

平面圆形线圈的磁弹性屈曲

谢慧才 方葛丰 王德满
(西安电子科技大学, 西安, 710071)

提要 本文以 Tokamak 装置中的角向场线圈为背景, 导出了平面圆形线圈在周向和横向磁场作用下的磁弹性屈曲条件. 发展了 F.C. Moon 的结果.

关键词 磁弹性, 屈曲, 托卡马克

一、引 言

在超导磁体系统中, 线圈的磁弹性屈曲是引起系统失效的一个重要方面. 一个典型的例子是 Tokamak 聚变装置中的若干个同心的平面圆形线圈——角向场线圈. 它们置于强大的环向磁场中, 用于产生垂直场(或称角向场), 以便感应和稳定等离子体. 角向场线圈的放置是平行于环向磁场的, 当无初始几何缺陷时, 环向场在线圈中产生的磁力为零. 当线圈存在安装误差或变形时, 就会产生可能导致线圈失稳的磁力.

F. C. Moon 对于角向场线圈在环向磁场 B_T 中的稳定性问题, 作过详尽的分析和实验研究. 他把问题简化为两种模型:

1. 受到若干刚性约束的弹性圆环^[1];
2. 受到若干弹性约束的刚性圆环^[2];

但是 Moon 并未考虑横向磁场的影响. 在 Tokamak 中, 角向场线圈是一定会受到一横向磁场 B_V 作用的. 尽管 B_V 比 B_T 小得多, 但 B_V 由于垂直于线圈平面, 会在线圈中产生面内张力, 对线圈屈曲的影响是不可忽视的. 本文在 Moon 的模型 1. 的基础上, 进一步考虑了横向磁场 B_V 的影响, 结果发现: B_V 对线圈屈曲的影响是很大的, 当 B_V/B_T 的值达到某一定值时, 磁弹性屈曲将不会发生.

二、平衡方程和屈曲条件

在环向场 B_T 和垂直场 B_V 中的角向场线圈模型如图 1 所示. 图中虚线示出了可能的屈曲模态.

图 2 给出了线圈微段的受力图. 为了简化, 只考虑线圈中心线的位移 (u_x, u_y, u_z) 以及绕中心线的扭转角 ϕ , 它们都只是周向位置的函数.

线圈的静力学平衡方程为^[3]:

本文于 1990 年 5 月 27 日收到第一次稿, 于 1990 年 8 月 26 日收到修改稿.

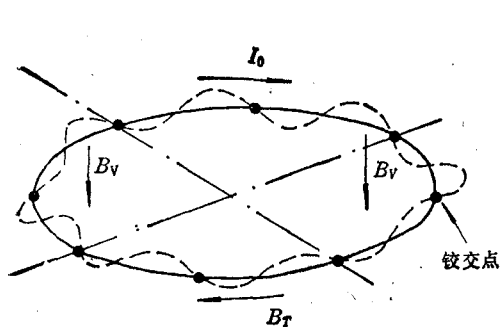


图 1 角向场线圈模型

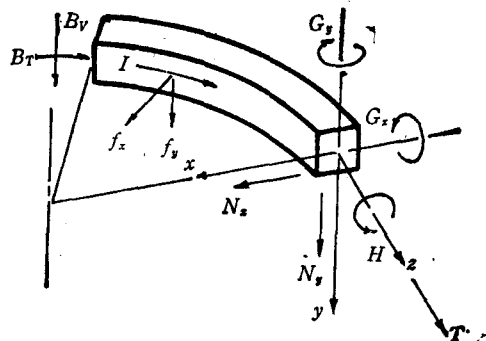


图 2 线圈微弧段受力图

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial z} - N_y \tau + T \kappa_1 + f_x &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial z} - T \kappa_2 + N_x \tau + f_y &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} - N_x \kappa_1 + N_y \kappa_2 + f_z &= 0 \\ \frac{\partial G_x}{\partial z} - G_y \tau + H \kappa_1 - N_y + c_x &= 0 \\ \frac{\partial G_y}{\partial z} - H \kappa_2 + G_x \tau + N_x + c_y &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial z} - G_x \kappa_1 + G_y \kappa_2 + c_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, T 是线圈横截面所受张力, N_x 和 N_y 是横剪力, G_x 和 G_y 是关于 x 轴和 y 轴的弯矩, H 是关于 z 轴的扭矩。 f 和 c 分别是磁体力和体力偶。 κ_1 和 κ_2 分别是线圈在 $x-z$ 平面和 $y-z$ 平面的曲率, τ 是扭率。

几何关系为

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{R} + \frac{u_x}{R^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \\ \kappa_2 &= \frac{\phi}{R} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \\ \tau &= \frac{d\phi}{dz} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_y}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

物理关系为

$$\left. \begin{aligned} G_x &= A \kappa_1 \\ G_y &= D \left(\kappa_2 - \frac{1}{R} \right) \\ H &= C \tau \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中, A, D 表示线圈截面的弯曲刚度, C 表示扭转刚度。

设线圈变形前的电流为

$$\mathbf{I}_0 = I_0 \mathbf{e}_x \quad (4)$$

线圈变形时,可认为电流矢量 $\mathbf{I}_0$ 作一刚性旋转。如线圈可看成一细丝,即横截面尺寸远小于线圈直径。并在小变形条件下,略去变形的二阶小量,则变形后的电流 $\mathbf{I}$ 可表为

$$\mathbf{I} = I_0(u'_x \mathbf{e}_x + u'_y \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_x) \quad (5)$$

式中及此后,令

$$' = \frac{\partial}{\partial x}$$

线圈所受洛伦兹力为(忽略线圈电流自场对磁力的贡献):

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{I} \times (B_T \mathbf{e}_x + B_V \mathbf{e}_y) \\ &= I_0 B_T u'_x \mathbf{e}_x - I_0 B_T u'_y \mathbf{e}_y + I_0 B_V u'_x \mathbf{e}_x - I_0 B_V \mathbf{e}_x \end{aligned} \quad (6)$$

式中前三项为磁体力的扰动部分,最后一项为常力 $-I_0 B_V \mathbf{e}_x$, 将在线圈中引起常张力

$$T_0 = I_0 B_V R \quad (7)$$

下面我们将忽略平衡方程(1)中的磁体力偶 $\mathbf{c}$, 并使方程线性化, 即略去有关变形的二次微量, 如 $N_x, G_x, N_y, H_y, H_x, G_y$ 等项。记 $\mathbf{T}_1$ 为由于弯曲变形所产生的附加张力, 变形后的总张力为 $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_1$, 平衡方程(1)变为

$$\left. \begin{aligned} N'_x + I_0 B_V R \left(\frac{u_x}{R^2} + u''_x \right) + \frac{T_1}{R} + I_0 B_T u'_y &= 0 \\ N'_y - I_0 B_V R \left(\frac{\phi}{R} - u''_y \right) - I_0 B_T u'_x &= 0 \\ T'_1 - N_x \frac{1}{R} + I_0 B_V u'_x &= 0 \\ G'_x + H \frac{1}{R} - N_y &= 0 \\ G'_y + N_x &= 0 \\ H' - G_x \frac{1}{R} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

利用(2)(3)式, 经过繁冗的推导后, 从(8)式中可导出关于 u_x 和 u_y 的高阶微分方程组:

$$\left. \begin{aligned} D u_x^{(5)} + \left(\frac{2D}{R^2} - I_0 B_V R \right) u_x^{(3)} + \frac{D}{R^4} u'_x - I_0 B_T u''_y &= 0 \\ A u_y^{(6)} + \left(\frac{2A}{R^2} - I_0 B_V R \right) u_y^{(4)} + \left(\frac{A}{R^4} - I_0 B_V \frac{1}{R} \right) u''_y \\ + I_0 B_T \left(u_x^{(3)} - \frac{A}{R^2 C} u'_x \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

设线圈环向均布的铰支点数为 ($M \geq 2$), 则满足方程(9)和约束条件的解可设为

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} + i a_{12} \\ a_{21} + i a_{22} \end{Bmatrix} e^{i \frac{Mx}{R}} \quad (10)$$

把(10)式代入(9)式可得

$$\left. \begin{aligned} c_1 a_{21} - c_2 a_{12} &= 0 \\ c_1 a_{22} + c_2 a_{11} &= 0 \\ c_3 a_{21} - c_4 a_{12} &= 0 \\ c_3 a_{22} + c_4 a_{11} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= M(M^2 - 1) \left[\frac{A(M^2 - 1)}{R^3} + I_0 B_V \right] \\ c_2 &= I_0 B_T \left(M^2 + \frac{A}{C} \right) \\ c_3 &= I_0 B_T M \\ c_4 &= \frac{D}{R^3} (M^2 - 1)^2 + I_0 B_V M^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 有非零解的充要条件是方程(11)的系数矩阵的行列式等于零,于是可得

$$c_1 c_4 = c_2 c_3 \quad (13)$$

把式(12)代入(13),并整理成 $aI_0^2 + bI_0 + c = 0$ 的形式,得

$$\frac{M^2(\nu^2 - \nu_0^2)}{M^2 - 1} B_T^2 I_0^2 + \frac{M^2(A + D) - D}{R^3} \nu B_T I_0 + \frac{AD(M^2 - 1)^2}{R^6} = 0 \quad (14)$$

式中

$$\nu = \frac{B_V}{B_T}, \quad \nu_0^2 = \frac{M^2 + A/C}{M^2(M^2 - 1)} \quad (15)$$

(14)式即是出现幅度任意的非零变形场的条件。又如(4)式所示,本文已设定电流正方向,且条件的建立亦只考虑正向工作电流,故有 $I_0 > 0$ 。(14)式 I_0 的正根即是线圈屈曲的临界电流。而 I_0 的负根则没有物理意义。

三、讨 论

下面分两种情况讨论方程(14)的根。

1. 当 $\nu \geq \nu_0$ 时,由原方程容易看出必有 $I_0 < 0$,即方程只有负根。也就是说,在我们考虑的通正向电流的情况下,(14)式将得不到满足,即不会发生失稳现象。

2. 当 $\nu < \nu_0$ 时,方程有一正一负两个根,其正根为

$$I_0 = \frac{(M^2 - 1) \{ [M^2(A + D) - D]\nu + [[M^2(A - D) + D]^2 \nu^2 + 4(M^2 + A/C)AD]^{1/2} \}}{2M^2 R^3 B_T (\nu_0^2 - \nu^2)} \quad (16)$$

特别是,当 $\nu = 0$, 即横向磁场 $B_V = 0$ 时,(16)式退化为

$$I_0 = \frac{(M^2 - 1)^2}{R^3 B_T} \sqrt{\frac{ADC}{A + M^2 C}} \quad (17)$$

(17)式与 Moon 的结果完全相同。(即文献[1]中的(6—7.32)式)。

利用(16)式,可确定线圈屈曲的临界电流值,或者在已知工作电流的情况下,确定保证线圈不失稳所需的最少约束点数 M 。

为了在数值上有一个更清楚的概念,下面以圆形截面(半径为 r_0)线圈为例,来讨论(16)式。此时,有

$$A = D = \frac{1}{2} C - \frac{1}{4} Y \pi r_0^4 \quad (18)$$

式中 Y 为杨氏模量。则(16)式变为

$$I_0 = \frac{Y \pi r_0^4}{R^3 B_T} \frac{M^2 - 1}{8 M^2 (\nu_0^2 - \nu^2)} \{ (2M^2 - 1)\nu + [\nu^2 + 2(2M^2 + 1)]^{1/2} \} \quad (19)$$

式中 I_0 为屈曲的临界电流值,工作电流应小于此值。

为了方便地判断该系统的稳定性,引进一无量纲参数 $M. E.$ (*Magneto-Elastic number*), 其物理意义表示磁屈曲力 ($B_T I_0$) 与弹性恢复力之比,令

$$M. E. = \frac{I_0 B_T}{Y \pi R} \left(\frac{R}{r_0} \right)^4 \quad (20)$$

则由(19)式可建立系统的稳定性条件为

$$M. E. < G(M, \nu) \quad (21)$$

式中

$$G(M, \nu) = \frac{M^2 - 1}{8 M^2 (\nu_0^2 - \nu^2)} \{ (2M^2 - 1)\nu + [\nu^2 + 2(2M^2 + 1)]^{1/2} \} \quad (22)$$

此时

$$\nu_0^2 = \frac{M^2 + 1/2}{M^2(M^2 - 1)} \quad (23)$$

可见,参数 $G(M, \nu)$ 的值代表了系统稳定性的高低。很明显,线圈约束点数目 M 愈大,则 G 愈大,系统稳定性愈高。但 $G(M, \nu)$ 和 ν 关系如何呢,即横向磁场 B_T 对稳定性的影响如何呢? 为了更直观地讨论,取约束点数 $M = 4$ 为例,此时

$$\nu_0 = 0.262$$

$$G = \frac{15 (31\nu + \sqrt{\nu^2 + 66})}{8(1.1 - 16\nu^2)}$$

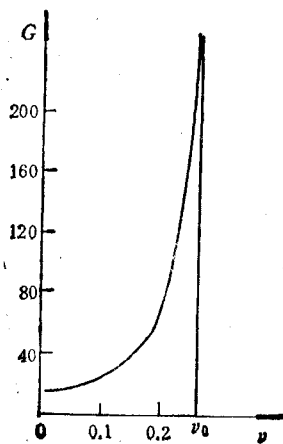


图3 $G \sim \nu$ 关系曲线

$G-\nu$ 曲线示于图 3。

另外,表 1 中给出了对于不同的约束数 M 所对应的 ν_0 ,以及 ν 的几种取值所对应的 G 值。

表 1

M	ν_0	$G(M, \nu)$		
		$\nu = 0$	$\nu = 0.5\nu_0$	$\nu = 0.9\nu_0$
2	0.612	1.061	2.132	10.71
4	0.262	13.85	27.70	138.5
6	0.170	50.69	101.4	506.9
8	0.126	123.5	247.1	1235
16	9.0627	1015	2030	10150
24	0.0417	3442	6885	34425

从图 3 及表 1 中可以看出, ν 对线圈的磁弹性稳定性影响很大。 G 随着 ν 的增加而迅速上升,特别是当接近 ν_0 时,如表中所示, $\nu = 0.5\nu_0$ 和 $\nu = 0.9\nu_0$ 时, G 值差不多是 $\nu = 0$ 时的 2 倍和 10 倍。这说明,尽管横向磁场 B_r 较小,即 ν 值较小,但由于它会在线圈中产生周向张力,从而大大改善线圈的稳定性。另外, ν_0 是有关稳定性的一个重要参数,它表示当 B_r/B_T 达到这个临界值时,线圈不会发生磁弹性屈曲。

从表 1 中亦可看出,要增加线圈的稳定性,除了增加约束外,加大横向磁场将更为有效。特别是对于增加约束将不利于防止热泄漏的超导磁系统,就更有意义。

参 考 文 献

- [1] Moon, F. C., Magneto-Solid Mechanics, Wiley, New York, 1984.
- [2] Moon, F.C., Buckling of a superconducting ring in a toroidal magnetic field, *J. Appl. Mech.*, 1979, 46(1): 151—155.
- [3] Love A.E.H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover, New York, 1922.

MAGNETOELASTIC BUCKLING OF A CIRCULAR PLANAR COIL

Xie Huicai, Fang Gefong, Wang Deman

Abstract The condition of magnetoelastic buckling is presented for a circular planar coil in a circumferential and transverse magnetic field. The results of F.C. Moon are extended.

Key words magnetoelasticity, buckling, Tokamak