第24卷 第4期　　力 学 学 报　　Vol. 24, No. 4
1992 年 7 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　July, 1992

互等定理与共轭辛正交关系

钟 万 勰
(大连理工大学工程力学研究所，116024 大连)

提要 本文指出，哈密尔顿矩阵的本征向量间的辛正交关系可以由结构力学的互等性定理导出．尤其当哈密尔顿矩阵出现多重本征根以及约当（Jordan）型时，本文指出了使约当型保持哈密尔顿矩阵结构形式不变的变换；并且证明了对于次本征向量的恰当选择可以使各个(次)本征向量之间仍保持共轭辛正交归一关系.

关键词 互等定理;哈密尔顿矩阵;本征值问题/辛

哈密尔顿矩阵在弹性力学[1]、结构力学[2]与最优控制[3]等领域中有广泛的应用。在求解系统的方程组时，哈密尔顿矩阵的本征解是很重要的．这些本征解相互间有共轭辛正交关系[1,4]，这对于辛子空间迭代法以及按横向本征向量展开求解是一个关键的性质．Hamilton 矩阵的这一重要性质可用于构造新的解析解法和半解析解法。

如所熟知，哈密尔顿矩阵 $\boldsymbol{H}$, $2n\times 2n$ 维，有 $2n$ 个本征根，其中包括重根．如果 μ 是本征根，则 $-\mu$ 一定也是本征根．在文[1,4]中已经证明，如果这些本征根都是单重的，则其相应的本征向量之间有共轭辛正交的性质，并且还可以将互相共轭的一对本征向量予以辛归一化。这样，以这些本征向量作为列，恰当按顺序编排后得到一个 $2n\times 2n$ 的辛矩阵。冯康首先指出了计算哈密尔顿系统时辛算法的极端重要性[5].

然而哈密尔顿矩阵是一个不对称实型矩阵，完全可能出现重根，当然还可能出现约当(Jordan)型的矩阵分解[6]．这一点与对称正定矩阵完全不同．此时对于 p 重本征根 μ 可能只存在一个本征向量，而其余 $p-1$ 个向量应当由约当型逐步求解，可以称之为**次本征向量**．此时，以这些向量作为列来组成一个方矩阵是否依然保持为辛矩阵呢？这是本文要论述的主要内容.

辛正交关系是一个数学的命题，在结构力学中相应的提法是互等定理．这个提法在物理上更清楚.

线性哈密尔顿体系的方程可以写成为(•代表对 t 求导)

$$\dot{v}=Hv,\quad v=\begin{bmatrix}x\\ n\end{bmatrix}\tag{1}$$

其中

$$H=\begin{bmatrix}F & -G\\ -Q & -F^T\end{bmatrix}\tag{2}$$

本文于 1991 年 7 月 19 日收到第一次稿，于 1992 年 1 月 5 日收到修改稿.

是哈密尔顿矩阵，而 Q 与 G 乃是 $n\times n$ 的对称矩阵。哈密尔顿矩阵的结构已体现在(2)式之中。因此有

$$JHJ=H^T,\quad J=\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix},\quad J^T=J^{-1}=-J \tag{3}$$

方程(3)也可作为哈密尔顿矩阵的定义。系统方程(1)存在相应的变分原理

$$\delta\int_0^h\{\boldsymbol{n}^T\dot{\boldsymbol{x}}-\mathscr{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})\}dt=0 \tag{4}$$

其中
$$\mathscr{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{n})=\boldsymbol{n}^TF\boldsymbol{x}-\frac{1}{2}\boldsymbol{n}^TG\boldsymbol{n}+\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^TQ\boldsymbol{x} \tag{5}$$

方程(1)就是哈密尔顿正则体系[7]

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\partial\mathscr{H}/\partial\boldsymbol{n};\quad \dot{\boldsymbol{n}}=-\partial\mathscr{H}/\partial\boldsymbol{x} \tag{6}$$

首先证明互等定理。设有二组系统方程(1)的解

$$\dot{\boldsymbol{v}}_1=H\boldsymbol{v}_1;\quad \dot{\boldsymbol{v}}_2=H\boldsymbol{v}_2 \tag{7a,b}$$

将(7a)式左乘 $\boldsymbol{v}_2^TJ$，并对 t 在$(0,h)$积分，有

$$\begin{aligned}\int_0^h\boldsymbol{v}_2^TJ\dot{\boldsymbol{v}}_1dt&=\int_0^h\boldsymbol{v}_2^TJH\boldsymbol{v}_1dt=-\int_0^h\boldsymbol{v}_2^TH^TJ\boldsymbol{v}_1dt\\&=-\int_0^h(J\boldsymbol{v}_1)^TH\boldsymbol{v}_2dt=\int_0^h\boldsymbol{v}_1^TJH\boldsymbol{v}_2dt\end{aligned}$$

另一方面，又有

$$\begin{aligned}\int_0^h\boldsymbol{v}_2^TJ\dot{\boldsymbol{v}}_1dt&=-\int_0^h\dot{\boldsymbol{v}}_2J\boldsymbol{v}_1dt+[\boldsymbol{v}_2^TJ\boldsymbol{v}_1]_0^h\\&=[\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2^T\boldsymbol{x}_1]_0^h+\int_0^h\boldsymbol{v}_1^TJ\dot{\boldsymbol{v}}_2dt\end{aligned}$$

将以上推导与(7b)式可导出的公式相综合，有

$$[\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2^T\boldsymbol{x}_1]_0^h=0 \tag{8}$$

这便是互等定理。按结构力学的提法，将 $\boldsymbol{n}$ 解释为内力*而 $\boldsymbol{x}$ 为位移，则 $[\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{n}_1]_0^h=[\boldsymbol{n}_1^T\boldsymbol{x}_2]_0^h$ 是状态 1 的内力对于状态 2 的位移所做的功；而 $[\boldsymbol{n}_2^T\boldsymbol{x}_1]_0^h$ 则是状态 2 的内力对于状态 1 的位移所做的功。方程(8)显然就是相互做功相等之意。在经典力学中则称为 Helmholtz 互等定理[7]。

对于 2 组单重本征解 $H\boldsymbol{Y}_i=\mu_i\boldsymbol{Y}_i$，$(i=1,2)$，有

$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{Y}_1e^{\mu_1t},\quad \boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{Y}_2e^{\mu_2t},\quad \boldsymbol{Y}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_i\\ \boldsymbol{n}_i\end{bmatrix} \tag{9}$$

以此代入方程(8)，有

$$(\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2^T\boldsymbol{x}_1)(e^{(\mu_1+\mu_2)h}-1)=0$$

故：　如 $\mu_1+\mu_2\neq0$，则必 $\boldsymbol{x}_2^T\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{n}_2^T\boldsymbol{x}_1=0$　(10)

这就是共轭辛正交关系。在[1]中，这个辛正交关系是通过本征解的方程推出的。下面要将互等定理(8)用于有重根的情形。

* 将条形结构切开取其一侧，其切面上的内力就成为外力。

先认为这个重本征根 μ 不是零. 此时按哈密尔顿矩阵的特点可知，如果 μ 是 H 阵的 p 重根，则 $-\mu$ 也必是 H 阵的 p 重根. μ 不是零根意味着 μ 与 $-\mu$ 不等. 设它们出现了 p 重的约当形式. 于是按约当标准型的表达方式[6]有

$$
\begin{array}{ll}
a\ 组：HY_{a1}=\mu Y_{a1} & b\ 组：HY_{b1}=-\mu Y_{b1} \\
HY_{a2}=\mu Y_{a2}+Y_{a1}, & HY_{b2}=-\mu Y_{b2}+Y_{b1} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
HY_{ap}=\mu Y_{ap}+Y_{a(p-1)}, & HY_{bp}=-\mu Y_{bp}+Y_{b(p-1)}
\end{array}
\tag{11a,b}
$$

这相当于矩阵块

$$
a\ 组：\begin{bmatrix} \mu & 1 & & 0 \\ & \mu & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & \mu \end{bmatrix}
\qquad
b\ 组：\begin{bmatrix} -\mu & 1 & & 0 \\ & -\mu & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & -\mu \end{bmatrix}
\tag{12a,b}
$$

然而本征值 μ 与 $-\mu$ 应当是互相共轭的两组. 当哈密尔顿矩阵 $\boldsymbol{H}$ 变换到分块对角形式时，应当保持其结构形式(2)不变. 方程(11)(12)的形式显然不符合于结构形式(2). 对此，应当作以下变换

$$
Y_{b1}\ 不变，Y'_{b2}=-Y_{b2},\cdots,Y'_{bj}=(-1)^{j+1}Y_{bj}\ (j=1,2,\cdots,p)
\tag{13}
$$

然后再将(11b)方程的编排次序倒过来,即有

$$
\begin{aligned}
&HY'_{bp}=-\mu Y'_{bp}-Y'_{b(p-1)} \\
&\cdots \\
&HY'_{b1}=-\mu Y'_{b1}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

相应的矩阵块为

$$
\begin{bmatrix} -\mu & & & \\ -1 & -\mu & & \\ & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & -1 & -\mu \end{bmatrix}
\tag{15}
$$

如将(12a)当成 F 阵,则(15)式正是 $-F^T$，符合于哈密尔顿矩阵的结构性质. 下文认为已完成了变换(13),将上标'取消. 根据方程(11a),可以写出系统方程(1)的解

$$
v_{a1}=e^{\mu t}Y_{a1},\ v_{aj}=e^{\mu t}\cdot\sum_{k=1}^{j}Y_{ak}t^{(j-k)}/(j-k)!\ (j=1,2,\cdots,p)
\tag{16}
$$

对于方程(14),也可以写出系统方程(1)的解

$$
v_{b1}=e^{-\mu t}Y_{b1},\ v_{bj}=e^{-\mu t}\cdot\sum_{k=1}^{j}Y_{bk}(-t)^{(j-k)}/(j-k)!\ (j=1,2,\cdots,p)
\tag{17}
$$

现在对于解 v_{a1} 与 v_{bp} 运用互等定理,可推出

$$
x_{a1}^T n_{bj}-n_{a1}^T x_{bj}=0,\ j=1,2,\cdots,p-1
\tag{18}
$$

即 Y_{a1} 与对偶的其余向量 Y_{bj} 辛正交. 对于 Y_{bp}，则总可以选择任意的常数因子，达到归一化

$$x_{a1}^T n_{bp} - n_{a1}^T x_{bp} = 1 \tag{19}$$

在此基础上，将 v_{a2} 与 $v_{b(p-1)}$ 运用互等定理，可得

$$x_{a_2}^T n_{bj} - n_{a_2}^T x_{bj} = 0, \quad j = 1,2,\cdots,P-2 \tag{20}$$

再对 V_{a2} 与 V_{bp} 运用互等定理，利用方程(18)～(20)，有

$$x_{a2}^T n_{b(p-1)} - n_{a2}^T x_{b(p-1)} = 1 \tag{21}$$

从方程(11a)可以看出，Y_{a2} 中可以任意加一个 Y_{a1} 乘常数的项，因此总可以选择得以使

$$x_{a2}^T n_{bp} - n_{a2}^T x_{bp} = 0 \tag{22}$$

以下可以引用辛乘积来表示，即 $x_a^T n_b - n_a^T x_b = Y_a^T J Y_b$. 对于 Y_{a3} 的辛正交关系，可以先对 v_{a3} 与 $v_{b(p-2)}$ 运用互等定理，导出 $Y_{a3}^T J Y_{bj} = 0$，$(j = 1,2,\cdots,p-3)$；再对 v_{a3} 与 $v_{b(p-1)}$ 运用互等定理，可得辛归一关系 $Y_{a3}^T J Y_{b(p-2)} = 1$；再对 v_{a3} 与 v_{bp} 运用互等定理，即可导出 $Y_{a3}^T J Y_{b(p-1)} = 0$；再由于 Y_{a3} 也可以任意加一项 Y_{a1}，因此总可以使 $Y_{a3}^T J Y_{bp} = 0$. 至此 Y_{a3} 对于 b 组中任意向量的共轭辛正交归一关系也已验证完毕. 以此类推，可以验证任一个 Y_{ai} 与 Y_{bj} 的共轭辛正交归一关系. 在验证互等定理时，以下恒等式

$$\frac{2}{(2m)!} - \frac{2}{(2m-1)!} + \frac{2}{2!(2m-2)!} - \frac{2}{3!(2m-3)!} + \cdots + \frac{1}{(m!)^2} = 0 \tag{23}$$

是有用的，式中 m 是任意整数. 这可从 $(1-1)^{2m} = 0$ 导出.

这样，方程(11a)与(14)的次本征向量相互间存在共轭辛正交关系. 可以表达为

$$Y_{ai}^T J Y_{bj} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{当 } j \ \substack{\neq \\ =} \ (p+1-i) \text{ 时} \quad (i,j = 1,2,\cdots,p) \tag{24}$$

上式中，向量下标只是针对 p 重本征根 μ 及 $-\mu$ 排列的，并未与其它本征值的本征向量一起编排. 至于同一组的 Y_{ai} 与 Y_{aj} 及 Y_{bi}，Y_{bj} 相互间都辛正交，也可由互等定理推出. 对于不同本征根所相应的次本征向量及本征向量，当然也可由互等定理验证其辛正交了.

至此已经明确，在没有零本征值时，哈密尔顿矩阵的(次)本征向量阵是一个辛矩阵. 其中重本征值时 Y_{bj} 的编排应当逆向，以保证总体编排中 i 与 $n+i$ 的向量共轭.

以上的这些证明也可以直接从方程 (11a) (14) 作出.

哈密尔顿矩阵完全可能产生零本征值. 由于H阵结构的特点，零本征值一定是偶数重的. 这些零本征解一般会出现约当型的矩阵分解. $\mu = 0$ 本征值的特点是互相共轭的本征值 μ 与 $-\mu$ 相同，因此互相辛共轭的次本征向量可以在同一个约当块之内. 设若零本征值有二个约当型的块，则一般来说，这二块也分别是偶数维的.

设有一组零本征值的约当型是 $2m$ 重的，则为了保持哈密尔顿矩阵的结构特点，可以通过与式(13)类同的方法作出变换，并重新编排，必定可以化成为

a 组：$HY_1 = 0$ (25a)

$HY_j = Y_{j-1}$，$(j = 2,3,\cdots,m)$ (25b)

$HY_m = Y_{m-1}$ (25m)

b 组：$HY_{m+1} = -Y_{m+2}$ (26a)

$HY_{m+j} = -Y_{m+j+1}$，$(j = 1,\cdots,m-1)$ (26b)

$HY_{2m-1} = -Y_{2m}$ (26c)

$HY_{2m} = \pm Y_m$ (26m)

将以上二套公式用矩阵来表示，显然符合哈密尔顿矩阵的结构规则(2). 注意由于式(26m)，次对角块的 $m\times m$ 阵并不是零阵，这是完全不同于 $\mu\neq 0$ 的情况的. $\boldsymbol{Y}_1\sim\boldsymbol{Y}_m$ 相当于 a 组解，$\boldsymbol{Y}_{m+1}\sim\boldsymbol{Y}_{2m}$ 相应于 b 组解，它们是同一个约当块的. 现在要验明其共轭辛正交归一关系. 将方程(26)的任一式左乘 $\boldsymbol{Y}_1^TJ$，有如下运算 $-\boldsymbol{Y}_1^TJ\boldsymbol{Y}_{m+j+1}=\boldsymbol{Y}_1^TJH\boldsymbol{Y}_{m+j}=-\boldsymbol{Y}_1^T(JHJ)J\boldsymbol{Y}_{m+j}=-\boldsymbol{Y}_1^TH^TJ\boldsymbol{Y}_{m+j}=\boldsymbol{Y}_{m+j}^TJH\boldsymbol{Y}_1=0$，故有

$$\boldsymbol{Y}_{m+j}^TJ\boldsymbol{Y}_1=0,\ j=0,2,3,\cdots,m \tag{27}$$

与 $\boldsymbol{Y}_1$ 互相辛共轭归一的只是是 $\boldsymbol{Y}_{m+1}$. 调整 $\boldsymbol{Y}_1$ 的任意常数，以及式(26m)中的 ± 号，总可以有

$$\boldsymbol{Y}_1^TJ\boldsymbol{Y}_{m+1}=1 \tag{28}$$

将 $\boldsymbol{Y}_{2m}^TJ$ 左乘(25)各式并顺次执行，利用(26m)，有

$$\boldsymbol{Y}_j^TJ\boldsymbol{Y}_m=0,\ (j=1,2,\cdots,m) \tag{29}$$

将 $\boldsymbol{Y}_j^TJ(j=2,\cdots,m)$ 左乘(25a)式，并利用(25)各式，有

$$\boldsymbol{Y}_1^TJ\boldsymbol{Y}_j=0,\ (j=1,2,\cdots,m) \tag{30}$$

至此，$\boldsymbol{Y}_1$ 与其他向量的共轭辛正交归一已验明. 在此基础上可逐步推出，a 组的次本征向量互相辛正交，

$$\boldsymbol{Y}_i^TJ\boldsymbol{Y}_j=0\ (i,j\leqslant m) \tag{31}$$

现在探究 a 组与 b 组向量的相互关系，利用方程(27)与(28)，将 $\boldsymbol{Y}_{m+j}^TJ(j=1,2,\cdots,m-1)$ 左乘 (25b) 式中的 $j=2$，有

$$\boldsymbol{Y}_2^TJ\boldsymbol{Y}_{m+2}=1,\ \boldsymbol{Y}_2^TJ\boldsymbol{Y}_{m+j}=0\ (j=3,\cdots,m),\ \text{同理}$$

$$\boldsymbol{Y}_i^TJ\boldsymbol{Y}_{m+i}=1,\ \boldsymbol{Y}_i^TJ\boldsymbol{Y}_{m+j}=0\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=i+1,\cdots,m) \tag{32}$$

在式(32)中，$j<i$ 时的辛正交关系还有待验证. 注意式(25a)，知 $\boldsymbol{Y}_j(j=2,\cdots,2m)$ 是可以任意加一项常数乘以 $\boldsymbol{Y}_1$ 的，因此总可以选择得使

$$\boldsymbol{Y}_i^TJ\boldsymbol{Y}_{m+1}=0\ (i=2,\cdots,2m) \tag{33}$$

在此基础上容易推出

$$\boldsymbol{Y}_i^TJ\boldsymbol{Y}_{m+j}=0\ (i=1,2,\cdots,m,\ j\neq i) \tag{32'}$$

于是 a 组与 b 组解的共轭辛正交关系已经得出.

还有 b 组解相互间的辛正交关系. 将 (26m) 式左乘 $\boldsymbol{Y}_{m+j}^TJ$，其右侧已证明为零，故可导出 $\boldsymbol{Y}_{2m}^TJ\boldsymbol{Y}_{m+j+1}=0,\ (j=1,\cdots,m-1)$. 逐步递推，并再注意方程(33)，可以得知，$b$ 组解相互间确是辛正交的. 至此已经证明，当有零本征值出现时，只要恰当选择(25)、(26)求解时的常数，其(次)本征向量阵也是辛正交归一的. 这个结论也可由互等定理推出.

至于不互相共轭的本征值的本征向量，由互等定理马上可推知，它们应当互相辛正交. 对于同一对本征值的不同约当块，则本来就应当在互相辛正交的子空间内建立其约当型的基底向量的.

综上所述，可得结论：对于任一哈密尔顿矩阵 H，总可由 H 的本征向量(及次本征向量)的恰当组合，得到一组辛正交归一基底；由这些基底组成的辛阵 S 将可通过相似变换 $S^{-1}HS$，达到将 H 阵化归保持哈密尔顿矩阵结构的修改约当型的矩阵标准型.

参　考　文　献

[1] 钟万勰．条形域平面弹性问题与哈密尔顿体系．大连理工大学学报．1991,31,(4)

[2] 钟万勰,钟翔翔．计算结构力学,最优控制及偏微分方程半解析法．计算结构力学及其应用,1990,7,(1).

[3] Stengel R F. Stochastic optimal control, 1986, Wiley, NY.

[4] Zhong Wanxie, Zhong Xiangxiang. On the adjoint Simplectic inverse substitution method for main eigensolutions of a large Hamiltonian matrix. *Journ. of Systems Eng.* 1(1) 1991

[5] Feng Kang On difference schemes and simplectic geometry Proc. of the Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations—Computation of Partial Differential Equations ed. Feng Kang Science Press Beijing 1985, 42—58

[6] Pease M C. III: Methods of matrix algebra. Academic Press, NY. 1965

[7] Whittaker E T. A treatise on the analytical dynamics. Cambridge Univ. Press. 4th ed. 1960

ON THE RECIPROCAL THEOREM AND ADJOINT SIMPLETIC ORTHOGONAL RELATION

Zhong Wanxie

(Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian, China, 116024)

Abstract The paper indicates that the simpletic orthogonal relation among eigenvectors of a Hamiltonian matrix can be derived by the reciprocal theorem of structural mechanics. It also presents the transformation which makes a Jordan-type matrix preserve the structure of a Hamiltonian matrix and proves that suitable arrangement of secondary eigenvectors keeps simpletic orthogonality among them.

Key words reciprocal theorem, hamiltonian matrix, eigen-problem/simpletic