

从具体例子看惯性流形概念的推广*

刘曾荣

徐振源**

(中科院力学所 LNM 开放实验室北京, 100080) (苏州大学数学系)

摘要 惯性流形的概念要求所有轨道指数收敛于唯一吸引子[5], 这对于很多物理问题, 例如 sine-Gordon 方程是很难满足的[4], 本文中给出的人工例子建议了惯性流形的推广形式, 这个推广形式去掉了整体吸引子唯一的预先要求, 该推广概念使用于 sine-Gordon 方程。

关键词 无穷维动力系统, 惯性流形, 广义惯性流形, 吸引子

一、引言

非线性科学研究重点已经逐步由研究低维系统随时间演化的混沌现象转到了讨论高维和无穷维动力系统的时空复杂性。对于时空结构的研究, 据我们所知, 主要从两方面着手。其一是通过一些简单的高维模型进行数值和理论分析, 直接探讨高维动力系统的性质。最简单的是元胞自动机, (cellula automaton) 简称为 CA. [1]很好地总结了 CA 已有成果并提出了今后研究方向。在此基础上又提出耦合多重格 (Coupled lattice maps), 简称为 CML., 它的数值结果主要可见[2], 目前已有理论结果可见[3]。同时, 以 Bishop 为首的一批学者直接从理论和数值角度出发对 sine-Gordon 方程开展了详细研究^[4]。另一方向是从理论方面证实无穷维动力系统可以约化为有限维动力系统的可靠性, 事实上 CA、CML 对于无穷维动力系统的研究价值就是建立在这种理论上。这方面的重大进展是以 Foias 和 Témam 为首一批学者提出了无穷维动力系统中惯性流形和紧吸引子理论^[5]。

无穷维耗散动力系统的紧吸引子和惯性流形工作已经取得了重大进展, 但也不得不指出一系列由数值证实可用有限维动力系统描述的无穷维动力系统至今还没有能证明惯性流形存在, 有的甚至于可以证明不存在惯性流形, 比如弱阻尼的 Sine-Gordon 方程^[6]。这个事实本身说明现有惯性流形概念还存在某种缺陷, 为此我们提出广义惯性流形概念, 希望理论概念能够更加符合于一般无穷维动力系统的描述。

在下一节中, 我们对惯性流形有关理论作一些分析, 指出与有限维动力系统理论矛盾之处, 并指出改进方向。在第三节中以现有 sine-Gordon 方程结果为依据指出这种矛盾的客观存在性。在第四节中以一个颇为人为的例子来说明广义惯性流形存在合理性。最后一节中提出了广义惯性流形的概念并开展了一些讨论。

* 国家自然科学基金资助项目。

** 无锡轻工业学院基础部。

本文于 1991 年 8 月 2 日收到第一稿于 1992 年 1 月 12 日收到修改稿。

二、惯性流形

在某 Hilbert 空间 H 中, 考虑如下方程

$$\frac{du}{dt} + Au = f(u) \quad (2.1)$$

其中 A 为自共轭算子, 满足 $Aw_i = \lambda_i w_i$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j < \dots \rightarrow \infty$, P 是 H 投影到 $\text{Span}\{w_1, \dots, w_N\}$ 的正交投影算子, $Q = I - P$. 记 $u = p + q$, 其中 $Pu = p$, $Qu = q$. (2.1) 等价于

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} + Ap &= Pf(p+q) \\ \frac{dq}{dt} + Aq &= Qf(p+q) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

在一定条件下, (2.1) 存在惯性流形是指存在映射 $\phi: \text{Span}\{w_1, \dots, w_N\} \rightarrow H \setminus \text{Span}\{w_1, \dots, w_N\}$, 使得流形 $\mu = \{p, \phi(p)\}$ 满足如下条件:

- (1) μ 是 Lipschitz 流形;
- (2) μ 是正不变的;
- (3) μ 指数吸引所有解.

由于上述性质存在, 使得无穷维动力系统 (2.1) 可以约化为如下有限维动力系统

$$\frac{dp}{dt} + Ap = Pf[p + \phi(p)] \quad (2.3)$$

上述理论要求所有解都以指数形式收敛到惯性流形上的一个整体紧吸引子上. 按照范数定义, 从力学观点来看, 要求任一模态的解都以指数形式收敛到紧吸引子上, 这样就要求惯性流形上出发解也以指数形式收敛到唯一的紧吸引子上, 因而惯性流形理论只适用于无穷维动力系统约化为只存在唯一吸引子的有限维动力系统这一特殊情况.

由微分动力系统理论^[7]和有限维常微分方程理论, 我们可知有限维动力系统在相空间存在唯一吸引子(包括无穷远处)不是通有的, (generic). 另一方面, 从已经比较成熟的有限维系统中约化理论——中心流形理论^[8], 也只保证这种约化的低维中心流形存在, 而没有提出中心流形上只存在唯一吸引子要求. 因而我们有理由猜测惯性流形的概念应该加以推广, 使其保留无穷维可以约化为有限维这一重要本质, 又放弃在有限维上只存在唯一吸引子这样一个不十分符合实践的要求. 我们认为这样观点能解释更多的无穷维动力系统的动力学性质.

三、sine-Gordon 方程

考虑弱阻尼和外周期扰动下的 sine-Gordon 方程

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + \sin u &= \varepsilon[-\alpha u_t + F \cos \omega t] \\ u\left(x - \frac{L}{2}, t\right) &= u\left(x + \frac{L}{2}, t\right) \\ u(x, t) &= u(-x, t) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

在[4]中已经报道了取 $\varepsilon\alpha = 0.04$, $\omega = 0.87$, $L = 12$ 和初值条件在一个周期内构

成一个单峰 (Single-hump) sine-Gordon 呼吸 (breath) 情况下, 以 $\varepsilon \Gamma$ 为参数的结果. 数值计算发现, 当 $\varepsilon \Gamma \in (0, 0.150)$ 时, 时间上可以表现为各种性质, 空间结构上至多取二模态, 即空间的图案 (pattern) 取决于 Hilbert 子空间 $\text{Span}\{1, \cos kx\}$, 其中,

$$K = \frac{2\pi}{L_x}, \quad L_x = 12 \sqrt{2(1-\omega)} \simeq 6.12.$$

利用这些性质, 作者导出二模态上方程为

$$\left. \begin{aligned} -iC_T + \left(|c|^2 + \frac{1}{2}|b|^2 - 1 \right) c + \frac{1}{2} (cb^* + c^*b)b - i\tilde{\alpha}c + i\tilde{I} \\ -ib_T + \left(|c|^2 + \frac{3}{4}|b|^2 - (1+k^2) \right) b + (cb^* + bc^*)b - i\tilde{\alpha}b \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

其中 b, c 为复变量 b^*, c^* 为其共轭, $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{2(1-\omega)} \simeq 1.54$, $\tilde{I} = \frac{\varepsilon \Gamma}{8(1-\omega)^{3/2}} \simeq 2.67$

$\varepsilon \Gamma$, $T = \varepsilon t$. 通过对四维系统(3.2)的分析和数值计算得到了与(3.1)数值模拟完全相吻合的结果. 这就说明用(3.2)来描述(3.1)的合理性, (3.2)可以作为(3.1)的有限维约化系统.

如果(3.1)存在有限维惯性流形, 那么(3.2)的任一初值问题解将以指数形式收敛到一个紧吸引子. 事实上我们可以举出不具有这种性质的轨道. 由(3.2)可知 $b \equiv 0$ 满足 b 方程, 因而我们可以考虑(3.2)子系统

$$-iC_T + (|c|^2 - 1)c = i\tilde{\alpha}c + i\tilde{I} \quad (3.3)$$

令 $c = c_1 + ic_2$, 把(3.3)分解为二维实系统, 然后用定性分析方法, 分析(3.3)无穷远处的动力学性质[9], 可以很容易证明在 (c_1, c_2) 平面上位于 $\arctg(-1)$ 方向的无穷远点是一个稳定结点, 因而在该点小邻域内轨线不可能以指数形式收敛到一个有界吸引子上, (3.2)也就不可能成为反映(3.1)的动力学行为的惯性流形.

sine-Gordon 方程结果告诉我们这个无穷维动力系统具有无穷维约化为有限维特征, 但在有限维的约化系统中没有惯性流形那种唯一有界吸引子要求, 因而我们更有理由相信第二部分中观点的可靠性.

四、一个例子

本节通过一个颇为人为的例子来说明广义惯性流形的有关概念. 考虑如下系统

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + (2P_1 - P_2)\{[(P_1 + P_2)u]\cos x + (P_1 u)^2 \cos x + (1-\varepsilon)P_2 u\} \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(\pi, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

在 Sobolev 空间 $H^1(0, \pi)$ 中讨论(4.1)的解. (4.1)中 Laplace 算子的本征谱为

$$0, 1^2, 2^2, \dots, n^2, \dots \quad (4.2)$$

对应的本征函数为

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots \quad (4.3)$$

(4.1)中 P_1 是 H 到 $\text{Span}\{1\}$ 的正交投影算子, P_2 是 H 到 $\text{Span}\{\cos x\}$ 的正交投影算子, ε 为小参数.

(4.1)的一般解可以写成形式

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(t) \cos ix \quad (4.4)$$

把(4.4)代入(4.1),得到如下方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_0}{dt} &= a_1 \\ \frac{da_1}{dt} &= -a_0 + a_0^3 - \varepsilon a_1 \\ \frac{da_2}{dt} &= -4a_2 + a_0 \\ &\dots\dots \\ \frac{da_n}{dt} &= -n^2 a_n \quad (n \geq 3) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

很明显,对 $n \geq 3$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $a_n \rightarrow 0$, 故(4.1)的动力学行为是由子空间 $\text{Span}\{1, \cos x, \cos 2x\}$ 上动力学行为,其它模态都是以指数方式收敛于零。(4.1)的动力学研究可归结为对如下方程组的研究。

$$\frac{da_0}{dt} = a_1 \quad (4.6)_1$$

$$\frac{da_1}{dt} = -a_0 + a_0^3 - \varepsilon a_1 \quad (4.6)_2$$

$$\frac{da_2}{dt} = -4a_2 + a_0 \quad (4.6)_3$$

首先分析(4.6)₁、(4.6)₂, 当 $\varepsilon = 0$ 时在 (a_0, a_1) 相空间中, $(0, 0)$ 为中心, $(\pm 1, 0)$ 为鞍点, 相图见图 1, 此时存在一对连结鞍点的异宿轨道。当 $\varepsilon \neq 0$ 且充分小时, 可验证(4.6)₁、(4.6)₂ 为一耗散系统, $(0, 0)$ 为稳定焦点, $(\pm 1, 0)$ 为鞍点, 此时相图见图 2。 $\varepsilon = 0$ 时一对异宿轨道演化为一对连结 $(\pm 1, 0) \rightarrow (0, 0)$ 的螺旋型轨线。整个相空间分成三部分。 $(\pm 1, 0)$ 的不稳定流形所围区域内的点出发轨线当 $t \rightarrow \infty$ 时趋于 $(0, 0)$; 从 $(\pm 1, 0)$ 稳定流形上点出发轨线当 $t \rightarrow \infty$ 时都趋于 $(\pm 1, 0)$; 除此之外, 所有轨线当 $t \rightarrow \infty$ 时都趋于无穷。

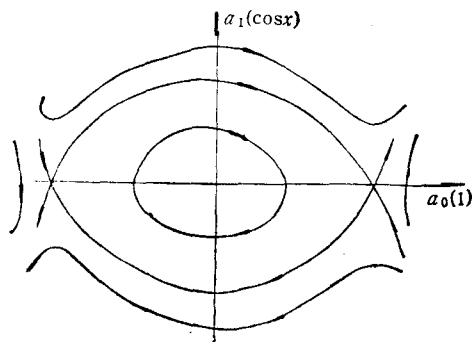


图 1

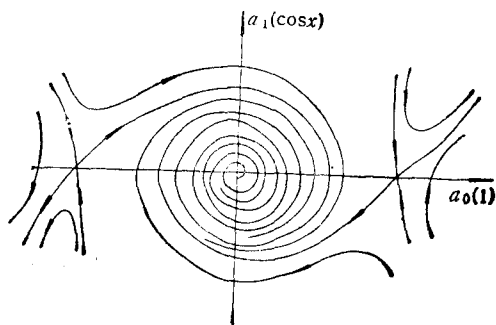


图 2

于是可以得出 a_2 的解为

$$a_2(t) = C e^{-4t} + e^{-4t} \int_0^t e^{4\tau} a_0(\tau) d\tau \quad (4.7)$$

其中 $a_0(\tau)$ 取图 2 中轨线表达形式, c 为积分常数. 利用(4.7)和上面讨论, 可以对(4.6)

作出如下分析:

(1) $(0, 0, 0)$ 为一汇, 三个本征方向为稳定;

$(1, 0, \frac{1}{4})$ 为一鞍点, 具有二维稳定流形和一维不稳定流形. 二维稳定流形是三维相空间中一个柱面, 该柱面的底是图 2 中 $(1, 0)$ 稳定流形;

$(-1, 0, -\frac{1}{4})$ 为一鞍点, 具有二维稳定流形和一维不稳定流形. 二维稳定流形是

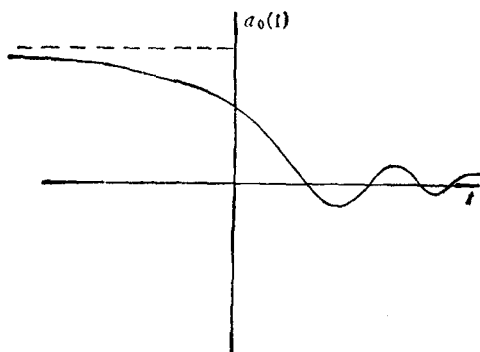


图 3

一个柱面, 其底为图 2 中 $(-1, 0)$ 的稳定流形.

(2) 由(4.7)可知, 如果初值 (a_0, a_1, a_2) 中 (a_0, a_1) 位于图 2 趋于无穷的轨线上, 必有 $t \rightarrow \infty$ 时, $a_2(t)$ 也趋于无穷.

(3) 同样也可讨论得出, 当初值 (a_0, a_1, a_2) 中 (a_0, a_1) 位于图 2 中趋于 $(0, 0)$ 的轨线上, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, 也有 $a_2(t) \rightarrow 0$.

(4) 图 2 中分别连接 $(\pm 1, 0) \rightarrow (0, 0)$ 的轨线, 对于三维系统(4.6)成为连接 $(\pm 1, 0, \pm \frac{1}{4}) \rightarrow (0, 0, 0)$ 的轨线, 分别记它们为 Γ_1 和 Γ_2 .

根据以上分析可以把(4.6)的相空间 (a_0, a_1, a_2) 划分为三个部分. 分别过鞍点 $(+1, 0, +\frac{1}{4})$ 、 $(-1, 0, -\frac{1}{4})$ 和它们稳定流形柱面之内轨线, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 都趋于 $(0, 0, 0)$; 位于柱面上轨线, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 趋于 $(\pm 1, 0, \pm \frac{1}{4})$, 在两柱面之外轨线, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 趋于无穷. 我们可以看到 $(0, 0, 0) \cup (1, 0, \frac{1}{4}) \cup (-1, 0, -\frac{1}{4}) \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ 构成相空间的一个有界紧集合. 按照 Palis[10], Guckenheimer 和 Holmes^[11], Wiggins^[12] 观点, 都无法对这个有界紧集合找到吸引邻域, 因而也就无法使得 $\text{Span}\{1, \cos x, \cos 2x\}$ 上的轨道全部以指数形式收敛到这个有限紧集合上.

以上结果表明这个无穷维动力系统可以约化为有限维动力系统问题, 有限维外出发的轨线都以指数形式收敛到有限维上, 但在有限维上动力学行为往往不是简单地全局吸引到一个有界紧吸引子上, 这些主要特征启发我们建立广义惯性流形的概念.

五、广义惯性流形以及讨论

根据以上讨论, 我们在惯性流形概念的基础上建立广义惯性流形概念.

考虑 Hilbert 空间 H 中的方程

$$\frac{du}{dt} = Au + f(u) \quad (5.1)$$

边界条件为 Dirichlet 边界条件 Neuman 边界条件或周期边界条件。设 A 为自共轭算子, 满足条件 $A\omega_j = \lambda_j\omega_j$, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots \rightarrow \infty$, $j \rightarrow \infty$. ω_j 为对应于本征值 λ_j 的本征函数。设 $H = H_1 \oplus H_2$, 其中 $H_1 = \text{Span}\{\omega_1, \dots, \omega_N\}$, $H_2 = H \setminus H_1$. 如果存在映射 $\phi: H_1 \rightarrow H_2$, 可在 H 中建立图象 $\mu = \{p + \phi(p)\}$, 其中 $p \in H$ 使得一切初值位于图象 μ 外的轨道都以指数方式收敛于 μ , 称 μ 为(5.1)的广义惯性流形。按照这样定义, 前两节中例子中都存在广义惯性流形, 但不存在惯性流形。

如果(5.1)有广义惯性流形, (5.1)可以约化为有限维动力系统

$$\frac{dp}{dt} = Ap + Pf(p + \phi(p)) \quad (5.2)$$

其中 $p \in H_1$, P 为 $H \rightarrow H_1$ 的正交投影算子。在我们定义中对 μ 上动力学行为没有作任何限制, 因而可以用来讨论更为丰富现象, 比如 sine-Gordon 方程。

结合例子, 我们可以就广义惯性流形作出如下讨论:

(1) 广义惯性流形比 Galerkin 方法能更好反映无穷维动力系统的时空性质。如果我们对(4.1)取二模截断, 可得方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_0}{dt} &= a_1 \\ \frac{da_1}{dt} &= -a_0 + a_0^3 - \varepsilon a_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

(5.3)的终态解只能取 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$ 中一个, 加入空间结构后, 原无穷维动力系统解为:

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= 0 \\ u(x, t) &= 1 \\ u(x, t) &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

它反映了无穷维动力系统的终态在时间上是定态, 空间上是均匀的解。如果按广义惯性流形概念, (4.1)的终态解可能为

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= 0 \\ u(x, t) &= 1 + \frac{1}{4} \cos 2x \\ u(x, t) &= -1 - \frac{1}{4} \cos 2x \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

(5.5)中后两种解反映为时间上是定常态, 空间上为周期的时-空态。可见广义惯性流形能比 Galerkin 方法更好反映空间结构。

(2) 分形

利用广义惯性流形定义可以在无穷维动力系统中引入分形概念。以(4.1)为例, 取初值为

$$u(x, 0) = u_0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i0} \cos ix \quad (5.6)$$

由 a_{i0} 决定了物理空间的一个初速状态。对于 $i \geq 3$, 系数 a_{i0} 在随时间演化过程中都以指数方式衰减为零, 系数 (a_{00}, a_{10}, a_{20}) 在两个稳定流形的柱面之内, 最终收敛到平凡态, 如果在柱面外将趋于无穷远, 如果在两个柱面上最终将出现时间上为定态, 空间上为周期的时空结构。从现有理论结果可知, 这两个稳定流形的柱面本身应该是一个分形结构^[11-13], Mandelbrot^[14] 提出的分形理论应当适用于无穷维动力系统。

(3) 类孤子 (Soliton-like) 解

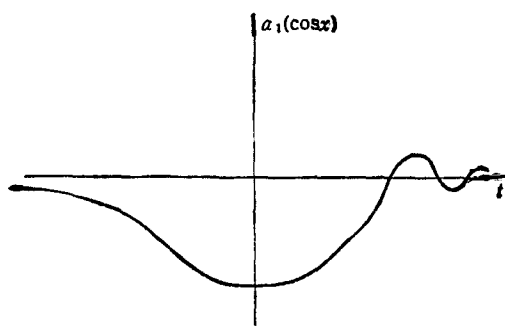


图 4

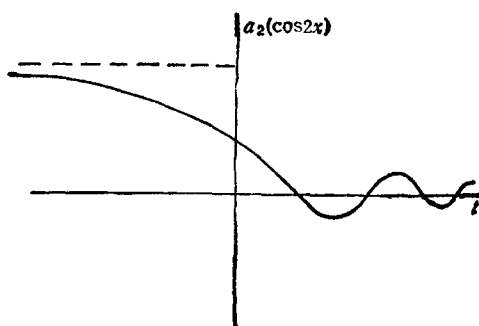


图 5

我们专门讨论一下(4.6)给出轨道 Γ_1 和 Γ_2 , 图 3—5 给出 Γ_1 和 Γ_2 的各个分量随时间演化规律, 从图中我们可以看出这类解称为类孤子解。

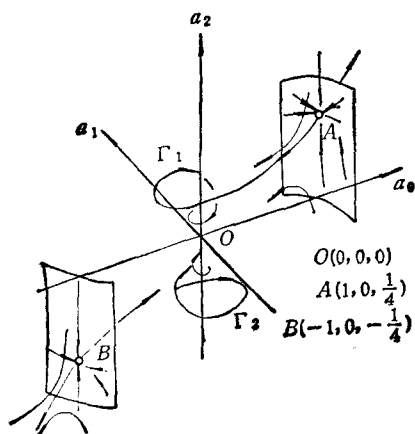


图 6

现有结果告诉我们^[15]: 类孤子解, 尤其是尾巴带有振荡型类孤子解的相互作用对于无穷维动力系统的复杂性质有密切关系。由于我们的例子是人为的, 因而没能讨论这类解之间相互作用。在实际的偏微分方程中这类解^[16]是相当多的, 在数值上也开始讨论它们之间相互作用。

(4) 由于上节例子是完全人为, 因而给出的广义惯性流形是完全平坦的。在实际问题中, 由于非线性相互作用, 这种完全隔离模态之间联系情况是不太可能的, 因而广义惯性流形

一般来讲不可能是平坦的, 是一个复杂流形, 这给数学上处理带来很大困难。可是, 在实际问题上, 高模态在经历充分长时间后往往是充分小的^[17], 这个严格的数学结论促使我们考虑通过适当数学技巧来处理广义惯性流形, 为此我们已经完成对 sine-Gordon 方程的高模态的量级估计^[18], 将进一步利用渐近方法开展对 sine-Gordon 方程的广义惯性流形的讨论。

参 考 文 献

- [1] Gutowitz H A et al. Cellular Automata: Theory and Experiment Editor: H. A. Gutowitz, Physica D45, 1990.
- [2] Kaneko K. Physica D41, 1990.
- [3] Volevich V L. *Nonlinearity*, 1991 4. 1: 37—48
- [4] Bishop A R Flesch R Forest M G McLaughlin D W and Overman E A. *SIAM. J. Math. Anal.* 1990 21. 6: 1511—1536
- [5] Temam R. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics Appl. Math. Series, 1988 68, Springer-Verlag, New York.
- [6] Mora X and Solia-Morales J Existence and Non-existence of Finite-dimensional Globally Attracting Invariant Manifolds in Semilinear Damped Wave Equations. Universidad Autonoma de Barcelona July 1986, Preprint.
- [7] 张筑生, 微分动力系统原理, 科学出版社, 1988.
- [8] Carr J. Applications of Centre Manifold Theory. Appl. Math. Sci., 1981 35, Springer-Verlag, New York.
- [9] 张锦炎, 常微分方程几何理论与分支问题. 北京大学出版社, 1981.
- [10] Palis J and Melo W. de Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction, Springer-Verlag, New York 1982
- [11] Guckenheimer J and Holmes P. Nonlinear Oscillations. Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Appl. Math. Sci., 1983 42 Springer-Verlag, New York.
- [12] Wiggins S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamics Systems and Chaos Text in Appl. Math 1990 2 Springer-Verlag, New York
- [13] Grebogi C McDonald S W Ott E and Yorke J A, Phys. Lett. 1983 99A. 9: 415—418.
- [14] Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature, 1983, Freeman, San Francisco.
- [15] Kuusela T and Hietarinta J. Physica D46, 1990, 1—9.
- [16] Ercolani N M, Forest M G and McLaughlin D W. Physica D43, 1990: 349—384.
- [17] Foias C, Sell G R. and Titi E S Dyna J and Eqs Diff. 1989, 1.2: 199—244.
- [18] 徐振源, 刘曾荣, Sine-Gordon 方程的渐近惯性流形, 待发表于科学通报.

EXTENSION OF THE INERTIAL MANIFOLD CONCEPT AS SUGGESTED BY A SPECIAL CASE

Liu Zhenrong

(L. N. M Institute of Mechanics Chinese Academy of Sciences
Suzhou University, Beijing, 100080)

Xu Zhengyuan

(Wuxi Institute of Light Industry)

Abstract The concept of inertial manifold^[1] requires exponential convergence of all trajectories to a unique attractor, which can hardly be satisfied in many physical problems, e.g. the sine-Gordon equation^[4]. Properties of an artificial example in the paper suggest a generalized form of inertial manifold, which cancels the prerequisite that the global attractor is unique. This generalized concept is used to the sine-Gordon equation.

Key words Infinite dimension dynamical systems, inertia current manifolds, generalized manifolds, attractors