

# 反平面弹性中的某些刚性线问题\*

陈 宜 周

(江苏工学院, 镇江, 212013)

**摘要** 文中分析了反平面弹性中的刚性线问题。通过保角映像, 又得出了一系列带刚性半平面边界问题的解。此外, 还求出了刚性线端的应力奇异系数。

**关键词** 刚性线问题, 反平面弹性, 应力奇异系数

## 1. 引言

平面或反平面弹性中的刚性线问题是近年来得到发展的固体力学问题。举例说, 碳钢中常常含有铁素体和碳化铁二种相, 前者较软后者较硬。这一情况的理想化便构成刚性夹杂或刚性线问题。在刚性线端也存在着应力分量的  $r^{-1/2}$  型式的奇异性。从而, 有人把刚性线称为“反裂纹”<sup>[1]</sup>。在这一问题中, 已经做出了一些开创性的工作<sup>[2-6]</sup>。相比之下, 刚性线问题的解答要比裂纹问题的解答少得多。从当前发展现状看, 刚性线问题是一个值得研究的问题。在本文中, 我们提供了反平面弹性中刚性线的基本理论, 又给出了一些刚性线边界可映像到半平面边界时的一系列解答。

## 2. 基本公式

众所周知, 引入复位函数  $\phi(z)$  后, 反平面弹性中的位移  $w(x, y)$ , 合力函数  $f(x, y)$ , 和剪应力分量  $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$  可表示成<sup>[9]</sup>

$$\phi(z) = Gw(x, y) + if(x, y), \quad (1)$$

$$Gw(x, y) = \operatorname{Re}\phi(z), \quad f(x, y) = \int^z (\tau_{xx}dy - \tau_{yy}dx) = \operatorname{Im}\phi(z), \quad (2)$$

$$\tau_{xx} - i\tau_{yy} = \phi'(z), \quad \tau_{\theta z} = G \frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad \tau_{rz} = G \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (3)$$

式中  $G$  为剪切弹性模量。

设刚性线始于原点又向左延伸(图 1), 此时有下列条件

$$w(r, \theta)|_{\theta=\pm\pi} = 0, \quad (4)$$

由此条件出发, 可得下列展开式

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{n-1} A_n z^{n/2}, \quad A_n \text{ 为实值} \quad (5)$$

$$Gw(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{n/2} \sin(n(\theta + \pi)/2). \quad (6)$$

\* 国家自然科学基金资助课题。  
本文于 1990 年 9 月 14 日收到。

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n r^{n/2-1} \sin((n/2-1)(\theta+\pi)), \\ \tau_{yy} &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n r^{n/2-1} \cos((n/2-1)(\theta+\pi)), \\ \tau_{\theta z} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n r^{n/2-1} \cos(n(\theta+\pi)/2), \\ \tau_{rz} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n r^{n/2-1} \sin(n(\theta+\pi)/2),\end{aligned}\quad (7)$$

由上式可见,在正实轴 ( $x > 0, y = 0$ ) 上,  $\tau_{xz}$  存在着  $r^{-1/2}$  的奇异性。

今可定义应力奇异系数如下

$$S_{III} = \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{2\pi z} \phi'(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} A_1 \quad \text{式} \quad S_{III} = \lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{2\pi x} \tau_{xz,0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} A_1, \quad (8)$$

式中  $\tau_{xz,0}$  为沿正实轴上 ( $x > 0, y = 0$ ) 的剪应力分量。  $S_{III}$  是断裂力学中  $K_{III}$  的对应物。

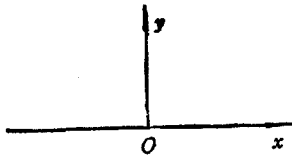


图 1 刚性线  $M$  原点向左延伸。

下面我们用保角映像法解决若干带刚性线的半平面问题。为了说明方便起见,把上面的  $\phi(z)$  改写为  $\phi_1(z)$ 。设函数

$$z = \omega(\zeta) \quad (9)$$

把带曲折刚性线  $ABCDE$  的边界和上半平面映像成实轴  $abcde$  和相应的上半平面(图 2)。又设嵌入刚性线端  $z = z_c$  的映像为  $\zeta = \zeta_c$  (图 2)。现在令

$$\phi(\zeta) = \phi_1(\omega(\zeta)) \quad (10)$$

经过一系列推导,由式(8)可得

$$S_{III} = \sqrt{\pi} e^{i\alpha_c/2} \frac{\phi'(\zeta_c)}{\sqrt{\omega''(\zeta_c)}} \quad (11)$$

其中  $\alpha_c$  为刚性线端部处切线的倾斜角。

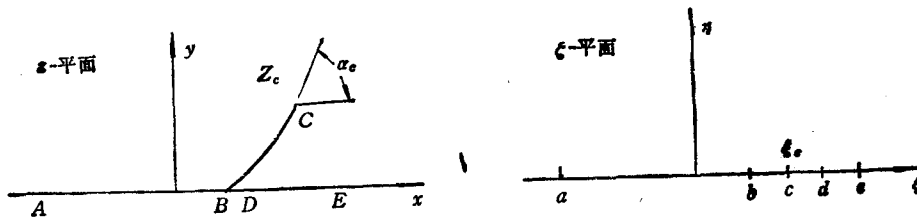


图 2 带曲折刚性线  $ABCDE$  的上半平面到带实轴  $abcde$  的上半平面的映像。

### 3. 某些刚性线问题的解答

以下四个例子中,我们把以曲折刚性线为界的上半平面(在  $z$  平面上)映像到以实轴为界的上半平面(在  $\zeta$  平面上)(图 2 和图 3)。此时,刚性线处位移  $w$  为零条件,由式(2)和(10),可表示为

$$\phi(\sigma) + \overline{\phi(\sigma)} = 0 \quad (\sigma \text{ 在实轴上}) \quad (12)$$

在以下各例中,便是要求出既符合物体受力情况又满足上式的复位函数  $\phi(\zeta)$ 。接着,可由式(11)求出应力奇异系数。

例 1 半平面刚性边界带有垂直嵌入的刚性线(图 3)。

在此问题中,可用下列保角映像函数<sup>[10]</sup>

$$Z = \omega(\zeta) = a\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (z \cong a\zeta, \text{ 无限远处}) \quad (13)$$

此时有

$$\alpha_c = \frac{\pi}{2}, \quad \zeta_c = 0, \quad \frac{1}{\omega''(\zeta_c)} = \frac{1}{a} e^{i\pi/2} \quad (14)$$

在第一种受力情况中,设无限远处作用有  $\tau_{yz}^\infty$ 。此时,不难验证有下列适合条件(12)的复位函数

$$\phi(\zeta) = -i\tau_{yz}^\infty a\zeta \quad (15)$$

不难看出  $\phi(\zeta)$  也满足无限远处的受力条件。式(14)和(15)代入到式(11)中,可得

$$S_{III} = \tau_{yz}^\infty \sqrt{\pi a} \quad (16)$$

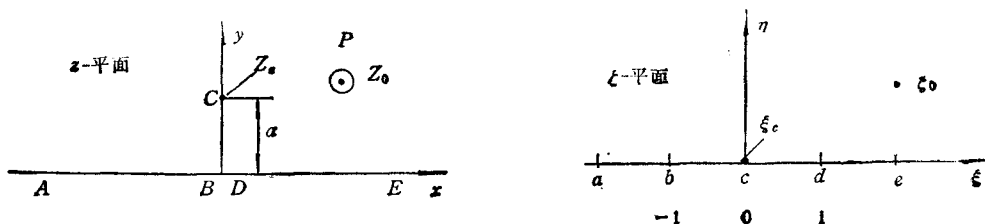


图 3 半平面刚性边界带有垂直嵌入的刚性线,及相应映像关系。

在第二种受力情况中,在  $z = z_0$  处作用有纵向集中力  $P$ , 又设  $z = z_0$  的映像为  $\zeta = \zeta_0$  (图 3)。此时,可把  $\phi(\zeta)$  分解成

$$\phi(\zeta) = \phi_p(\zeta) + \phi_c(\zeta) \quad (17)$$

其中  $\phi_p(\zeta)$  和  $\phi_c(\zeta)$  代表主要部分和补充部分。和  $z = z_0$  处作用有纵向集中力  $P$  相应,函数  $\phi_p(\zeta)$  的虚部绕  $\zeta = \zeta_0$  逆钟向一周时应有增量  $-P$ , 于是得

$$\phi_p(\zeta) = -\frac{P}{2\pi} \ln(\zeta - \zeta_0). \quad (18)$$

此时边界条件(12)可改写为

$$\phi_p(\sigma) + \phi_c(\sigma) + \overline{\phi_p(\sigma)} + \overline{\phi_c(\sigma)} = 0, \quad (\sigma \text{ 在实轴上}) \quad (19)$$

不难看出,上式有解

$$\phi_c(\zeta) = -\overline{\phi_p(\zeta)} = \frac{P}{2\pi} \ln(\zeta - \zeta_0) \quad (20)$$

最后得到待求的复位函数

$$\phi(\zeta) = \phi_p(\zeta) + \phi_c(\zeta) = \frac{P}{2\pi} (-\ln(\zeta - \zeta_0) + \ln(\zeta - \zeta_0)) \quad (21)$$

若把式(14),(21)代入到式(11)中,得

$$S_{III} = -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\zeta_\delta}\right) \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \quad (22)$$

一个特殊情况为,若集中力  $P$  作用于  $z_0 = ib$  处 ( $a < b$ ), 则:  $\zeta_0 = i\sqrt{b^2/a^2 - 1}$ , 又得

$$S_{III} = -\frac{1}{\sqrt{b^2/a^2 - 1}} \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \quad (22a)$$

例2 半平面刚性边界带有斜向嵌入的刚性线(图4).

在此问题中,可用下列保角映像函数<sup>[10]</sup>

$$Z = \omega(\zeta) = a \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{1-\delta} (\zeta - 1)^\delta \left(\zeta + \frac{1-\delta}{\delta}\right)^{1-\delta} \quad (0 < \delta < 1)$$

$$\left(z \cong a \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{1-\delta} \zeta \text{ 在无限远处}\right) \quad (23)$$

此时有

$$\alpha_c = 8\pi, \quad \zeta_c = 0, \quad \frac{1}{\omega''(\zeta_c)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{i\pi(1-\delta)} \quad (24)$$

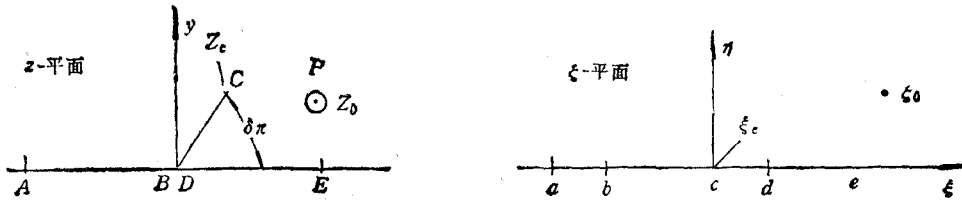


图4 半平面刚性边界带有斜向嵌入的刚性线,及相应的映像关系.

在第一种受力情况中,设无限远处作用有  $\tau_{yz}^\infty$ . 和式(15)类同(只要式(15)中  $a$  换成  $a \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{1-\delta}$ ), 可得

$$\phi(\zeta) = -i\tau_{yz}^\infty a \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{1-\delta} \zeta \quad (25)$$

式(24),(25)代入到式(11)中,可得

$$S_{III} = \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{2}-\delta} \tau_{yz}^\infty \sqrt{\pi a} \quad (26)$$

在第二种受力情况中,在  $z = z_0$  处作用有纵向集中力  $P$ , 又设  $z = z_0$  的映像为  $\zeta = \zeta_0$  (图4). 此时式(21)仍适用. 把式(24),(21)代入到式(11)中,可得

$$S_{III} = -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\zeta_0}\right) \sqrt{\frac{1-\delta}{\delta}} \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \quad (27)$$

例3 半平面刚性边界带有圆弧形嵌入的刚性线(图5).

在此问题中,可用下列多次映像<sup>[10]</sup>

$$Z = -\frac{2R}{Z_1 - 1}$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{z_2^2 - h^2} \quad h = \tan \theta \\ z_2 &= g(\zeta) = \sqrt{1 + h^2} - \frac{1}{\zeta} \end{aligned} \quad (28)$$

其中  $R, \theta$  可从图 5 看出. 此映像函数也可以写成

$$\begin{aligned} Z = \omega(\zeta) &= \frac{2R}{\sqrt{g^2(\zeta) - h^2} - 1}, \quad g(\zeta) = \sqrt{1 + h^2} - \frac{1}{\zeta} \\ (z \cong 2R \cos \theta \zeta \text{ 在无限远处}) \end{aligned} \quad (29)$$

在此情况下有

$$\alpha_c = \frac{\pi}{2} + 2\theta, \quad \zeta_c = \cos \theta, \quad \frac{1}{\omega''(\zeta_c)} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{2R} e^{i(\frac{\pi}{2} - 2\theta)} \quad (30)$$

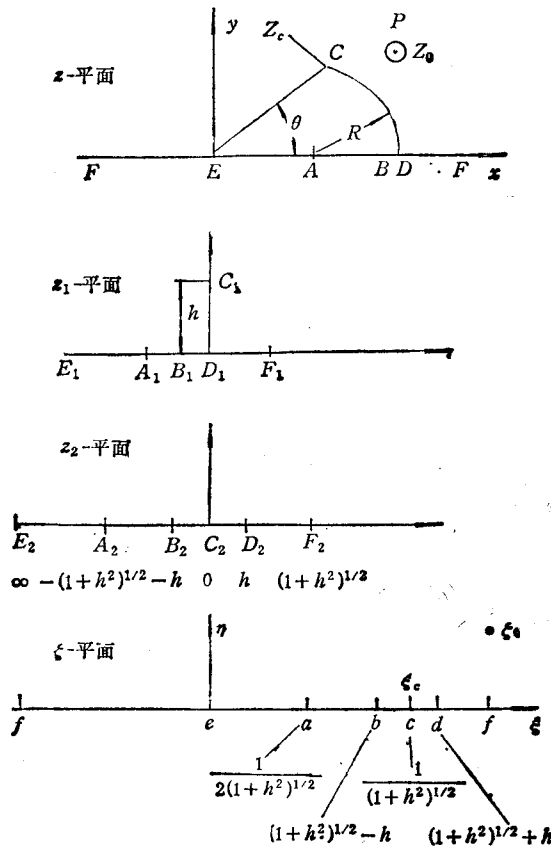


图 5 半平面刚性边界带有圆弧形嵌入的刚性线, 及相应的映像关系.

在第一种受力情况中, 设无限远处作用有  $\tau_{yz}^\infty$ . 和式(15)类同, (只要式(15)中的  $a$  换成  $2R \cos \theta$ ), 可得

$$\phi(\zeta) = -i\tau_{yz}^\infty (2R \cos \theta) \zeta \quad (31)$$

把式(30), (31)代入到式(11)中, 可得

$$S_{III} = \sqrt{2 \sin \theta \cos^3 \theta} \tau_{yz}^\infty \sqrt{\pi R} \quad (32)$$

在第二种受力情况中,在  $z = z_0$  处(它的映像为  $\zeta = \zeta_0$ ) 作用有集中力  $P$ . 此时解(21)仍然适用,若把式(30),(21)代入到式(11)中,可得

$$S_{III} = -\text{Im}\left(\frac{1}{\zeta - \zeta_0}\right) \sqrt{\frac{\sin\theta \cos\theta}{2}} \frac{P}{\sqrt{\pi R}} \quad (33)$$

例4 半平面刚性边界带有周期型嵌入刚性线。(图6)

在此问题中,可用下列映像函数[10]

$$z = \frac{h}{\pi} \arccos \left[ \text{ch} \frac{\pi a}{h} \cos \pi \zeta \right], \text{ 或 } \cos \frac{\pi z}{h} = \text{ch} \frac{\pi a}{h} \cos \pi \zeta$$

$$(z \cong h\zeta \quad y \rightarrow +\infty) \quad (34)$$

此时对应于刚性线端

$$z = z_c = Kh + ia$$

处有

$$\alpha_c = \frac{\pi}{2}, \quad \zeta_c = K, \quad \frac{1}{\omega''(\zeta_c)} = \frac{1}{h\pi} \text{th} \frac{\pi a}{h} e^{i\pi/2} \quad (35)$$

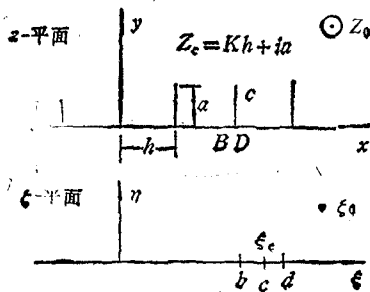


图6 半平面刚性边界带有周期型嵌入刚性线,及相应的映像关系

在第一种受力情况中,无限远处受力情况为  $\tau_{yz}^{\infty}$  和式(15)类同(只要式(15)中的  $a$  换成  $h$ ), 可得

$$\phi(\zeta) = -i\tau_{yz}^{\infty} h\zeta \quad (36)$$

把式(35),(36)代入到式(11)中,可得

$$S_{III} = \sqrt{\frac{h}{\pi a} \text{th} \frac{\pi a}{h}} \tau_{yz}^{\infty} \sqrt{\pi a} \quad (37)$$

在第二种受力情况中,在  $z = z_0$  处(它的映像为  $\zeta = \zeta_0$ ) 作用有集中力  $P$ . 此时解(21)仍然可用,若把式(35),(21)代入到式(11)中,可得

$$S_{III} = -\text{Im}\left(\frac{1}{\zeta_0 - K}\right) \sqrt{\frac{a}{\pi h} \text{th} \frac{\pi a}{h}} \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \quad (38)$$

### 参 考 文 献

- [1] Dundurs J and Markenscoff. A Green's function formulation of anticracks and their interaction with load-induced singularities, *J. of Appli. Mech.*, 1989, 56: 550—555
- [2] England A H. On stress singularities in linear elasticity, *Inter. J. Engng. Sci.*, 1971, 9: 571—585
- [3] Wang Z Y, Zhang, H T and Chou Y T. Characteristics of the elastic field of a rigid inhomogeneity, *J. of Appli. Mech.*, 1985, 52: 818—822
- [4] Chen Y Z. Singular behaviour at fixed line tip in plane elasticity, *Engng. Fracture Mech.*, 1986, 25: 11—16
- [5] Stagni L. Line singularity near the tip of a crack and of a fixed rigid line: unified treatment, *Engng. Fracture Mech.*, 1989, 33: 679—684
- [6] Brussat T R and Westmann R A. A Westergaard-type stress function for line inclusion problems, *Int. J. Solids Struc.* 1975, 11: 665—677
- [7] Cheung Y K and Chen, Y Z. Multiple rigid line problems in an infinite plate, *Engng. Fract. Mech.*, 1989, 34: 379—391

- [8] Santare M H and Keer L M. Interaction between an edge dislocation and a rigid elliptical inclusion. *J. of Appl. Mech.*, 1986, 53: 382—385
- [9] Chen Y Z and Wang Z X. Solutions of multiple crack problems of a circular region with free or fixed boundary condition in antiplane elasticity. *Int. J. Fract.* 1986, 30: 287—293
- [10] 拉甫伦捷夫, 沙巴特 (Лавренльев МА, шабат БВ.), 复变函数论方法(施祥林, 夏定中译), 高教出版社, 1958

## SEVERAL FIXED RIGID LINE PROBLEMS IN ANTIPLANE ELASTICITY

Chen Yizhou

(*Jiangsu Institute of Technology, Zhenjiang, 212013, China*)

**Abstract** In this paper, the fixed rigid line problem in antiplane elasticity is discussed. By means of using conformal mapping, several solutions concerning the fixed rigid line problems of half-plane are obtained. Stress singularity coefficients are derived for the investigated examples.

**Key words** the fixed rigid line problem, antiplane elasticity, stress singularity coefficients