第23卷 第6期 力学学报 Vol. 23, No. 6
1991年11月 ACTA MECHANICA SINICA Nov., 1991

Papkovich–Neuber(P–N)通解的互逆公式及其它

王林生 王斌兵
(河海大学，南京 210024) (14研究所，南京 210024)

提要 本文构造出了 P-N 解的互逆公式，从而较简捷地证明了 P-N 解的完备性．利用互逆公式中自动包含的反映零位移场的任意调和函数，可以自然地引出"E-S 凸域定理"，此外，平面应变问题通解也是互逆公式的直接结果．

关键词 通解，互逆，凸域

对于弹性力学的解，构造一组互逆公式，以已知的位移场，表示出解中的调和函数等，从而可以证明相应解的完备性．1962年 Sternberg 和 Gurtin[1]首先利用有体力的 Kelvin 特解，通过互逆公式巧妙地证明了 Boussinesq 解的完备性．1985年，王敏中[2]利用其构造的互逆公式又简捷地证明了 Naghdi-Hsu 解的完备性．本文则利用作者给出的互逆公式，证明了 P-N 解的完备性．

此外，由于互逆公式中自动包含了一个反映零位移场的任意调和函数，因此通解中四个调和函数的不唯一性自然地被显示出来，而且表达形式唯一确定(见公式(8)、(9))，这比文献[3]人为引入要严格、确定．最后指出，所谓"E-S 凸域定理"[4]以及平面应变问题的通解均可以看成为互逆公式的直接结果．

众所周知，无体积力的弹性力学方程

$$\nabla^2\boldsymbol{u}+\frac{1}{1-2\nu}\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \tag{1}$$

的 P-N 解为

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{H}-\frac{1}{4(1-\nu)}\nabla(H_0+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{H}) \tag{2}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{H}=0,\ \nabla^2H_0=0 \tag{3}$$

公式(2)、(3)构成了方程(1)的解，它们表示满足方程(1)的位移场可以由调和矢量 $\boldsymbol{H}$ 和调和函数 H_0 构成．反过来，能否由满足方程(1)的位移场表示出调和矢量和调和函数？回答是肯定的．文献[1]、[2]先后给出了相应解的互逆公式．本文则将给出 P-N 解(2)的互逆公式．为此，对(2)式取散度，得

本文于1990年4月13日收到第一稿，于1991年1月17日收到修改稿．

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{u} &= \nabla\cdot\boldsymbol{H}-\frac{1}{4(1-\nu)}\nabla^2(H_0+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{H}) \\
&= \frac{1}{2}\nabla^2(H_0+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{H})-\frac{1}{4(1-\nu)}\nabla^2(H_0+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{H}) \\
&= \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)}\nabla^2(H_0+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{H})
\end{aligned}
\tag{4}
$$

于是，由(4)式得

$$
H_0+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{H}-4(1-\nu)\phi=-\frac{4(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{u}}{\rho}d\tau \tag{5}
$$

$$
\nabla^2\phi=0 \tag{6}
$$

其中，$\rho=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$

现将(5)式代入(2)式，得

$$
\boldsymbol{H}-\nabla\phi=\boldsymbol{u}-\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{u}}{\rho}d\tau \tag{7}
$$

显然，(5)、(7)式就是由位移场表示出的 $\boldsymbol{H}$、H_0 及 ϕ 的互逆公式．但其中已多出了一个任意调和函数 ϕ．不过，如令 $\boldsymbol{u}=0$，则 $\boldsymbol{H}=\nabla\phi$，$H_0=4(1-\nu)\phi-\boldsymbol{r}\cdot\nabla\phi$．由此可见，$\phi$ 是反映零位移场的，而且表达形式是唯一确定的．如令

$$
\boldsymbol{H}=\nabla\phi+\boldsymbol{H}^* \tag{8}
$$

$$
H_0=4(1-\nu)\phi-\boldsymbol{r}\cdot\nabla\phi+H_0^* \tag{9}
$$

则(5)、(7)式成为

$$
\boldsymbol{H}^*=\boldsymbol{u}-\frac{1}{1-2\nu}\nabla\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{u}}{\rho}d\tau \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
H_0^* &= -\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u}+\frac{1}{1-2\nu}\boldsymbol{r}\cdot\nabla\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{u}}{\rho}d\tau \\
&\quad -\frac{4(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{u}}{\rho}d\tau
\end{aligned}
\tag{11}
$$

公式(5)、(7)或(10)、(11)就是由已知位移场 $\boldsymbol{u}$ 表示出的 P-N 解中 $\boldsymbol{H}$、H_0 或 $\boldsymbol{H}^*$、H_0^* 的互逆公式．由方程(1)与(5)、(7)或(10)、(11)易知，$\boldsymbol{H}$、H_0 或 $\boldsymbol{H}^*$、H_0^* 必分别为调和函数．而且

$$
\boldsymbol{H}^*-\frac{1}{4(1-\nu)}\nabla(H_0^*+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{H}^*)=\boldsymbol{H}-\frac{1}{4(1-\nu)}\nabla(H_0+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{H}) \tag{12}
$$

由此可见，P-N 解是完备的．

此外，由于 P-N 通解的互逆公式(5)、(7)中的调和函数 ϕ 的存在，显示了四个调和函数是不唯一的．长期以来，学者们通过各种途径致力于研究四个函数中某个函数能否被消除的问题．但直到目前为止，这个问题还未被彻底解决．然而，本文给出的互逆公式(10)、(11)与(8)、(9)也可以直接研究上述问题．可以指出：所谓"E-S 凸域定理"实际上是互逆公式的自然推论．而平面应变问题的通解则是互逆公式的直接结果．

事实上，由(10)式知，对于已知的位移场，$\boldsymbol{H}^*$ 是唯一确定的．但从(8)式又知，当

$$-\frac{\partial \phi}{\partial z}=H_3^* \tag{13}$$

则

$$H_3=0 \tag{14}$$

但这只要求弹性体所占的空间 D^* 是 Z 一向凸的区域就能使调和函数 ϕ 存在，而(13)式成立。(13)、(14)式就是由互逆公式自然而直接得到的"E-S 凸域定理"中的结果。

再考虑平面应变问题(设轴线沿 z 轴)。由于已知

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),\quad w=0$$

于是，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)+\frac{\partial}{\partial y}v(x,y) \tag{15}$$

将(15)式代入(10)式，得

$$\begin{aligned}H_3^*&=-\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\xi,\eta)d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\\&=\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{4\pi}\iiint_V\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\xi,\eta)(z-\zeta)d\xi d\eta d\zeta}{[\tilde{r}^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}\\&=\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{4\pi}\iint_s\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\xi,\eta)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(z-\zeta)d\zeta}{[\tilde{r}^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}d\xi d\eta\\&=\frac{1}{1-2\nu}\frac{1}{4\pi}\iint_s\nabla\cdot\boldsymbol{u}(\xi,\eta)[\tilde{r}^2+(z-\zeta)^2]^{-1/2}\Big|_{\zeta=-\infty}^{\zeta=\infty}d\xi d\eta\\&=0\end{aligned} \tag{16}$$

其中，$\tilde{r}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$

于是，由(13)式 $-\dfrac{\partial\phi}{\partial z}=H_3^*=0$ 可知，ϕ 应为平面调和函数，而由(14)式知 $H_3=0$。此外，由于(16)式中的重积分 $\displaystyle\iiint_V\frac{\nabla\cdot\bar{u}(\xi,\eta)d\xi d\eta d\zeta}{\rho}$ 仅为 x、y 的函数，可立即从(10)、(11)两式知，H_1^*、H_2^* 及 H_0^* 亦仅为 x、y 的函数；再由(8)、(9)两式又知，H_1、H_2 和 H_0 同样仅为 x、y 的函数。最后，由(2)、(3)两式可得平面应变问题的 P-N 通解：

$$\left.\begin{aligned}u&=H_1-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x}(H_0+xH_1+yH_2)\\v&=H_2-\frac{1}{4(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial y}(H_0+xH_1+yH_2)\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\nabla^2H_1=0,\quad\nabla^2H_2=0,\quad\nabla^2H_0=0 \tag{18}$$

参　考　文　献

[1] Sternbery, E. and Gurtin, M. E. On the Completeness of Certain stress functions in the linear theory of elasticity. Proc. Fourth U. S. Nat. Cong. Appl. Mech. 1962: 793—797.

[2] Wang M. Z. The Naghdi-Hsu solution and the Naghdi-Hsu transformation. *J. Elasticity*, 1985, 15: 103—108.

[3] Stippes, M. Completeness of the Papkovich potentials. *Q. Appl. Math.*, 1969, 26: 477—483.

[4] Eubanks, R. A. and Sternberg, E. On the Completeness of the Boussinesq-Papkovich stress functions. *J. Rational Mech. Anal.*, 1956, 5: 735—746.

THE TRANSFORMATION OF THE PAPKOVICH-NEUBER (P-N) GENERAL SOLUTION AND OTHERS

Wang Linsheng
(*Hohai University, Nanjing*, 210024)

Wang Binbing
(*14th Institute, Nanjing*, 210024)

Abstract In this note the completeness of P-N solution is proved. The proof is based upon constructing the transformation of the P-N solution. It is shown that the theorem of E-S convex region can be automatically derived by using any harmonic function which is included in the transformation and represents zero displacement field. In addition, the general solution of plane strain problems can also be obtained directly from the same transformation.

Key words general solution, transformation, convex region