - z_0) \end{Bmatrix} \quad (33)$$

$[E]^i, \{X\}^i$ 同(19)、(20)式。

对式(17)及(31)施以 Hankel 及 Laplace 逆变换,得:

$$\begin{Bmatrix} U_{ir} \\ U_{iz} \\ S_{i,rs} \\ S_{i,zz} \\ S_{i,rr} + S_{i,\theta\theta} \\ S_{i,rr} - S_{i,\theta\theta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \int_0^\infty \xi [J] \begin{Bmatrix} \bar{U}_{ir} \\ \bar{U}_{iz} \\ \bar{S}_{i,rs} \\ \bar{S}_{i,zz} \\ \bar{S}_{i,r+\theta} \\ \bar{S}_{i,r-\theta} \end{Bmatrix} e^{q' d} d\xi dq \quad (34)$$

式中:

$$[J] = \text{diag}[J_1(\xi r), J_0(\xi r), J_1(\xi r), J_0(\xi r), J_0(\xi r), J_2(\xi r)]^T \quad (35)$$

$\bar{U}_{1r}^i, \bar{U}_{1z}^i, \bar{S}_{1rz}^i, \bar{S}_{1zz}^i, \bar{S}_{1r+\theta}^i, \bar{S}_{1r-\theta}^i$ 各分量由(17)式和(31)式给出.

(34)式即为在径向 r 方向作用环状脉冲源情况下的全部位移及应力奇异解的时域解答.

对于另一种情况即在竖向 z 方向作用环状脉冲源:

$$\left. \begin{aligned} \rho_i f_r^i &= 0 \\ \rho_i f_z^i &= \frac{1}{2\pi r_0} \delta(r) \delta(r - r_0) \delta(z - z_0) \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

经以上类似的推导, 我们可以求出其位移及应力奇异解为:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{1r}^i \\ U_{1z}^i \\ S_{1rz}^i \\ S_{1zz}^i \\ S_{1rr}^i + S_{1\theta\theta}^i \\ S_{1rr}^i - S_{1\theta\theta}^i \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_0^\infty \xi [J] \left\{ \begin{array}{l} \bar{U}_{1r}^i \\ \bar{U}_{1z}^i \\ \bar{S}_{1rz}^i \\ \bar{S}_{1zz}^i \\ \bar{S}_{1r+\theta}^i \\ \bar{S}_{1r-\theta}^i \end{array} \right\} e^{qz} d\xi dq \quad (37)$$

式中的 $\bar{U}_{1r}^i, \bar{U}_{1z}^i, \bar{S}_{1rz}^i, \bar{S}_{1zz}^i, \bar{S}_{1r+\theta}^i, \bar{S}_{1r-\theta}^i$ 各分量同样由(17)式及(31)式给出, 只要将其中的 $\{R_1\}^i$ 及 $\{R_2\}^i$ 用以下两式替代.

$$\begin{aligned} \{R_2\}^i &= -\frac{\delta_{ij}}{2\pi} J_0(\xi r_0) H(z - z_0) \\ &\times \left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi}{\rho_i q^2} \operatorname{ch} \alpha_i(z - z_0) - \frac{\xi}{\rho_i q^2} \operatorname{ch} \beta_i(z - z_0) \\ \frac{\beta_i}{\rho_i q^2} \operatorname{sh} \beta_i(z - z_0) - \frac{\xi^2}{\alpha_i \rho_i q^2} \operatorname{sh} \alpha_i(z - z_0) \\ \frac{\mu_i \xi (\alpha_i^2 + \xi^2)}{\alpha_i \rho_i q^2} \operatorname{sh} \alpha_i(z - z_0) - \frac{2\mu_i \xi \beta_i}{\rho_i q^2} \operatorname{sh} \beta_i(z - z_0) \\ \frac{\mu_i (\alpha_i^2 + \xi^2)}{\rho_i q^2} \operatorname{ch} \beta_i(z - z_0) - \frac{2\mu_i \xi^2}{\rho_i q^2} \operatorname{ch} \alpha_i(z - z_0) \end{array} \right\} \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{R_2'\}^i &= -\frac{\delta_{ij}}{2\pi} J_0(\xi r_0) H(z - z_0) \\ &\times \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\mu_i \xi^2}{\rho_i q^2} \operatorname{ch} \alpha_i(z - z_0) - \frac{2}{\rho_i q^2} [(\lambda_i + \mu_i) \xi^2 - \lambda_i \beta_i] \operatorname{ch} \beta_i(z - z_0) \\ \frac{2\mu_i \xi^2}{\rho_i q^2} \operatorname{ch} \beta_i(z - z_0) - \frac{2\mu_i \xi^2}{\rho_i q^2} \operatorname{ch} \alpha_i(z - z_0) \end{array} \right\} \quad (39) \end{aligned}$$

三、 N 层半空间介质动力奇异解中积分常数的确定

上一节我们导出了 N 层层状半空间介质动力问题的全部位移及应力时域奇异解表达式(34)及(37), 从(17)式我们可以看出对 N 层及半空间介质共有 $4(N+1)$ 个待定积分常数 $A_i, B_i, C_i, D_i (i=1, 2, \dots, N, N+1)$, 每一层(第 i 层)的四个待定常数 A_i, B_i, C_i 和 D_i 可由该层的上表面 ($z = h_i$) 和下表面 ($z = h_{i+1}$) (参照图 1) 的边界条件确定.

重写(17)式

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_{kr}^i \\ \bar{U}_{kz}^i \\ \bar{S}_{krz}^i \\ \bar{S}_{kzz}^i \end{Bmatrix} = [G]^i [E]^i \begin{Bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{Bmatrix} + \{R_k\}^i \quad (k=1,2) \quad (40)$$

特别地,令 $z = h_{i+1}$, 代入(40)我们有:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_{kr}^i(h_{i+1}) \\ \bar{U}_{kz}^i(h_{i+1}) \\ \bar{S}_{krz}^i(h_{i+1}) \\ \bar{S}_{kzz}^i(h_{i+1}) \end{Bmatrix} = [G]^i [E(\Delta h_i)] \begin{Bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{Bmatrix} + \{R_k(h_{i+1})\}^i \quad (41)$$

式中:

$$[E(\Delta h_i)] = \text{diag}[e^{-\alpha_i \Delta h_i}, e^{\alpha_i \Delta h_i}, e^{-\beta_i \Delta h_i}, e^{\beta_i \Delta h_i}] \quad (42)$$

$\Delta h_i = h_{i+1} - h_i$ 为第 i 层介质的厚度

对于与层面 ($z = h_{i+1}$) 共享的第 $i+1$ 层介质, 令 $z = h_{i+1}$ 代入(40)我们又有:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_{kr}^{i+1}(h_{i+1}) \\ \bar{U}_{kz}^{i+1}(h_{i+1}) \\ \bar{S}_{krz}^{i+1}(h_{i+1}) \\ \bar{S}_{kzz}^{i+1}(h_{i+1}) \end{Bmatrix} = [G]^{i+1} \begin{Bmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \\ C_{i+1} \\ D_{i+1} \end{Bmatrix} + \{R_k(h_{i+1})\}^{i+1} \quad (43)$$

由交接层面 ($z = h_{i+1}$) 的连续条件有:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{kr}^{i+1}(h_{i+1}) &= \bar{U}_{kr}^i(h_{i+1}) & \bar{U}_{kz}^{i+1}(h_{i+1}) &= \bar{U}_{kz}^i(h_{i+1}) \\ \bar{S}_{krz}^{i+1}(h_{i+1}) &= \bar{S}_{krz}^i(h_{i+1}) & \bar{S}_{kzz}^{i+1}(h_{i+1}) &= \bar{S}_{kzz}^i(h_{i+1}) \end{aligned} \quad (44)$$

由(41)、(43)式并考虑到(44), 我们有:

$$[G]^{i+1} \begin{Bmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \\ C_{i+1} \\ D_{i+1} \end{Bmatrix} + \{R_k(h_{i+1})\}^{i+1} = [G]^i [E(\Delta h_i)] \begin{Bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{Bmatrix} + \{R_k(h_{i+1})\}^i \quad (45)$$

即:

$$[A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}, D_{i+1}]^T = [T]^i [A_i, B_i, C_i, D_i]^T + \{R_k^*\}^i \quad (46)$$

式中:

$$[T]^i = ([G]^{i+1})^{-1} [G]^i [E(\Delta h_i)] \quad (47)$$

$$\{R_k^*\}^i = ([G]^{i+1})^{-1} (\{R_k(h_{i+1})\}^i - \{R_k(h_{i+1})\}^{i+1}) \quad (48)$$

$[T]^i$ 为第 i 层介质与第 $i+1$ 层介质之间的传播矩阵, (46)式即为各层介质待定常数的递推关系式, 对于任意层均成立。这样, 对于 N 层弹性层加上半空间介质结构的 $4(N+1)$ 个待定常数由 N 个交接面的 $4N$ 个连续条件 (即递推关系式(46)) 则只有四个待定常数是独立的, 而这四个常数又可由自由表面的边界条件和竖向无穷远处的辐射条件所确定。

对于自由表面 ($z = h_1$), 我们有:

$$\bar{S}_{k,rs}^1(h_1) = 0, \quad \bar{S}_{k,rs}^1(h_1) = 0 \quad (49)$$

对于第 $N+1$ 层的半无限弹性介质, P 波及 S 波在竖向无穷远处存在辐射条件: 位移及应力在竖向无穷远处 ($z \rightarrow \infty$) 为有限, 从而由 (17) 式并考虑到 (19) 式, 我们有:

$$B_{N+1} = 0, \quad D_{N+1} = 0 \quad (50)$$

这样, 由 (49) 及 (50) 两式的四个条件可唯一地确定剩下的四个独立常数, 代回递推关系式 (46) 则任意层的待定常数便可确定, 从而 N 层层状半空间介质的全部位移及应力奇异解由 (34) 及 (37) 两式确定地给出。

四、数值实施及计算实例

这里, 我们应用本文给出的多层半空间介质时域奇异解计算两个实例以考核解答的正确性, 从表达式 (34) 及 (37) 可以看出: 无穷域的 Hankel 变换将直接影响解答数值实施的精度。这里我们采用一种十分有效的计算方法——快速 Hankel 变换^[10]。

欲求 k 阶 Hankel 变换:

$$F_k(r) = \int_0^\infty \xi f(\xi) J_k(\xi r) d\xi \quad (51)$$

由恒等展开式:

$$e^{\frac{1}{2}z(t-1/t)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} t^k J_k(z) \quad (52)$$

令 $t = e^{i\theta}$, $z = \xi r$ 并对 (52) 式两边同乘 $\xi f(\xi)$ 然后积分, 得:

$$\int_0^\infty e^{ikr \sin \theta} f(\xi) \xi d\xi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\theta} F_k(r) \quad (53)$$

令:

$$\phi(\eta) = \int_0^\infty e^{i\eta \xi} \xi f(\xi) d\xi \quad (54)$$

由 Fourier 级数展开理论, 并考虑到 $\phi(r \sin \theta)$ 的周期性, 则 (53) 式可化为:

$$F_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(r \sin \theta) e^{-ik\theta} d\theta \quad (55)$$

这样, (51) 式 Hankel 变换的 $[0, \infty]$ 区间上的积分便化为 (55) 式的 $[0, 2\pi]$ 区间上的积分, 而积分核 $\phi(r \sin \theta)$ 可由 (54) 式按快速 Fourier 变换求得。

(34) 及 (37) 式中的 Laplace 逆变换采用 Durbin 方法^[11]。上一节我们导出了多层介质间待定常数的递推关系式, 这对于电子计算机的数值实施将十分方便, 而且矩阵的阶数均仅为四阶, 因而由于介质层数的增加而引起计算工作量的增加将十分有限。

1. Lamb's Point Load 问题

为了考核本文给出多层解答的正确性以及同已有匀质解答^[12]进行比较的方便, 人为将匀质半空间介质划分为两层弹性层加上半空间的计算模型, 只是这里取各层的物理参数均相同, 结构的几何尺寸如图 2 所示, 荷载为突加点点荷载 $P = P_0 H(t)$, 各无量纲参数分别取值为: $E_1 = E_2 = E_3 = 1000.0$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.25$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1200.0$, $P_0 = 1.0$, $H_1 = 1.0$, $H_2 = 3.0$ 。自由表面的竖向及水平无量纲位移的计算结果分别绘

于图 3 和图 4, 文献[12]的解答也同绘于上述两图。

从图 3 和图 4 的计算结果可以看出, $\tau = 0.577$ 时 P 波和 SP 波 (Head 波) 最先到达, 开始引起地表的扰动, 地表向上隆起并伴有向外的水平位移; $\tau = 1.0$ 时 S 波到达, 竖向扰动的幅值明显增大, 随后到达的 Rayleigh 波使扰动趋于无穷大, Rayleigh 波过后, 竖向位移和水平位移均趋于稳定值。应用本文的多层介质解答的计算结果真实地再现了上述波动的全过程, 与文献[12]解吻合很好。

2. 埋深源问题

结构如图 5 所示, 第三层为半无限介质, 其上为两层水平弹性层, 在地表下深为 H 处作用一突加载荷 $P = P_0 H(t)$, 各无量纲参数取值: $P_0 = 1.0$, $H_1 = 1.0$, $H_2 = 3.0$, $H = 4.0$ 。

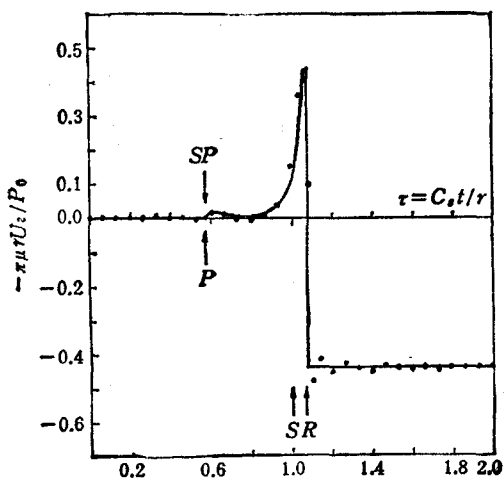


图 3 自由表面上的竖直位移 u_z

...本文解 ———文献[12]

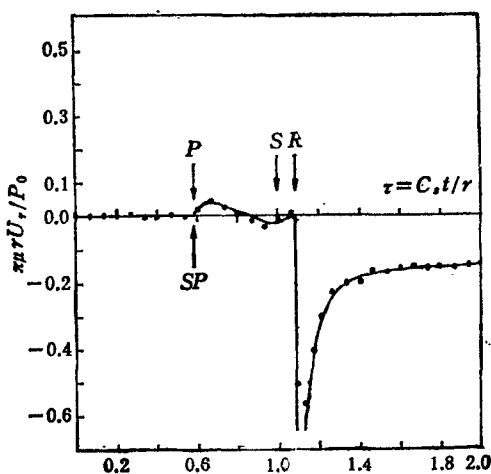


图 4 自由表面上的水平位移 u_r

...本文解 ———文献[12]

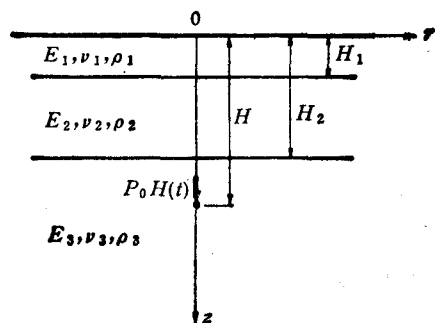


图 5

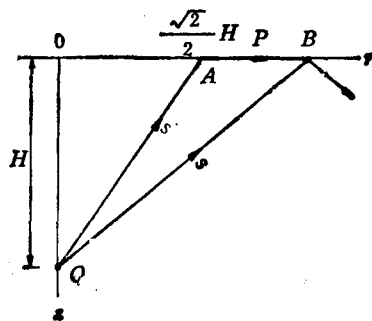


图 6

对于在深度 H 处作用于点源而引起的地表的波动随着观测点的位置不同而有所不同,当观测点离源点的水平距离大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}H$ (对应于泊松材料: $\nu = 0.25$)时,例如 B 点(参照图6), B 点除接收到经路径 QB 以速度 C_d 传播来的 P 波和以速度 C_s 传播来的 S 波外, B 点还接收到经路径 QAB 传播来的 SP 波, QA 段为 S 波,传播速度为 C_s , AB 段为 P 波,传播速度为 C_d , SP 波的总体速度比沿 QB 传播的 S 波要快,因而,当 $r > \frac{\sqrt{2}}{2}H$ 时,测点接收的波依次为 P 波、 SP 波和 S 波;当 $r < \frac{\sqrt{2}}{2}H$ 时,接收的波依次为 P 波和 S 波。

a) 匀质情况

无量纲参数取值: $E_1 = E_2 = E_3 = 1000.0$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1200.0$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.25$, 分别计算了 $(0.2H, 0)$ 、 $(5.0H, 0)$ 两点的竖向位移和水平位移, 计算结果的无量纲值分别绘于图7和图8, 文献[13]解也同绘于上述两图以便比较。图中的 R 为观测点与源点间的距离: $R = (r^2 + H^2)^{\frac{1}{2}}$ 。

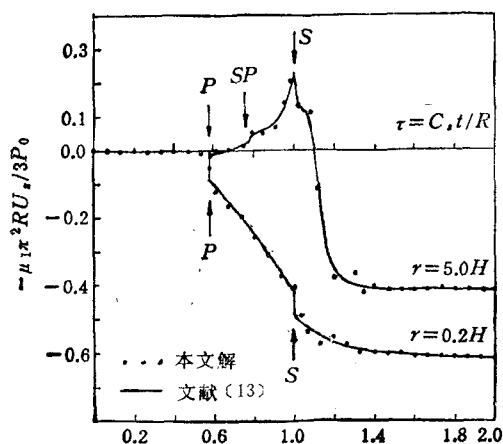


图7 竖向位移 u_z

...本文解 ———文献[13]

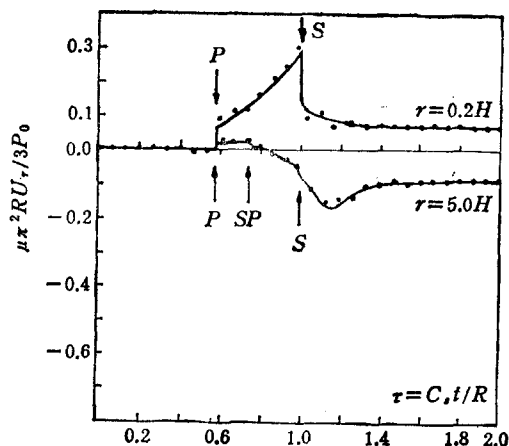


图8 水平位移 u_r

...本文解 ———文献[13]

从图7和图8可以看出,当 $\tau = 0.577$ 时 P 波首先到达,开始引起地表的扰动;对于 $r > \frac{\sqrt{2}}{2}H$ 的观测点 $r = 5.0H$, $\tau = 0.747$ 时 SP 波到达, SP 波的到达是以曲线斜率的变化为标志;当 $\tau = 1.0$ 时 S 波到达,对 $r = 5.0H$ 曲线以斜率变化为标志,而对于 $r < \frac{\sqrt{2}}{2}H$ 的 $r = 0.2H$ 曲线则以位移的跃迁为标志,而且跃迁幅值较大;随后到达的Rayleigh波影响幅值均为有限,此后位移均趋于稳定值,稳定后的径向位移对于 $r = 0.2H$ 向外,而对于 $r = 5.0H$ 则向内。图7和图8都表明应用本文给出多层解答的计算结果均与文献[13]解吻合很好。

b) 非匀质情况

无量参数取值: $E_1 = 1000.0$, $E_2 = 1500.0$, $E_3 = 2000.0$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1200.0$
 $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.25$. $(0.2H, 0)$ 及 $(5.0H, 0)$ 两点竖向和水平无量纲位移的计算结果分别
 绘于图 9 和图 10.

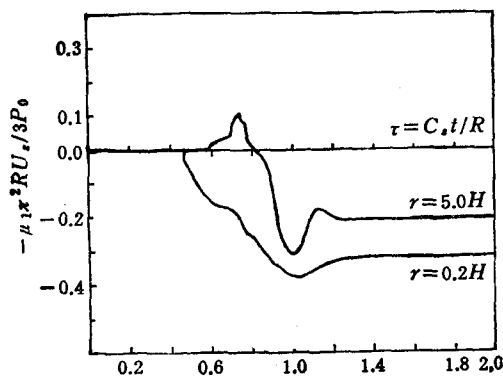
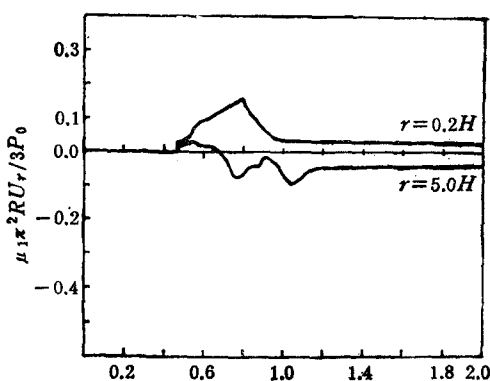
图 9 竖向位移 u_z 图 10 水平位移 u_x

图 9 和图 10 表明, 竖向和水平位移曲线的斜率变化均较均匀质情况要频繁得多, 这是由于波在各层交接面上产生多次反射和折射的结果, 曲线的总体走向与均匀质情况相仿, 但量值明显不同, 这也正是预料之中的。

五、结 语

本文给出了任意层数层状半空间介质动力问题的时域奇异解以及其数值实施的计算方法, 计算实例验证了解答的正确性及数值化实施的可靠性, 而且具有很高的计算精度。应用本文的解答可直接计算波在层状介质中的传播以及地震学中的震源问题, 将本文给出的奇异解进一步应用到边界元法中可直接进行层状介质域内孔洞问题的动力分析。

致谢 本文是在李国豪教授的关注与指导下完成的, 作者在此深表感谢。

参 考 文 献

- [1] Davies T C, Sen R. and Banerjee P K. *J. Geotech. Eng.*, 1985, 111: 1365—1379
- [2] Abascal R. and Domínguez J. *J. Eng. Mech.*, 1986, 112: 433—447
- [3] Beskos D E, Leung K L. and Vardoulakis I G. in *Recent Applications in Computational Mechanics*, Karabalis, D. L. Ed., ASCE, N. Y. 1986: 125—140
- [4] Beskos D E. *Appl. Mech. Rev.*, 1987, 40: 1—23
- [5] Franssens G R, Geophys J R. *Astron. Soc.*, 1983, 75: 669—691
- [6] Luco J E and Apsel R J *Bull. Seis. Soc. Am.*, 1983, 73: 909—929
- [7] Kausel E and Peek R *Pull. Seis. Soc. Am.*, 1982, 72: 1459—1481
- [8] Apsel R J and Luco J E. *Bull. Seis. Soc. Am.*, 1983, 73: 931—951
- [9] Chapel F and Tsakalidis C. in *Num. Meth. in Geomech.* Nagoya 1985, Kawamoto T. and Ichikawa Y. Eds., Rotterdam, 1985: 1311—1318
- [10] Candel S M. *J. Comput. Phys.*, 1981, 44: 243—261
- [11] Durbin F. *Comput. J.*, 1974, 17: 371—376
- [12] Eringen A C and Suhubi E S. *Elastodynamics* (Vol. II)—*Linear Theory*, Academic Press, N. Y. 1975
- [13] Pekeris C L and Lifson H. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1957, 29: 1233—1238

SINGULAR SOLUTIONS OF AXISYMMETRIC ELASTODYNAMIC PROBLEM FOR MULTILAYERED HALFSPACE

Zeng Sanping Cao Zhiyuan

(Department of Engineering Mechanics, Tongji University, Shanghai)

Abstract In the paper, the singular solutions of axisymmetric elastodynamic problem for the multilayered halfspace due to unit dynamic load acting within layered media are derived in time domain with the aid of Laplace-Hankel mixed transforms and transfer matrix method. A numerical computation of these solutions is also proposed using a fast Hankel transform algorithm. Two examples show that the solutions can be readily evaluated and the numerical results have considerably high precision. The presented solutions can be directly applied to determine the transient waves caused by seismic sources and show the potential application to problems of elastodynamics solved by boundary integral method.

Key words singular solution, layered media, fast Hankel transform, transfer matrix method