

脆性断裂的非局部力学理论

程 品 三

(中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放研究实验室, 北京, 100080)

摘要 本文提出一种脆性材料断裂的非局部力学理论, 内容包括: I、II、III 型 Griffith 裂纹的非局部弹性应力场, 裂纹尖端邻域非局部弹性应力场的渐近形式, 脆性开裂的最大拉应力准则。文中给出了这种理论应用于三种基本型裂纹和 I-II、I-III 复合型裂纹临界开裂条件的计算结果, 并把它们与一些试验资料和最小应变能密度因子理论进行了对比。

关键词 脆性断裂, 非局部弹性力学, 最大拉应力准则

一、引言

脆性材料的宏观断裂理论, 由于 Griffith, Orowan, Irwin 和 Sih 等人的出色工作, 已经获得了巨大的成功。随着高技术陶瓷等新型材料的出现, 特别是脆性材料增韧机理的研究, 人们正努力从微观力学机理上研究宏观断裂现象。建立宏观与微观相结合的断裂理论, 一方面需要发展能反映材料微观力学性质的连续介质力学理论, 另一方面需要把诸如应力强度因子准则、 J 积分准则的宏观断裂准则与材料的微观断裂机理联系起来。本世纪七十年代发展起来的非局部力学理论^[1-3] 成功地把宏观连续介质力学与分子动力学联结起来, 因此它能够满足上述第一方面的需要。本文旨在研究第二方面的需要, 即通过对宏观裂纹的非局部弹性分析, 建立脆性材料断裂的非局部力学理论。

用非局部力学理论研究裂纹问题, 起始于非局部力学理论的创立者之一 A. C. Eringen。他和他的同事们研究了三种基本型 Griffith 裂纹问题, 得到了两个引人注目的结论^[4-6]。一是裂纹尖端邻域的非局部应力场是有限的, 二是以裂尖有限应力达到理想断裂强度为开裂准则能得到与宏观断裂理论相一致的结果。1983 年, 苗天德做了与 Eringen 等人相近的工作^[7]。1984 年, 虞吉林、郑哲敏进一步应用非局部弹塑性理论研究了延性材料的断裂问题^[8]。在这些工作中, 裂纹的非局部应力场都是数值形式, 没有得到系统建立材料断裂的非局部力学理论所必需的解析形式的应力场。1988 年, 作者首次给出了 I 型 Griffith 裂纹的非局部弹性应力场的解析形式^[9], 为研究 I 型裂纹的非局部弹性断裂理论提供了基础。本文首先简要介绍非局部弹性理论, 然后给出 I、II、III 型裂纹、裂纹的非局部弹性解析应力场和它们在裂纹尖端邻域的渐近形式, 最后提出脆性材料开裂的最大拉应力准则及其在几种典型裂纹情况下的具体形式。

本文于 1990 年 7 月 31 日收到第一稿, 10 月 15 日收到修改稿。

二、非局部弹性理论

非局部弹性理论^[1,2]是经典弹性理论的扩充和发展。对均匀各向同性介质的小变形问题,非局部弹性理论的运动方程和几何方程与经典弹性理论的完全一样,即

$$\tau_{ij,i} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,i} + u_{j,j}) \quad (2)$$

其中 u_i 为位移, e_{ij} 为应变, τ_{ij} 为非局部应力, f_i 为体力, ρ 为密度。

非局部弹性理论的基本特征在于它的本构关系为

$$\tau_{ij}(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \varepsilon) (\lambda e_{kk}(\mathbf{x}') \delta_{ij} + 2 \mu e_{ij}(\mathbf{x}')) dV(\mathbf{x}') \quad (3)$$

其中 λ, μ 为 Lamé 常数, δ_{ij} 为 Kronecker δ , V 为物体域, $\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \varepsilon)$ 为材料函数,称之为非局部弹性核, ε 为表征材料微结构效应的小参数。

记 σ_{ij} 为经典弹性理论中的 Cauchy 应力,则(3)与 Hooke 定律

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu e_{ij} \quad (4)$$

有关系

$$\tau_{ij}(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \varepsilon) \sigma_{ij}(\mathbf{x}') dV(\mathbf{x}') \quad (5)$$

因此可以看出,非局部弹性理论与经典弹性理论之间有两个基本差别。一是应力概念不同。经典弹性理论中的 Cauchy 应力为作用在单位面积上的力,而非局部弹性理论中的非局部应力为穿过单位面积上的力。二是应力与应变在物质空间中的对应关系不同。Hooke 定律表明应力与应变在物质点上——对应,而非局部本构关系认为非局部应力与所有物质点的应变相关。这两个差别体现出非局部力学理论反映了材料微观结构具有的长程力学效应。同时,从式(5)看出,非局部应力为 Cauchy 应力的加权平均,权函数为非局部弹性核。

非局部弹性核虽然能以分子动力学中的分子作用势表示出来^[2],但目前还没有找到理论上可靠、实用上方便的函数形式。通常确定非局部弹性核的方法是,先以一致性条件

$$\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \varepsilon)|_{\varepsilon \rightarrow 0} = \delta(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|) \quad (6)$$

(δ 为 Dirac 函数)选择一个含有待定常数的随两点距离 $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|$ 迅速衰减的函数,然后将由这个函数所导出的非局部弹性波的弥散关系与分子动力学中的波弥散关系进行拟合,确定待定常数。将式(6)代入式(5)或(3),可以看到这个一致性条件的含义是当不考虑材料微观结构的长程力学效应时,非局部弹性理论就成为经典弹性理论。

对平面力学问题,作者用上述方法导出了一种非局部弹性核^[3],即

$$\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \varepsilon) = \frac{2\varepsilon^4}{\pi(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2 + \varepsilon^2)^3} \quad (7)$$

其中的小参数 $\varepsilon = a/2$, a 为晶格常数。

三、I、II、III 型 Griffith 裂纹的非局部弹性应力场

所谓 Griffith 裂纹问题,是指无限大平面物体中含有一个在无限远处或在裂纹面上

受均匀荷载的裂纹问题。对这种裂纹问题, Eringen 证明非局部弹性理论的场方程相同于经典弹性理论的场方程^[10]。因此, 应用 Fourier 变换方法和利用这种裂纹问题的对称性, 可以导出非局部弹性应力场的积分形式解:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= -\frac{b_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-l}^l \alpha(|x' - x|, \varepsilon) \left(1 + y' \frac{\partial}{\partial y'}\right) \\ &\quad \times \frac{x' - t}{(x' - t)^2 + y'^2} u'_t(t) dt dx' dy' \\ \tau_{xy} &= -\frac{b_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-l}^l \alpha(|x' - x|, \varepsilon) \left(y' \frac{\partial}{\partial y'}\right) \\ &\quad \times \frac{y'}{(x' - t)^2 + y'^2} u'_t(t) dt dx' dy' \\ \tau_{yy} &= -\frac{b_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-l}^l \alpha(|x' - x|, \varepsilon) \left(1 - y' \frac{\partial}{\partial y'}\right) \\ &\quad \times \frac{x' - t}{(x' - t)^2 + y'^2} u'_t(t) dt dx' dy' \end{aligned} \right\} \quad \text{(I 型)} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= -\frac{b_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-l}^l \alpha(|x' - x|, \varepsilon) \left(2 + y' \frac{\partial}{\partial y'}\right) \\ &\quad \times \frac{y'}{(x' - t)^2 + y'^2} u'_t(t) dt dx' dy' \\ \tau_{xy} &= -\frac{b_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-l}^l \alpha(|x' - x|, \varepsilon) \left(1 + y' \frac{\partial}{\partial y'}\right) \\ &\quad \times \frac{x' - t}{(x' - t)^2 + y'^2} u'_t(t) dt dx' dy' \\ \tau_{yy} &= -\frac{b_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-l}^l \alpha(|x' - x|, \varepsilon) \left(y' \frac{\partial}{\partial y'}\right) \\ &\quad \times \frac{y'}{(x' - t)^2 + y'^2} u'_t(t) dt dx' dy' \end{aligned} \right\} \quad \text{(II 型)} \quad (9)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-l}^l \alpha(|x' - x|, \varepsilon) \frac{y'}{(x' - t)^2 + y'^2} u'_t(t) dt dx' dy' \\ \tau_{yy} &= -\frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-l}^l \alpha(|x' - x|, \varepsilon) \frac{x' - t}{(x' - t)^2 + y'^2} u'_t(t) dt dx' dy' \end{aligned} \right\} \quad \text{(III 型)} \quad (10)$$

其中 $b_0 = \mu/(1 + \nu)$, ν 为泊桑比, l 为裂纹半长, $u'_t(t)$ 为裂纹面上位移的导函数, 位矢 $\mathbf{x} = xi + yj$ 和 $\mathbf{x}' = x'i + y'j$ 的原点位于裂纹中心处, x 轴平行于裂纹面。

将(7)代入(8)–(10), 积分得

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= -\frac{b_0}{\pi} \int_{-l}^l \left(1 + y \frac{\partial}{\partial y}\right) \frac{x - t}{(x - t)^2 + y^{*2}} u'_t(t) dt \\ \tau_{xy} &= -\frac{b_0}{\pi} \int_{-l}^l \left(y \frac{\partial}{\partial y^*}\right) \frac{y^*}{(x - t)^2 + y^{*2}} u'_t(t) dt \\ \tau_{yy} &= -\frac{b_0}{\pi} \int_{-l}^l \left(1 - y^* \frac{\partial}{\partial y^*}\right) \frac{x - t}{(x - t)^2 + y^{*2}} u'_t(t) dt \end{aligned} \right\} \quad \text{(I 型)} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= \frac{b_0}{\pi} \int_{-l}^l \left(2 + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{y}{(x-t)^2 + y^{*2}} u'_i(t) dt \\ t_{xy} &= -\frac{b_0}{\pi} \int_{-l}^l \left(1 + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^{*2}} u'_i(t) dt \\ t_{yy} &= -\frac{b_0}{\pi} \int_{-l}^l \left(y \frac{\partial}{\partial y^*} \right) \frac{y^*}{(x-t)^2 + y^{*2}} u'_i(t) dt \end{aligned} \right\} \text{(II 型)} \quad (12)$$

和

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= \frac{\mu}{\pi} \int_{-l}^l \frac{y}{(x-t)^2 + y^{*2}} u'_i(t) dt \\ t_{yz} &= -\frac{\mu}{\pi} \int_{-l}^l \frac{x-t}{(x-t)^2 + y^{*2}} u'_i(t) dt \end{aligned} \right\} \text{(III 型)} \quad (13)$$

其中 $y^* = \sqrt{y^2 + \varepsilon^2}$.

严格地说,应力场(11)–(13)的进一步分析需要以裂纹面上的应力条件来求出裂纹面上的位移 $u_i(x)$. 然而,至今为止非局部力学理论的应力边界提法还没有完全解决. 对于裂纹问题,“裂纹面上受均匀荷载”这个概念是适宜于经典弹性理论的 Cauchy 应力边界提法. Eringen 等人沿用这种提法,以裂纹面上的非局部应力等于常数来数值计算裂纹的非局部应力场^[4]. 但是,Atkinson 指出^[11] Eringen 等人的数值计算是不收敛的. 事实上,可以证明(见附录),如果以非局部应力在裂纹面上为常数来形成关于裂纹面上位移的方程,则对于 $\varepsilon > 0$ 这种方程是无解的. 因此,本文认为裂纹面上的应力条件应当保持通常的提法,即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yy}(x, y)|_{y=0} &= -p \quad \text{(I 型)} \\ \sigma_{xy}(x, y)|_{y=0} &= -p \quad \text{(II 型)} \\ \sigma_{yz}(x, y)|_{y=0} &= -p \quad \text{(III 型)} \end{aligned} \right\} (|x| \leq l) \quad (14)$$

由式(5)、(6)得到

$$\sigma_{ij} = t_{ij}|_{\varepsilon \rightarrow 0} \quad (15)$$

将(11)–(13)和(15)代入(14),得到关于裂纹面上位移的方程:

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{b_0}{\pi} \int_{-l}^l \frac{u'_i(t)}{x-t} dt &= -p \quad \text{(I, II 型)} \\ -\frac{\mu}{\pi} \int_{-l}^l \frac{u'_i(t)}{x-t} dt &= -p \quad \text{(III 型)} \end{aligned} \right. (|x| \leq l) \quad (16)$$

这组方程在裂纹尖端位移连续,即 $u_i(\pm l) = 0$ 的条件下有解:

$$\left\{ \begin{aligned} u_i(x) &= \frac{p}{b_0} \sqrt{l^2 - x^2} \quad \text{(I, II 型)} \\ u_i(x) &= \frac{p}{\mu} \sqrt{l^2 - x^2} \quad \text{(III 型)} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

将(17)代入(11)–(13),积分可以完全进行,得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \left(1 + y \frac{\partial}{\partial y}\right) I \\ \sigma_{xy} &= \left(y \frac{\partial}{\partial y^*}\right) J \\ \sigma_{yy} &= \left(1 - y^* \frac{\partial}{\partial y^*}\right) I \end{aligned} \right\} \quad (\text{I 型}) \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\left(2 + y \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(\frac{y}{y^*} J\right) \\ \sigma_{xy} &= \left(1 + y \frac{\partial}{\partial y}\right) I \\ \sigma_{yy} &= \left(y \frac{\partial}{\partial y^*}\right) J \end{aligned} \right\} \quad (\text{II 型}) \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right) \left(\frac{y}{y^*} J\right) \\ \sigma_{yy} &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right) I \end{aligned} \right\} \quad (\text{III 型}) \quad (20)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} I &= p \left(\sqrt{\frac{T + sR^{1/2}}{2R}} - 1 \right) \\ J &= \frac{\sqrt{2} p l^2 x y^*}{\sqrt{R(T + sR^{1/2})}} \\ s &= x^2 + y^{*2} \\ T &= (x^2 + y^{*2})^2 + l^2(y^{*2} - x^2) \\ R &= (x^2 + y^{*2})^2 + 2l^2(y^{*2} - x^2) + l^4 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

至此,我们首次得到了 I、II、III 型 Griffith 裂纹的解析形式的非局部弹性应力场。

分析 (21), 由于 $y^{*2} = y^2 + \varepsilon^2 > 0$, $s > 0$, $R > 0$ 且 $T + sR^{1/2} > 0$, 故 I, J 为处处连续可导函数。因此, 应力场 (18)–(20) 在裂纹尖端邻域是有界的。

四、裂纹的非局部弹性渐近应力场

在经典线弹性断裂力学中, 裂纹尖端邻域的渐近应力场具有确定的函数形式, 物体几何形状、荷载大小和裂纹尺寸仅体现在应力强度因子中。因此, 在断裂力学的基本理论中, 裂纹尖端邻域的渐近应力场是一个比某个裂纹的全域应力场更为重要的问题。本节从上节的三种基本型 Griffith 裂纹的非局部弹性应力场给出 I、II、III 型裂纹的在裂纹尖端邻域的非局部弹性渐近应力场。

非局部弹性应力场 (18)–(20) 中虽然没有奇异性, 但由于 ε 小于晶格常数 a , 远小于宏观裂纹尺寸 l , 故在裂纹尖端邻域存在很高的应力集中。因此, 可以忽略关于矢径 $r^* = \sqrt{(l-x)^2 + y^2}$ 的高次幂而展开 (18)–(20)。结果为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \phi \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \phi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin^2 \phi \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{I 型}) \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \phi \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \phi \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \phi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II 型}) \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \phi \sin \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \phi - \frac{1}{2} \cos^2 \phi \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \phi \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III 型}) \quad (24)$$

其中 $K_i = p\sqrt{\pi l}$ ($i = \text{I, II, III}$) 为应力强度因子, r, θ, ϕ 三个变量中只有两个是独立的, 它们与坐标 x, y 和参数 ε 的关系为 $x = l + r \cos \theta$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $\varepsilon = r \sin \theta \cos \phi$ 且 $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$.

渐近应力场 (22)–(24) 具有下列特点:

(1) 当 $\varepsilon = 0$, 即 $\phi = \pi/2$ 时, r, θ 成为裂纹尖端处的极坐标, 上述应力场就成为熟知的经典弹性理论的裂纹尖端渐近应力场;

(2) 当 $\varepsilon > 0$ 时, $r = \sqrt{(l-x)^2 + y^2 + \varepsilon^2} > 0$, 非局部弹性渐近应力场没有奇异性, 只有量级为 $\sqrt{l/a}$ 的应力集中;

(3) 由于非局部弹性应力场为连续场, 应力场的最大值一般不在裂纹尖端上, 而是位于裂纹尖端以 a 为尺度的邻域的某点上。如

$$\sigma_{yy}^I = \sigma_{yy}^I(x, y) \Big|_{\substack{x=l+0.2a \\ y=0}} = 0.873 \frac{K_I}{\sqrt{\pi a/2}}$$

应当强调指出, 非局部弹性渐近应力场 (22)–(24) 具有较大的普适性。注意到 (22)–(24) 只是在裂纹尖端的以 a 为尺度的邻域内对经典弹性渐近应力场的修正, 因此如果以经典弹性渐近应力场作为裂纹尖端邻域非局部弹性应力场的远场, 则上述的非局部弹性渐近应力场可以从本构关系 (3) 直接导出。

五、脆性断裂的最大拉应力准则

对于脆性材料的断裂, Griffith 提出最小势能准则^[12], Irwin 提出应力强度因子准则^[13], Sih 提出应变能密度因子准则^[14]。这些准则不能把裂纹尖端的应力与材料的理论断裂强度联系起来, 因为它们的理论基础是裂纹尖端具有奇异性的经典弹性应力场。非

局部弹性理论给出的裂纹尖端邻域的应力场是有限的,因此我们自然地顺沿古典强度理论提出脆性材料的断裂准则:当裂纹尖端邻域的最大拉应力达到材料的理论断裂强度时,裂纹就会启裂,且启裂方向垂直于最大拉应力的方向。

裂纹尖端邻域的最大拉应力为该邻域内的最大(正)主应力,因此上述准则可以表达为:

$$\max_{x \in \Omega} (t_1(x)) = t_c \quad (25)$$

Ω 为裂纹尖端邻域, t_c 为理论断裂强度, $t_1(x)$ 为 x 点的第一主应力,即 $t_1 \geq t_2 \geq t_3$, t_1, t_2, t_3 为主应力。

应力场 t_{ij} 的主应力和主方向满足特征方程

$$(t_{ij} - t\delta_{ij})n_j = 0 \quad (26)$$

和标准化条件

$$n_i n_i = 1 \quad (27)$$

其中 t 为任一主应力, n_i 为 t 的方向。因此,将裂纹的非局部弹性渐近应力场(22)——(24)代入(26)、(27)和(25),就可以得到一般裂纹的临界开裂条件和开裂方向。

1. 三种基本型裂纹

对 I 型裂纹,最大拉应力

$$\max_{x \in \Omega} (t_1(x)) = t_{yy}(x, y) \Big|_{\substack{x=l+0.2a \\ y=0}} = 0.873 \frac{K_I}{\sqrt{\pi a/2}}$$

故 I 型裂纹的开裂条件为

$$0.873 \frac{K_I}{\sqrt{\pi a/2}} = t_c \quad (28)$$

且开裂方向为 x 轴方向。

注意到平面应变问题的理论断裂强度 t_c 与材料的表面能密度 γ 有关系:

$$t_c = \left(\frac{2\mu\gamma}{(1+\nu)a} \right)^{1/2} \quad (29)$$

则可以看到(28)与 Griffith 的能量准则 $t_c = 0.886K_I/\sqrt{\pi a/2}$ 仅相差 1.5%。

对 II 型裂纹,最大拉应力为 $0.885 K_{II}/\sqrt{\pi a/2}$, 且最大拉应力与 x 轴交成 23.6° 角。故 II 型裂纹的临界开裂条件为

$$0.885 \frac{K_{II}}{\sqrt{\pi a/2}} = t_c \quad (30)$$

且开裂方向与 x 轴成 $90^\circ - 23.6^\circ = 66.4^\circ$ 的角。

II 型裂纹与 I 型裂纹的临界应力强度因子比值 $K_{II}/K_I = 0.873/0.885 = 0.986$, 它与 Sih 的应变能密度因子准则的结果 $K_{II}/K_I = 0.957$ ($\nu = 0.3$) 相差 3%。对于 II 型裂纹的开裂角,本文结果小于应变能密度因子准则给出的 82.3° ($\nu = 0.3$),但接近于文[15]的实验数据 64° 。

对 III 型裂纹,最大拉应力

$$\max_{x \in \Omega} (t_1(x)) = t_{yz}(x, y) \Big|_{\substack{x=l+0.22a \\ y=0}} = 0.719 \frac{K_{III}}{\sqrt{\pi a/2}}$$

故 III 型裂纹的开裂条件为

$$0.719 \frac{K_{III}}{\sqrt{\pi a/2}} = \tau_c \quad (31)$$

且开裂方向为 x 轴方向。

比较 (28) 与 (31), $K_{III}/K_I = 1.214$. 它与应变能密度因子准则的 $K_{III}/K_I = (1-2\nu)^{1/2} < 1$ 相差较远。从实验数据上看, 文 [16] 给出 $K_{III} = 1.22K_I$, 文 [17] 给出 $K_{III} = 0.69K_I$. 因此, 这个问题有待进一步研究。

临界开裂条件 (28)(30)(31) 可以写成应力强度因子准则的形式, 即

$$K_I = K_{Ic}, K_{II} = K_{IIc}, K_{III} = K_{IIIc} \quad (32)$$

其中断裂韧性 K_{Ic} 、 K_{IIc} 和 K_{IIIc} 与理想断裂强度 τ_c 有关系:

$$K_{Ic} = 1.44\tau_c/\sqrt{a}, K_{IIc} = 1.42\tau_c/\sqrt{a}, K_{IIIc} = 1.74\tau_c/\sqrt{a} \quad (33)$$

2. I-II 复合型裂纹

I-II 复合型裂纹的最大拉应力可以写成:

$$\max_{x \in \Omega} (\sigma_1(x)) = F(K_I, K_{II}/0.986)$$

F 为一次齐次函数。因此 I-II 复合型裂纹的开裂条件为

$$F\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}, \frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right) = 1 \quad (34)$$

它的计算结果如图 1。图 1 中还列出了应变能密度因子准则的曲线和文 [16, 17] 的实验数据。可以看到, 本文结果比应变能密度因子准则的结果偏小, 但处于两种实验数据的中间。

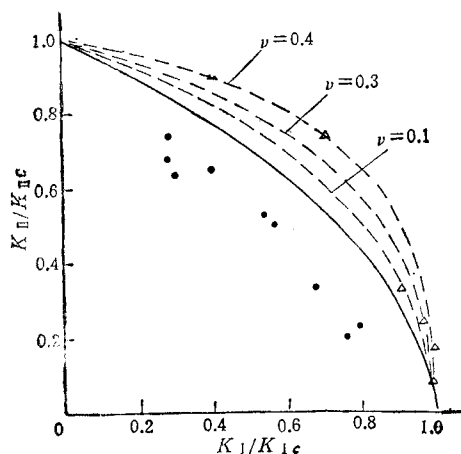


图 1 I-II 复合型裂纹脆断曲线

● 文 [16] 实验点 △ 文 [17] 实验点 —— 本文
最大拉应力准则 --- 应变能密度因子准则

其中一次齐次函数 H 的计算结果如图 3。图 3 中同时列出了应变能密度因子准则的曲线和文 [16]、[17] 的实验数据。可以看到, 实验数据比较分散, 且高于两种理论的预测值。

I-III 复合型裂纹的最大拉应力出现在裂纹沿长线上, 其方向位于 $yo\alpha$ 平面内。因此, I-III 复合型裂纹的开裂方向为 x 轴方向。

图 2 给出了 I-II 复合型裂纹开裂角的计算结果和应变能密度因子准则的曲线以及文 [17] 的实验数据, 其中荷载参数 β 的定义为 $\lg \beta = K_I/K_{II}$, 开裂角 $\theta_0 = 90^\circ - \alpha$, α 为最大主应力与 x 轴的夹角。图 2 显示, 本文结果与应变能密度因子准则的曲线和文 [17] 的实验数据基本一致。

3. I-III 复合型裂纹

类似于 (34), I-III 复合型裂纹的开裂条件为:

$$H\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}, \frac{K_{III}}{K_{IIIc}}\right) = 1 \quad (35)$$

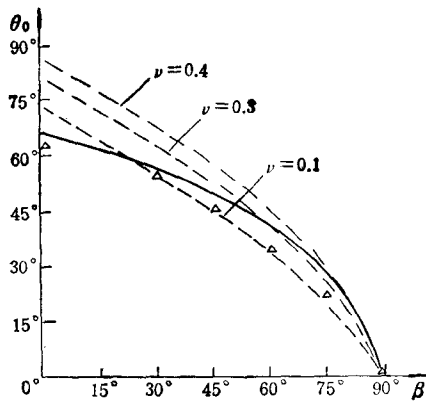


图 2 I-II 复合型裂纹的开裂角

△文[17]实验点 ———本文最大拉应力准则
 ---应变能密度因子准则

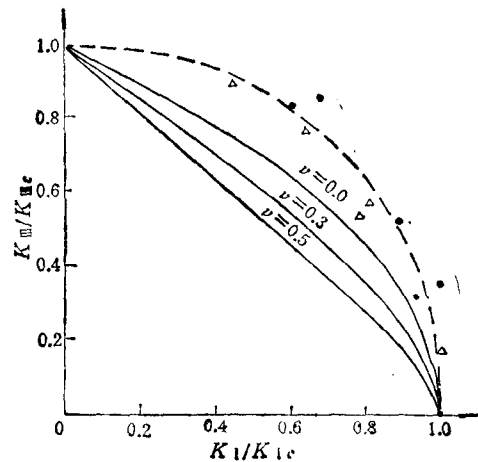


图 3 I-III 复合型裂纹脆断曲线

●文[16]实验点 △文[17]实验点 ———本文最大拉应力准则
 ---应变能密度因子准则

六、结 束 语

以上研究表明:

1. 非局部弹性理论能够消除物理上不现实的裂纹尖端的应力奇异性;
2. 虽然非局部力学理论强调物体内部任意点的应力与物体全域的变形相关, 但宏观裂纹的非局部弹性应力场在裂纹尖端邻域仍具有确定的渐近形式;
3. 以非局部力学理论为基础的脆性断裂的最大拉应力准则, 在宏观上与现有的断裂理论基本一致, 在微观上反映了脆性断裂的解理机制。

附录: 关于裂纹的非局部弹性场方程在经典应力边界概念下无解的证明

对裂纹面上受均匀剪应力 P 的 II 型 Griffith 裂纹问题, 设非局部应力边界的提法为

$$t_{xy}(x, y)|_{y=0} = -p \quad |x| \leq l \quad (i)$$

则将非局部弹性应力场 (12), 代入上式, 经积分并利用位移连续条件 $u_x(\pm l) = 0$, 得

$$\frac{b_0}{\pi} \int_{-l}^l \frac{\varepsilon^2 - (x-t)^2}{((x-t)^2 + \varepsilon^2)^2} u_x(t) dt = p \quad |x| \leq l \quad (ii)$$

以下证明方程 (ii) 是无解的。

反证法: 设方程 (ii) 有连续函数解 $u_x(x)$, 则容易验证复变函数

$$F(z) = \frac{b_0}{\pi} \int_{-l}^l \frac{\varepsilon^2 - (z-t)^2}{((z-t)^2 + \varepsilon^2)^2} u_x(t) dt \quad (iii)$$

在区域 $G = \{z/|\operatorname{Im}(z)| < \varepsilon\}$ 内为单值解析函数。由解析函数的开拓原理知, 若 $F(z)|_{z=\pm l} = p$, $|x| \leq l$, 则 $F(z) \equiv p$ 。另一方面, 由 (iii) 可知当 $z \rightarrow \infty$ 时, $F(z) \rightarrow 0$ 。这样构成了矛盾, 因此方程 (ii) 无连续函数解。由于 $u_x(x)$ 为裂纹面上的位移, 必然为连续函数, 故方程 (ii) 是无解的。证毕。

同理, 对 I, III 型 Griffith 裂纹, 可以得到相同的结论。

参 考 文 献

- [1] Eringen A C. Continuum Physics. New York. Academic Press. 1976, 4
- [2] Kunin I A. Elastic Media with Microstructure I. Springer, 1982
- [3] Kunin I A. Elastic Media with Microstructure II. Springer, 1983
- [4] Eringen A C, Spezial C G, Kim B S. *J. Mech. Phys. Solids*, 1977, 25: 339
- [5] Eringen A C. *Int. J. Fracture*, 1978, 14: 367
- [6] Eringen A C. *Engng. Fracture Mech.*, 1979, 12: 211
- [7] 苗天德, 兰州大学学报(自然科学版), 1983, 19: 36
- [8] 虞吉林, 郑哲敏, 力学学报. 1984, 16: 485
- [9] 程品三, 袁文伯. 科学通报. 1988, 33: 1430
- [10] Eringen A C. Nonlinear Equation of Physics and Mathematics ed. A. O. Barut. Springer, 1979: 271
- [11] Atkinson C. *Archive Mechanica*, 1980, 32: 371
- [12] Griffith A A. Phil. Trans. Roy Soc. (London), Series A, 1920, 221: 163
- [13] Irwin G R. *ASME. J. Appl. Mech.*, 1957, 24: 361
- [14] Sih G C. *Engng. Fracture Mech.*, 1973, 5: 1037
- [15] 樊蔚勋, 应用数学和力学, 1973, 3: 1037
- [16] Shah R C. Fracture Analysis. ASTM STP560, 1973, 29
- [17] 赵廷仕等. 华中工学院学报, 1985, 1: 47

NONLOCAL THEORY OF BRITTLE FRACTURE

Cheng Pinsan

(Laboratory of Nonlinear Mechanics of Continuous Media, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences,
Beijing, 100080, China)

Abstract In this paper, a nonlocal theory of fracture for brittle materials has been proposed. It contains the nonlocal elastic stress fields of mode-I, II, III Griffith cracks, the asymptotic forms of the stress fields at the neighborhood of the crack tips, and the maximum tensile stress criterion of brittle fracture. As an application of the theory, the fracture criteria of cracks of mode-I, II, III and mixed mode I-II, I-III are given in detail and compared with some experimental data and the theoretical results of minimum factor of strain energy density.

Key words brittle fracture, nonlocal elasticity theory, maximum tensile stress criterion