

容量矩阵法在涡方法中的应用¹⁾

尹协远 李 平 童秉纲

(中国科学技术大学, 合肥, 230026)

提要 本文将容量矩阵技术与快速 Fourier 变换相结合求解非矩形域的 Poisson 方程, 再与格子涡方法相结合, 发展了一套求解复杂外形的快速涡方法。作为算例, 计算了有厚度平板和楔形体的分离流动, 得到了满意的结果。特别是在垂直平板绕流中, 模拟出了由于剪切层不稳定性引起的小涡结构。

关键词 涡方法, 容量矩阵技术 FFT, 平板, 剪切层

一、引言

自从 Chorin^[1] 1973 年提出解高 Re 数下 N-S 方程的涡团法以来, 涡方法已有了很大的发展和改进。迄今为止, 涡方法大致可分成两大类型: 一类是纯 Lagrange 格式, Poisson 方程用积分形式的解, 即涡-涡之间的相互作用受 Biot-Savart 公式支配。这种方法的优点是无需引入任何网格, 也就没有差分带来的数值误差。但这种方法有一个缺点, 就是耗时多。用 Biot-Savart 公式计算涡诱导速度每步约要进行 $O(N^2)$ 次操作 (N 为涡的总数), 所以这种方法又称为直接求和法。涡数目多了, 耗时太多; 涡数少了又得不到必要的分辨率。另一类是 Euler-Lagrange 混合格式, 即用差分法求 Poisson 方程的解, 用 Lagrange 格式追踪涡的运动。因为现在已发展起多种椭圆型方程的快速解法, 例如快速 Fourier 变换 (FFT), 用这种方法解 Poisson 方程, 大约只要 $O(M \ln M)$ 次操作 (M 是网格数)。当 $M \ll N^2$ 时, 同前一种方法相比, 可以大大节省机时。因此它可以用较密的网格和大量的涡数(上万个), 而不费太多的机时, 从而可以提高流场结构的分辨率。然而这个方法的缺点也正在于将一种没有网格的方法重新受到网格的限制, 引入数值耗散误差。这种方法及流场精细结构对于网格大小、涡数多少和时间步长是敏感的。

用 FFT 求解 Poisson 方程一般只适用于矩形求解域, 不能用于有固体内边界存在的非矩形域。为了得到矩形域, 通常的办法有两种: 一种是通过保角变换。但当物形比较复杂时, 有时很难找到适当的保角变换。另一种是用面元法, 求出物面上的环量分布。本文介绍的方法是用容量矩阵方法 (CMT), 同样可以克服这一困难。这样就开拓了 FFT 应用的范围, 对于任意复杂边界外形和多速通域都可以用快速涡法求解。

1) 国家自然科学基金资助项目。

本文于 1990 年 4 月 28 日收到第一个稿, 1990 年 11 月 15 日收到修改稿。

二、数值方法

二维非定常不可压缩流的控制方程为

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega \quad (1)$$

$$\nabla^2 \phi = -\omega \quad (2)$$

$$u = \partial \phi / \partial y, \quad v = -\partial \phi / \partial x \quad (3)$$

按照 Chorin 涡方法的基本思想, 连续的涡量场由许多离散的点涡或有核涡团代替, 并把涡量输运方程分裂成对流和扩散两个部分, 粘性扩散部分满足扩散方程, 可用随机走路来模拟。对流部分是 Poisson 方程的解。于是,

$$\omega = \sum \Gamma_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (4)$$

其中 $\mathbf{x}_i$ 和 Γ_i 是点涡的空间位置和强度。整个求解过程大致分成如下三个步骤。

1. 涡量的粘性扩散

把涡量输运方程(1)分裂成粘性扩散部分

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)_1 = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega \quad (5)$$

和对流部分

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)_2 = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega \quad (6)$$

方程(5)是个扩散方程, 它的解可以用一个均差为零, 方差为 $2\Delta t/\text{Re}$ 的正态分布函数来表示。因此, 它可以用大量离散涡的随机走路来模拟。在 Δt 时间内, 每个点涡的随机增量为

$$\Delta x_k = [4\Delta t/\text{Re} \cdot \ln(1/P_k)]^{1/2} \cos Q_k \quad (7)$$

$$\Delta y_k = [4\Delta t/\text{Re} \cdot \ln(1/P_k)]^{1/2} \sin Q_k$$

其中 k 为点涡的标号。 P_k 和 Q_k 分别是 $(0, 1)$ 和 $(0, 2\pi)$ 之间两个相互独立的随机数。

2. 容量矩阵技术和 Poisson 方程的解

(6)式 Eulex 方程的解可以由 Poisson 方程(2)的解得到。如前所述, 为了应用 FFT 方法, 必须先将非矩形解域变成矩形域。这里用的是容量矩阵技术^[2]。

设有非矩形域 D , 由外边界 ∂D_1 和内边界 ∂D_2 所围成, 外边界 ∂D_1 为矩形(如图 1 所示)。求解如下方程

$$\nabla^2 \phi = -\omega \quad (x, y) \in D \quad (8)$$

边界条件为

$$\phi = \phi^{(0)} \quad \text{在 } \partial D_1 \text{ 上}$$

$$\phi = \phi^{(i)} \quad \text{在 } \partial D_2 \text{ 上}$$

首先把求解域扩展为矩形, 把内边界 ∂D_2 包围的面积记为 D_2 , 则 $D_1 = D + D_2$, D_1 为矩形外边界包围的面积。由 Poisson 方程解

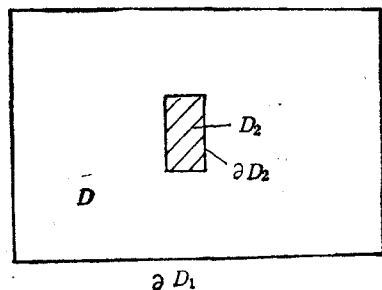


图 1

的迭加原理, 设解

$$\phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)}$$

使得 $\phi^{(1)}$ 在 D_1 内满足

$$\nabla^2 \phi^{(1)} = -\omega^{(1)}, \omega^{(1)} = \begin{cases} \omega & \text{在 } D \text{ 内} \\ 0 & \text{在 } D_2 \text{ 及 } \partial D_2 \text{ 上} \end{cases} \quad (9)$$

边界条件

$$\phi^{(1)} = \phi^{(0)} \quad \text{在 } \partial D_1 \text{ 上.}$$

由(9)式及边界条件得到解 $\phi_{ij}^{(1)}$, 并把内边界 ∂D_2 上的解 $\phi_{ij}^{(1)}$ 特别记为 $\phi_k^{(1)}$ ($k=1, 2, \dots, L$, 为内边界上的节点)。在一般情形下

$$\phi_k^{(1)} \approx \phi^{(i)}$$

所以, 剩下的问题是在内边界上要寻找合适的 ω_k 值, 使得内边界上满足 $\phi^{(i)}$ 。为此, 设计

$$\nabla^2 \phi^{(2)} = -\omega^{(2)}, \omega^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{在 } D \text{ 内及 } D_2 \text{ 内} \\ \omega_k & \text{在 } \partial D_2 \text{ 上} \end{cases} \quad (10)$$

边界条件

$$\phi^{(2)} = 0 \quad \text{在 } \partial D_1 \text{ 上}$$

这样解得的 $\phi_{ij}^{(2)}$ 要在内边界 ∂D_2 上满足

$$\phi_k^{(1)} + \phi_k^{(2)} = \phi^{(i)} \quad (k=1, 2, \dots, L)$$

为求解得 ω_k 值, 可先令 $\omega_1 = 1$, 其余格点上 $\omega_{ij} = 0$, 及外边界 ∂D_1 上 $\phi^{(0)} = 0$, 求解 Poisson 方程, 把得到的解在内边界上的值特别记为 $\phi_{11}, \phi_{12}, \dots, \phi_{1L}$ 。接着再假设 $\omega_2 = 0$, 其余格点上 $\omega_{ij} = 0$, 及 $\phi^{(0)} = 0$, 再解一次 Poisson 方程, 得到内边界格点上值 $\phi_{21}, \phi_{22}, \dots, \phi_{2L}$ 。重复上述过程, 遍及所有内边界格点, 于是得到一 $L \times L$ 矩阵

$$c = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1L} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{L1} & \phi_{L2} & \dots & \phi_{LL} \end{pmatrix} \quad (11)$$

c 就是容量矩阵

若令

$$\{c\}\omega_k + \phi_k^{(1)} = \phi_k^{(i)}$$

则

$$\omega_k = \{c\}^{-1}(\phi_k^{(i)} - \phi_k^{(1)})$$

其中

$$\omega_k = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_L)^T, \phi_k^{(1)} = (\phi_1^{(1)}, \phi_2^{(1)}, \dots, \phi_L^{(1)})^T$$

$$\phi_k^{(i)} = (\phi_1^{(i)}, \phi_2^{(i)}, \dots, \phi_L^{(i)})^T$$

因为容量矩阵 c 只与内边界几何形状有关, 所以可以事先一次求出并贮存, 以后直接调用即可, 并不需要每步求一次容量系数矩阵。用这个方法仅需增加 L 次 FFT 运算及一次矩阵求逆, 增加一个 $L \times L$ 矩阵的内存。

求解方程(2)时, 场内的涡量分布是用格子涡 (VIC) 方法, 通过面积加权分配到各个格点上去的, 即

$$\omega(i) = \frac{\Gamma_k A(i)}{A^2} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (12)$$

其中 $A(i)$ 和 A 分别为网格的部分面积和面积。如图 2 所示。

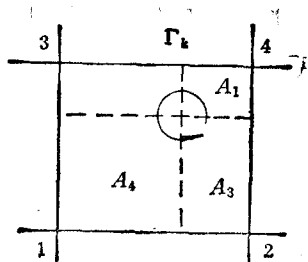


图 2

点涡的对流速度再次由所在网格内的四角点上速度加权平均得到

$$\left. \begin{aligned} u_k &= \sum u_i A_i / A \\ v_k &= \sum v_i A_i / A \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (13)$$

而格点上的速度 u_{ij}, v_{ij} 则是由求得的 ϕ_{ij} 差分得到的。

在一个时间步长以后,点涡所在位置为

$$\left. \begin{aligned} x_k(t + \Delta t) &= x(t) + u_k \Delta t + \Delta x_k \\ y_k(t + \Delta t) &= y(t) + v_k \Delta t + \Delta y_k \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

3. 壁面新生涡的生成

在解了第一、二步骤后,一般说壁面上只满足了法向无穿透条件,不满足切向无滑移条件。因此在壁面上应新生成一层涡层正好与滑移速度抵消。在用容量矩阵法中,我们实际已得到了满足壁面流线条件的壁面涡量值 ω_k , 所以新生涡强度可直接写成

$$\Delta \Gamma_k = \omega_k A - \Gamma_{old}(k) \quad (15)$$

其中 Γ_{old} 是紧贴壁面一层网格内老涡分配在壁面格点上的环量。

三、算例和讨论

1. 垂直平板

二维垂直平板的加速起动或突然起动问题与圆柱突然起动问题一样,是一个经典的流体力学问题。对于无厚度的二维平板可以容易地通过保角变换变成矩形域,无需应用容量矩阵技术。但对于有厚度的平板,就不容易找到适当保角变换了。用容量矩阵技术可以方便地克服这个困难。为了与文^[3]的实验对比,计算参数尽量选择得接近实验条件。特征长度和特征时间分别为 h 和 $\sqrt{h/a}$, 其中 h 和 a 分别为平板高和运动的加速度。于是

雷诺数为 $Re = \frac{h\sqrt{ha}}{\nu}$ 。无量纲化后的控制方程仍为(1)~(3)式。由于我们只计算了加速运动的早期阶段,所以认为流动是对称的。只需考虑上半平面。网格数为 128×128 , $\Delta x = 0.03h$, $\Delta y = 0.01h$, 平板厚度占 2 个网格。

边界条件: 上游为 $\phi = yt$, 对称轴线上及平板上 $\phi = 0$, 上边界和下游出口的 ϕ 值是先将点涡合并成若干个大涡后计算的。

我们计算了 $Re = 3000$ 和 5000 两种情形,分别与文^[3]实验中 $h=6\text{cm}, a=5.8\text{cm/s}^2$ 及 $h=8\text{cm}, a=6.2\text{cm/s}^2$ 相接近。图 3 是 $Re = 3000$ 时加速起动平板的流线图。在三个时间系列上可以清楚地看出涡从平板端部生成和长大的发展过程。图 4 是文^[3]中用氢气泡法流场显示的照片。两者相比,涡的大小、形状和再附区长度等特征都是很相近的。

我们还计算了突然起动情形,与加速起动相比,除运动刚开始时涡尺寸较大,但增长

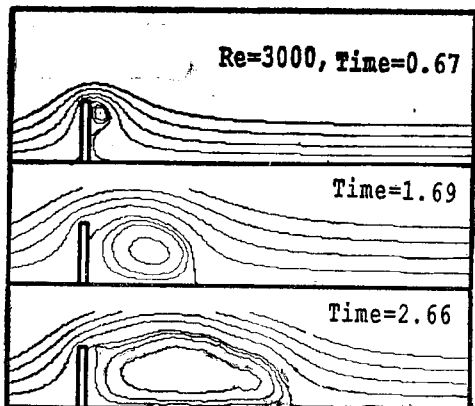
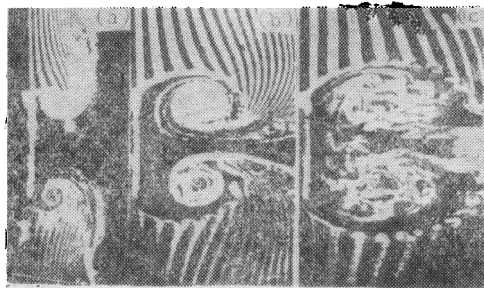


图 3

(a) $t = 0.67$ (b) $\bar{t} = 1.69$ (c) $\bar{t} = 2.66$ 图 4 初始涡旋的发展 $B=6\text{cm}$ $a=84\text{cm/s}^2$

较慢外, 其它没有本质区别。雷诺数的影响不大, 因为流动的分流是有固定点的强迫分离。我们对 $Re = 5000$ 的计算表明, 除初始涡增长较快, 再附长度较大外, 没有本质变化。

垂直平板或凸缘^[4]加速起动的一个最显著的特点是从尖缘发出的剪切层卷成一个螺旋型大涡。同时, 由于剪切层的 Kelvin-Helmholtz 不稳定性, 螺旋型剪切层会卷起一系列离散的小涡结构。在图 4 及文[4]的阴影照片及其它一些实验中都可看到这种美丽的小涡图象。但已有的数值计算中很难模拟出这些小涡结构。值得庆幸的是, 在计算中我们成功地模拟出了剪切层的这种演化过程。图 5 是 $t = 2.0$ 时的点涡图象。从中可以明显地看出剪切层的不稳定, 在平板端缘附近开始扭曲, 然后卷成了若干小涡。与实验相比,



图 5

 $Re = 3000.0$, $Time = 2.00$

小涡的数目较少, 尺寸较大。这是由于实验平板的端部是削尖了的, 平板也较薄, 产生的剪切层较薄的原因。而计算模型是平头的, 厚度也偏厚, 值得进一步改进。

数值试验表明, 要能很好地模拟出小涡结构, 必须要有足够多数目的点涡, 足够精细的网格和足够小的时间步长。网格大小应远小于卷起的小涡的尺度, 否则这些小涡将被

网格过滤掉。小步长和大量点涡可能更重要。我们试验了两种情形, 第一种是网格大小为 $\Delta x = 0.03h$, $\Delta y = 0.01h$, $\Delta t = 0.03$ 。最大点涡数在 $t = 2.66$ 时约为 1200 个。这种情形没有发现涡层卷成小涡的现象。第二种情形是网格大小为 $\Delta x = 0.023h$, $\Delta y = 0.0077h$, $\Delta t = 0.0026$, $t = 2.0$ 时最大点涡数是 15000 个。这时模拟出了小涡结构(图 5)。两者网格大小差不多, 但后者时间步长减小了一个量级, 涡数增加了一个量级。这个现象值得进一步研究。

2. 楔

为了便于计算容量矩阵, 网格的划分使得楔斜面正好在网格结点上。当然, 这一点不是一个严重的限制, 物面可以与网格结点不重合, 那时需要插值处理^[5]。图 6 是三个时刻涡层的演化图。在尖缘处有分离剪切层拖出, 并卷起成涡。随时间增长, 涡逐渐长大。Lewis^[6] 曾对此做过计算, 两者是相近的。图 7 是楔表面的压力分布。它可由

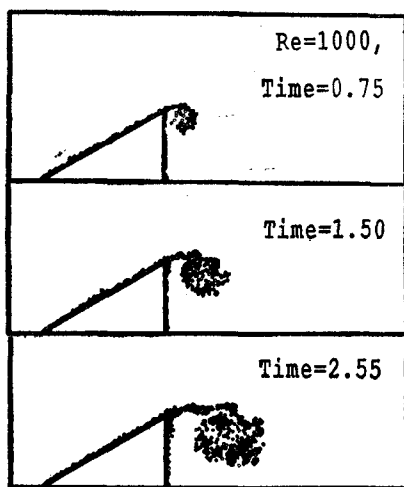


图 6

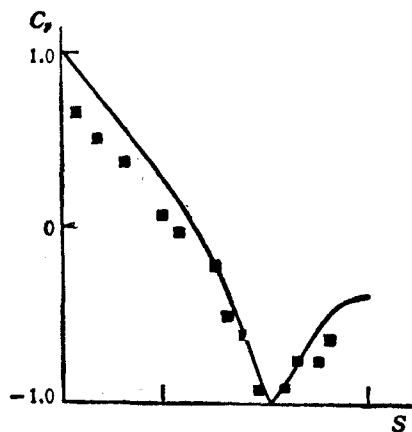


图 7

Lewis 的计算值

$$\partial p / \partial s = \nu \partial \omega / \partial n \quad (16)$$

算出, 其中 s 和 n 分别是沿物面切向和法向单位向量。表面压力与新生涡强度的关系为

$$\Delta p_i = \Delta \Gamma_i / \Delta t \quad (17)$$

图中压力系数已经标准化

$$C_p = \frac{p - p_0}{p_0 - p_e} + \frac{p - p_e}{p_0 - p_e}$$

其中 p_0 是驻点压力, p_e 是角点压力。由图 7 看出, 表面压力从驻点压力最大值沿壁面下降, 在尖缘角点处压力最小, 在背风面回流区压力又回升。

四、小 结

本文将容量矩阵法、格子涡法和 FFT 相结合, 发展了一套解复杂外形的快速涡方法。并用该方法计算了垂直平板和楔的非定常绕流, 与实验和已有的数值解相比, 符合良

好。用这种方法开拓了 FFT 应用范围,可大大节约机时,增加点涡数目,提高流场细微结构的分辨率。用这种方法,模拟出了垂直平板分离剪切层不稳定性卷起的小涡结构。

致谢 本文曾得到夏南付教授有益的讨论,特此致谢。

参 考 文 献

- [1] Chorin A J. Numerical study of slightly viscous Flow. *J. Fluid Mech.*, 1973, 57: 785—796.
- [2] 朱家骅,计算流体力学. 科学出版社出版,1985.
- [3] Lian, Q-X et al. Starting flow and structures of the starting vortex behind bluff bodies with sharp edges. *Experiments in Fluids*, 1989 8, (1—2): 5—103.
- [4] Pierce D. Photographic evidence of the formation and growth of vorticity behind plates accelerated from rest in still air. *J. Fluid Mech.*, 1961, 11: 460—464.
- [5] Schumann U. Fast elliptic solvers and Their Application in fluid dynamics. in: *Computational Fluid Dynamics* (Edited by W. Kollmann)

APPLICATION OF CAPACITANCE MATRIX METHOD IN VORTEX METHOD

Yin Xieyuan Li Ping Tong Binggang

(University of Science and Technology of China, Hefei, 230026)

Abstract A fast vortex method for solving complex irregular regions is developed in the present paper, using combination of capacitance matrix technique(CMT), fast Fourier transforms (FFT) as well as vortex-in-cell method (VIC). Using this fast solver, separated flows about a flat plate normal to incoming flow with any thickness and a wedge are, impulsed or accelerated motion from rest, computed at high Reynolds numbers. Especially, the fine field patterns are obtained around the flat plate flow. Due to Kelvin-Helmholtz instability the shear layer from edge of flat plate are rolled up a number of discretized small vortices. This phenomenon has been simulated successfully.

Key words vortex method, capacitance matrix technique(CMT), fast Fourier transform (FFT), flat plate, shear layer