

一种大型结构特征值问题的并行解法*

胡宁 张汝清

(重庆大学工程力学系, 重庆, 630044)

提要 本文提出了一种求解大型结构固有频率与模态的并行解法。该方法在子空间迭代过程中, 利用子结构刚度阵和质量阵并行进行凝聚, 求得下一次的迭代基矢量, 直到收敛。该算法在西安交通大学 ELXSI-6400 并行机上程序实现, 计算结果表明能大幅度节省计算时间, 同时也有效地节省了内存。

关键词 并行算法, 子结构方法, 子空间迭代方法

1. 引言

由于各种类型的并行机的出现, 人们对于应于不同类型并行机的并行算法的研究也越来越重视。在计算力学领域内, 由于动力分析在有限元分析中占有相当重要的地位, 并且比一般静力分析更耗机时, 因此国外许多学者都对这个领域内的并行计算进行过研究。Jerome F. Hajar, John F. Abel^[1,2], Ronfu Ou, Robert E. Fulton^[3], Charbel Farhat, Edward Wilson^[4] 等人都作过这方面的工作, 但他们的工作一般都集中在对原始动力方程的并行处理上。这样的处理有三个弱点, 一是动力方程未解耦, 因此除利用中央差分积分方法以外的其它逐步积分方法, 并行机都需同步控制, 将由于等待信息而浪费宝贵的 CPU 时间; 二是不能对结构自身的特性, 如固有频率, 振型等有了解; 三是由于原始方程的阶数过高, 将占用过大的内存。其实如果能有效地并行求解结构的固有频率和模态, 就能对原始方程通过变换, 有效地起到降阶和解耦的作用。我们曾利用子结构模态综合方法在 ELXSI-6400 并行机上作过这方面的工作, 但该方法由于要利用界面的平衡和连续条件建立方程并要作动力变换, 显得过繁琐。Guyen 变换也可有效地求出结构的降阶方程, 但要求有效地选择被凝聚掉的自由度, 否则会造成很大的误差。本文利用子空间迭代法的运算格式, 将结构划分成子结构并行处理, 有效地解决了上述困难。

并行计算的计算格式和编程取决于所用并行机的并行环境。现存的建立在各种类型计算机系统上的并行机大体分为共享内存式和信息传递式两大类。ELXSI-6400 并行机属于过程级的共享内存式计算机。并行进程间通讯和并发控制是以共享内存的形式实现的, 而并行进程往往又以子程序的形式出现。

2. 子空间迭代法的子结构并行求解技术

结构的广义特征值问题由下式给出,

* 西安交通大学国家结构强度与振动重点实验室国家基金项目

本文于1990年7月31日收到第一次稿, 于1991年1月12日收到修改稿。

$$K\Phi = M\Phi\Omega^2 \quad (1)$$

这里 K 和 M 是 $(n \times n)$ 阶的结构的刚度和质量阵, n 为结构自由度数, Φ 是列为特征向量的模态矩阵, Ω^2 是以特征值为主对角元的对角矩阵. 方程(1)的特征值为正实数, 特征向量正交于 K 和 M 阵.

子空间迭代法是一种求解特征值问题的主要方法, 它的基本思想与广义瑞利-李兹法相似. 在该方法中, 首先设置一组 P 个线性独立的矢量, 这组矢量生成了 P 维矢量空间的基, 系统的模态可表示成假设基矢量的线性组合, 线性组合的各项乘子通过求解降阶后的特征值问题解得, 因此由迭代过程不断地改变基矢量直到收敛为止. 设需求系统的前 P 阶模态, 首先设置 $q = \min\{2P, P + 8, n\}$ 个线性独立矢量, 并定义一个线性变换.

$$\Phi^{(0)} = X^{(0)}\Phi \quad (2)$$

这里 $X^{(0)}$ 是列为基矢量的 $(n \times q)$ 阶矩阵, Φ 是一由变换乘子组成的 $(q \times q)$ 阶矩阵, 将方程(2)代入方程(1)并用 $X^{(0)}$ 乘以等式两端, 得

$$K'\Phi = M'\Phi\Omega^2 \quad (3)$$

其中,

$$K' = X^{(0)T} K X^{(0)}, \quad M' = X^{(0)T} M X^{(0)} \quad (4)$$

方程(3)是降阶后的 q 维的特征值问题, 可求得 Φ 和 Ω^2 , 再代入方程(2)可求得 $\Phi^{(0)}$. 因此, 改进的基矢量 $X^{(1)}$ 由下式求得,

$$KX^{(1)} = Y^{(1)}, \quad Y^{(1)} = M\Phi^{(1)} \quad (5)$$

然后由 $X^{(1)}$ 取代 $X^{(0)}$ 重复迭代, 直到收敛. 本文提出的方法是利用子结构方法对最耗时时的(5)式进行处理.

首先考虑(5)式中第二式, 由于质量 M 由各单元的质量阵组集而得, 故有

$$Y^{(1)} = \left(\sum_{i=1}^e A^{iT} m^i A^i \right) \Phi^{(1)} \quad (6)$$

e 为单元总数, A 为转换阵, (6)式可改写成,

$$Y^{(1)} = \sum_{i=1}^e \{ (A^{iT} m^i A^i) \Phi^{(1)} \} \quad (7)$$

上面处理方法的优点是在可不形成总体质量阵的情况下求得 $Y^{(1)}$, 节省了内存, 缺点是运算量加大. 在并行处理的情况下, 可以先由各 CPU 并行组集各子结构质量阵, 再利用(7)式求解, 这时 e 为子结构数, m^i 为子结构的质量阵. 这样可有效地节省计算时间.

$X^{(1)}$ 的计算也可利用子结构方法并行处理, 这时实际上是在虚拟载荷 $Y^{(1)}$ 作用下的静力方程, 可由各子结构并行进行静凝聚, 从而最终得到广义边界坐标表示的缩减后的方程,

$$K_B X_B^{(1)} = F_B \quad (8)$$

这里 K_B 是缩减后的边界未知量的刚度阵, $X_B^{(1)}$ 是边界未知量列阵(方程(5)中 $X^{(1)}$ 的子矩阵), F_B 是缩减后的对应于边界未知量的虚拟载荷, 而 F_B 和 K_B 仅需利用各子结构信息并行生成. 将结构划分为许多子结构, 对第 r 个子结构有,

$$\begin{bmatrix} K_{BB} & K_{BI} \\ K_{IB} & K_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B^{(1)r} \\ X_I^{(1)r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_B^{(1)r} \\ Y_I^{(1)r} \end{bmatrix} \quad (9)$$

这里下标 B 和 I 代表对应于边界和内部自由度, 从方程(9)的第 2 行, 有

$$K_{II}X_I^{(1)r} = Y_I^{(0)r} - K_{IB}X_B^{(1)r} \quad (10)$$

用方程(10)从方程(9)中消去 $X_I^{(1)r}$, 可以得到,

$$K_B' X_B^{(1)r} = F_B' \quad (11)$$

这里,

$$K_B' = K_{BB} + K_{BI}Q', \quad Q' = -[K_{II}]^{-1}K_{IB} \quad (12)$$

$$F_B' = Y_B^{(0)r} + Q'^T Y_I^{(0)r} \quad (13)$$

方程(11)是以第 r 个子结构边界广义坐标下的力和位移的关系, 依次组集, 再利用方程(8)求得 $X_B^{(1)r}$, 最后由方程(10)得 $X_I^{(1)r}$, 再进行下一次子空间迭代。因此我们可以看到该方法具有以下并行特点:

(1) 各子结构刚度, 质量阵是并行生成。

(2) 子空间迭代法中求解下次迭代向量时是利用子结构信息并行进行静凝聚, 而这一步的计算量在子空间迭代法中占很大比重。同时由于该法仅用到各子结构信息, 因此也有效地节约了内存。

3. 计算考例

我们用串行和并行两种方法对图 1 所示的结构的前两阶低阶模态进行了分析, 结构划分成两个子结构。在结构的自由度为 90 和 162 时, 串行分析的 CPU 时间为 2.782 秒

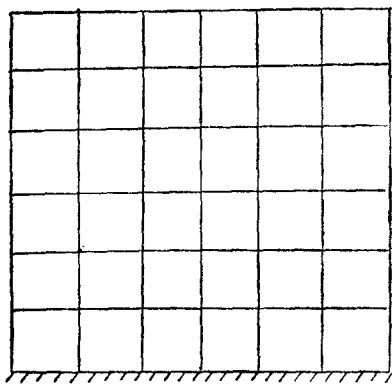


图 1

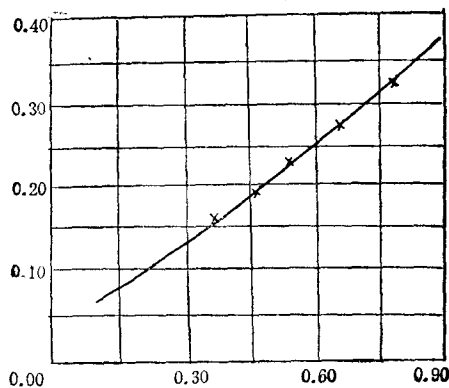


图 2

和 5.2016 秒; 并行分析的时间为 2.056 秒和 3.698 秒。图 2 的横坐标为内部结点总数除以结构总结点数, 纵坐标为并行算法相对于串行算法提高效率, 即,

$$T = (t_1 - t_2)/t_1 \quad (14)$$

从图中可看出, 结构内点数越高, 并行效率也越高。

参 考 文 献

- [1] Jerome F Hajjar, John F Abel. Parallel processing for transient nonlinear structural dynamics of three-dimensional framed structures using domain decomposition. *Computers & structures*, 1988, 30(6): 1237—1254.
- [2] Jerome F Hajjar John F Abel. Parallel processing of central difference transient analysis for three-dim-

- ensional nonlinear framed structures. *Communications In Applied Numerical Method*, 1989, 5: 39—46
- [3] Ronfu Ou, Robert Fulton. An investigation of parallel numerical integration methods for nonlinear dynamics. *Computers & Structure*, 1988, 30(12): 403—409
- [4] Charbel Farhat, Edward Wilson, A new finite element concurrent computer program architecture. *Int. Jou. for Numer. Methods in Engng*, 1987, 24: 1771—1792

A PARALLEL ALGORITHM FOR EIGENVALUE PROBLEMS OF LARGE-SCALE STRUCTURES

Hu Ning Zhang Ruqing

(*Department of Engineering Mechanics, Chongqing University, Chongqing, 630044 China*)

Abstract In this paper, a parallel algorithm for calculating natural frequencies and mode shapes of large structural systems is presented. In the process of subspace iteration, the method uses only substructure stiffness and mass matrices to carry out condensation concurrently and to get new iterative basis vector finally until the convergence is realized. The program of this algorithm has been realized on ELXSI-6400 parallel computer of Xian Jiaotong university. The computational results show the computing time and memory space can be saved on large scale.

Key words parallel algorithm method of substructure, subspace iteration