

Maxwell 流体环管不定常流动解析解

朱文辉* 刘慈群

(渗流流体力学研究所, 102801, 河北廊坊)

摘要 本文对 Maxwell 非牛顿流体在环管内的不定常流动进行分析并得到了解析结果。依此, 详尽分析了速度剖面、剪切应力随时间、非牛顿系数和环管形状变化的特征, 为管道工程设计提供了必要的理论依据。

关键词 Maxwell 流体, 非牛顿流体, 环管不定常流动

1. 引言

非牛顿流体的管道流动具有重要的实际意义, 了解它们的典型流动特征可为管道工程设计、石油输运和高分子化学及加工工艺提供理论分析依据。韩式方等^[1,2]曾对二阶非牛顿流体和 Maxwell 流体用变分近似方法进行了研究; 刘慈群等则得到了相应的一般管流解析解^[3]及二阶流体环管流解析解^[4]。本文则进一步分析了 Maxwell 流体环管流动, 以简洁的解析结果研究了其流动特征, 着重讨论了 Maxwell 类流体振荡现象的机理和诸因素对其环管流动特征的影响, 具有更本质、更深刻的意义。

2. 控制方程

Maxwell 流体在环管内的流动, 我们有如下基本假设: (1) 流体不可压且符合 Maxwell 本构律; (2) 仅轴向流速不为零, 即流动为一维; (3) 流动是轴对称的, 且不考虑末端效应; (4) 轴向速度的大小仅与径向位置有关; (5) 流动速度满足层流流动条件, 不考虑可能的湍流过程。依此, 有如下的无量纲基本方程:

$$F_r + H_c \frac{\partial F_r}{\partial \tau} = - \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \quad (1)$$

$$H_c \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial u}{\partial \tau} = 1 + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2)$$

上二式分别为本构方程和动量方程, 其中 H_c, u, τ, x, F_r 均为无量纲量, 分别表征非牛顿粘性系数、轴向速度、时间、径向距离和剪切应力, 它们和其他各有关参数的关系为:

$$H_c = \lambda_1 \eta_0 / \rho R_c^2, \quad u = \eta_0 W / f R_c^2, \quad x = r / R_c, \quad \tau = \eta_0 t / \rho R_c^2, \quad F_r = R_c T_{rz} / f$$

这里, $\rho, W, t, r, T_{rz}, R_c, \lambda_1, \eta_0$ 分别代表流体密度, 轴向流动速度, 流动时间, 径向位置, 沿壁面方向剪应力物理分量, 环管内半径和外半径、松弛时间及零剪切粘度。并定义 $f = - \left[\frac{\partial p}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \right]$, 视为不变量。

定解条件为: $u(\eta, \tau) = 0, u(1, \tau) = 0$

本文于 1990 年 7 月 15 日收到, 1991 年 4 月 22 日收到修改稿。

* 现为国防科技大学应用物理系博士生。

$$u(x, 0) = 0, \quad \partial u(x, 0) / \partial \tau = 0$$

其中 η 为内外半径之比, 即 $\eta = R_i / R_e$.

3. 问题的求解

在 $[\eta, 1]$ 区域内运用 Hankel 变换, 通过较复杂的运算, 可以得到上述问题满足控制方程和定解条件的解

$$\begin{aligned} u(x, \tau) = & \frac{1}{4} \left[(1 - x^2) - (1 - \eta^2) \frac{\ln x}{\ln \eta} \right] \\ & - \pi \cdot \left[\sum_{4H_c \rho_n \leq 1} \left(\frac{\alpha_{1n} e^{\alpha_{2n} \tau}}{\alpha_{1n} - \alpha_{2n}} - \frac{\alpha_{2n} e^{\alpha_{1n} \tau}}{\alpha_{1n} - \alpha_{2n}} \right) \right. \\ & \left. + \sum_{4H_c \rho_n > 1} e^{-s\tau} \left(\frac{S}{\rho_n} \sin \rho_n \tau + \cos \rho_n \tau \right) \right] \\ & \cdot \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot R_0(\rho_n x) \end{aligned} \quad (3)$$

式中, $R_0(\rho_n x) = J_0(\rho_n x) Y_0(\rho_n) - Y_0(\rho_n x) J_0(\rho_n)$

$$\alpha_{1n} = [-1 + \sqrt{1 - 4H_c \rho_n}] \cdot S$$

$$\alpha_{2n} = [-1 - \sqrt{1 - 4H_c \rho_n}] \cdot S$$

$$S = 1/(2H_c)$$

ρ_n 满足: $R_0(\rho_n \eta) = 0, \quad n = 1, 2, 3 \cdots \infty$

当 $H_c \rightarrow 0$ 时, $\alpha_{1n} \rightarrow -\rho_n^2, \alpha_{2n} \rightarrow -\infty$

$$u(x, \tau) \rightarrow \frac{1}{4} \left[(1 - x^2) - (1 - \eta^2) \frac{\ln x}{\ln \eta} \right]$$

$$- \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta) e^{-\rho_n^2 \tau}}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{R_0(\rho_n x)}{\rho_n^2}$$

此即牛顿流体的速度分布^[4].

根据(1)式, 无量纲剪切应力为:

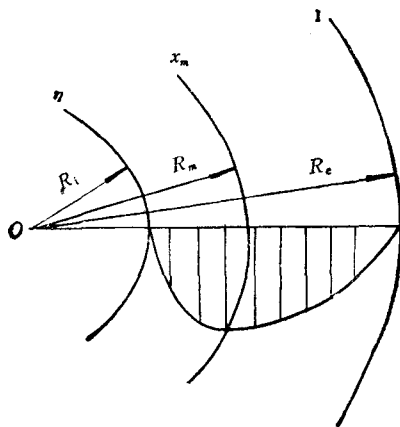


图 1

$$F_r = - \frac{e^{-\tau/H_c}}{H_c} \cdot \int_0^{\tau} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \cdot e^{\tau/H_c} \cdot d\tau$$

由于速度分布如图 1 所示, R_m 代表最大速度位置, 显然:

当 $r < R_m$ 时, $\partial u / \partial x > 0$;

$r > R_m$ 时, $\partial u / \partial x < 0$;

考虑 $r < R_m$ 的情形 ($r > R_m$ 时表达式取负), 有

$$\begin{aligned} F_r &= \frac{1}{H_c} e^{-\tau/H_c} \cdot \int_0^{\tau} \frac{\partial u}{\partial x} e^{\tau/H_c} d\tau \\ &= -\frac{1}{4} \left(2x + \frac{1-\eta^2}{x \ln \eta} \right) \cdot (1 - e^{-\tau/H_c}) \\ &\quad + \pi \cdot \left(\sum_{H_c \rho_n < 1} F_{1n} + \sum_{H_c \rho_n > 1} F_{2n} \right) \cdot \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \\ &\quad \cdot \frac{R_1(\rho_n x)}{\rho_n} \end{aligned} \quad (4)$$

这里, $R_1(\rho_n x) = -R'_0(\rho_n x)$

$$\begin{aligned} F_{1n} &= \frac{1}{\alpha_{1n} - \alpha_{2n}} \cdot \left(\frac{\alpha_{1n}}{1 + H_c \alpha_{2n}} e^{\alpha_{2n} \tau} - \frac{\alpha_{2n}}{1 + H_c \alpha_{1n}} e^{\alpha_{1n} \tau} \right) \\ F_{2n} &= \frac{1}{\rho_n H_c} \cdot e^{-\tau/2H_c} \cdot \sin \rho_n \tau \end{aligned}$$

平均流速分布则为:

$$\begin{aligned} u_a &= \frac{2}{1-\eta^2} \int_{\eta}^1 u \cdot x dx = \frac{1}{8} \left(1 + \eta^2 + \frac{1-\eta^2}{\ln \eta} \right) \\ &\quad - \frac{4}{1-\eta^2} \cdot \left(\sum_{H_c \rho_n < 1} U_{1n} + \sum_{H_c \rho_n > 1} U_{2n} \right) \cdot \frac{1}{\rho_n^4} \\ &\quad \cdot \frac{J_0(\rho_n \eta) - J_0(\rho_n)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \end{aligned} \quad (5)$$

这里, $U_{1n} = \frac{1}{\alpha_{1n} - \alpha_{2n}} (\alpha_{1n} e^{\alpha_{2n} \tau} - \alpha_{2n} e^{\alpha_{1n} \tau})$

$$U_{2n} = \left(\cos \rho_n \tau + \frac{1}{2\rho_n H_c} \sin \rho_n \tau \right) \cdot e^{-\tau/2H_c}$$

可见, 速度、平均速度和剪切应力均含有与 $(\rho_n \tau)$ 有关的正弦和余弦函数。当 $\tau \rightarrow \infty$ 时,

$$u \rightarrow \frac{1}{4} [(1-x^2) - (1-\eta^2) \ln x / \ln \eta]$$

$$u_a \rightarrow \frac{1}{8} [1 + \eta^2 + (1-\eta^2) / \ln \eta]$$

$$F_r \rightarrow -\frac{1}{4} [2x + (1-\eta^2) / (x \ln \eta)]$$

即为稳定解, 均与非牛顿系数 H_c 无关。

4. 结果分析及讨论

由上述结果,我们分别绘出了速度剖面、剪应力分布、平均速度以及内外壁面切应力随着时间的变化和非牛顿粘性系数 H_e 、环管形状因子 η 对它们的影响,可以得出:

(1) 非牛顿粘性系数 H_e 对速度、剪应力和平均速度的稳定解均无影响(见图 3, 5, 6),但不同的 H_e 值上述各物理量趋于稳定值的特征明显不同, H_e 增加时,控制一定的管道形状,则任一确定位置处的剪应力随无量纲时间 τ 的上升明显减缓,并且振荡加剧;而在速度和平均速度的上升过程中,非牛顿系数 H_e 在起动后的较短时间间隔内对它们的值影响不显著,但随后的振荡却随 H_e 的增大而加剧(图 3, 5)。各量在 $\tau > 10$ 时,振荡可以忽略;

(2) F_r 在 $\tau = 0$ 邻域内出现负的振荡值(见图 6)对此我们可作如下讨论:

剪应力表达式如文中(4)式,即

$$F_r = -\frac{1}{4} \left(2x + \frac{1-\eta^2}{x \ln \eta} \right) \cdot (1 - e^{-\tau/H_e}) + \pi \cdot \left(\sum_{4H_e \rho_n \leq 1} F_{1n} + \sum_{4H_e \rho_n > 1} F_{2n} \right) \cdot \frac{R_1(\rho_n x)}{\rho_n} \cdot \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \quad x > x_m$$

(对 $x \leq x_m$, 只需上式改变符号即可)

为考虑 $\tau \rightarrow 0^+$ 时 F_r 的性质,我们求 $\partial F_r / \partial \tau$, 有

$$\frac{\partial F_r}{\partial \tau} = \frac{F_r}{H_e} - \frac{1}{4H_e} \left(2x + \frac{1-\eta^2}{x \ln \eta} \right) \quad x \leq x_m$$

显然,由 F_r 的表达式知: $F_r|_{\tau \rightarrow 0^+} = 0$, 故

$$\left. \frac{\partial F_r}{\partial \tau} \right|_{\tau \rightarrow 0^+} = -\frac{1}{4H_e} \left(2x + \frac{1-\eta^2}{x \ln \eta} \right) \quad x \leq x_m$$

因此,零时刻剪应力 F_r 的瞬时性质便决定于函数

$$FF = 2x + \frac{1-\eta^2}{x \ln \eta} \quad x \leq x_m$$

当 $FF < 0$ 时,即 $x^2 < (\eta^2 - 1)/\ln \eta$ 时,剪应力便出现瞬时正值。 $x > x_m$ 的情形可作相应的讨论。同时还可以得到,由上述判别式所确定的径向位置正是无量纲速度 u 取极值的点,即

$$x_m^2 = (\eta^2 - 1)/\ln \eta \quad \text{或} \quad x_m = \sqrt{(\eta^2 - 1)/\ln \eta}$$

当 $\eta = 0.1$, $R_m = 0.463654794$

$\eta = 0.3$, $R_m = 0.614748333$

$\eta = 0.5$, $R_m = 0.735534255$

$\eta = 0.7$, $R_m = 0.845539283$

随着 η 的增大, x_m 越来越接近于 $(1 + \eta)/2$ 。

易见,振荡和剪切应力在启动邻域内的非正值正是对 Maxwell 类流体本构特征的具体反映,也说明了 Maxwell 本构律在描述流体非定常启动过程中的非客观性;

(3) 非牛顿粘性系数 H_e 对剪切应力的空间分布影响甚小,不同 H_e 的分布均接近

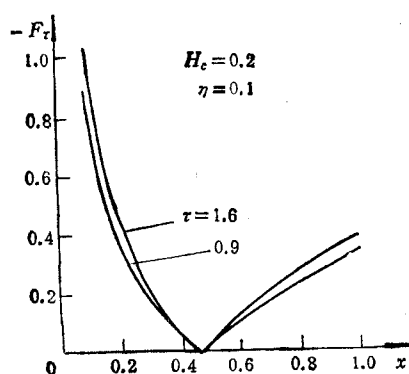


图2 剪切应力空间分布

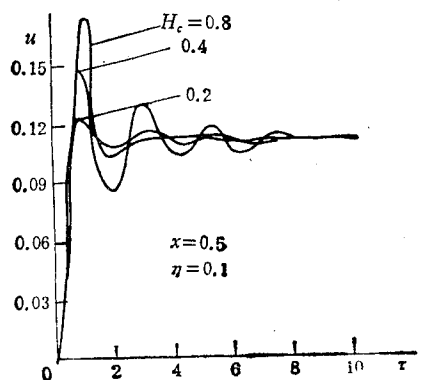


图3 环管内一点的速度变化曲线

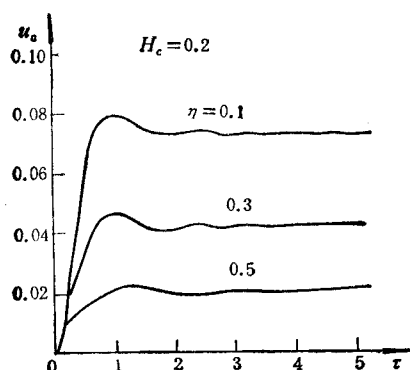


图4 不同 η 平均速度变化曲线

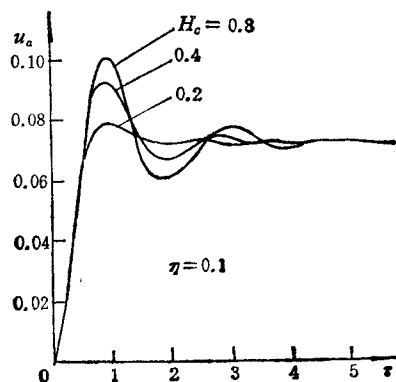


图5 不同 H_c 平均速度变化曲线

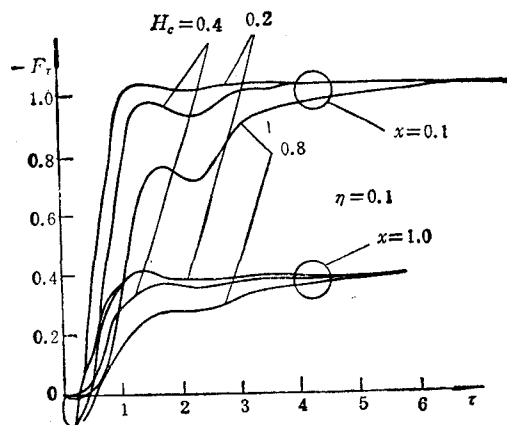


图6 剪切应力变化曲线

图2;

(4) 管道形状因子 η 对平均速度随时间的变化关系影响十分显著(图4)。保持 H_c 相同时, η 值增加将使得平均速度的稳定值迅速减小,同时上升过程的振荡减弱。因此实际

工作中应选择合适的管道形状 (η), 一方面保证满意的流量, 另一方面又应控制振荡到管道可以安全承受的强度, 特别是对粘性较大的 (H_e 大)、Maxwell 非牛顿流体的非定常流动, 尤其应当考虑通过选择合适的 η 来抑制振荡的强度。

振荡现象是 Maxwell 流体不定常流动过程的特征, 我们在管道设计时不仅要考虑其稳定值, 还应考虑其振荡峰值, 这一点十分重要, 应引起足够重视。

参 考 文 献

- [1] 韩式方, 伍岳庆. 非牛顿流体管内非定常流动研究. 流变学进展 (II) 成都科技大学出版社, 1987.
- [2] 韩式方, 韩飞宇. 非牛顿流体环管内不定常流动研究. 流变学进展 (VI) 成都科技大学出版社, 1987.
- [3] 刘慈群, 黄军旗. 非牛顿流体管内不定流的解析解. 应用数学和力学, 1988, 10(11).
- [4] 朱文辉, 刘慈群. 非牛顿流体不定常环管流解析解. 应用数学和力学 (待发表).
- [5] 陈文芳, 非牛顿流体力学. 科学出版社, 1984.

ANALYTICAL SOLUTION FOR THE UNSTEADY FLOW OF MAXWELL FLUIDS THROUGH ANNULAR PIPES

Zhu Wenhui Liu Ciqun

(Institute of Porous Flow & Fluid Mechanics 102801 Langfang, Hebei)

Abstract This paper presents analytical solutions to the partial differential equation for unsteady flow of Maxwell fluids in annular pipes by using the integral transform method. The results can be used to analyse the behavior of axial velocity and shear stress for unsteady flow of non-Newtonian Maxwell fluids in annular pipes and to provide a theoretical base for pipe-line engineering design.

Key words Maxwell fluids, non-Newtonian fluids, unsteady flow in annular pipes