

三维不可压缩边界层分离流的反解法

阎超 吴玉林 梅祖彦

(清华大学水利水电工程系, 北京, 100084)

摘要 本文提出了计算具有分离区的三维层流和湍流边界层的一种反解法。计算中采用了半正交曲线坐标系和涡粘性各向异性湍流模型。数值分析中采用了变换域技术和 Keller 分块差分格式。用本文方法计算了一个三维边界层分离流实例, 计算结果同实验数据吻合得很好。

关键词 三维边界层, 反解法, 数值分析

一、引言

近十几年来, 关于边界层的研究主要侧重于三维边界层问题, 以及二维和三维边界层分离问题。应该指出, 尽管分离流动主要是由粘性效应引起的, 但分离流不一定都能归属到边界层范畴。对于小的分离区, 尤其是常见的分离泡问题, 可以证明, 边界层方程仍然有效。

对于二维定常分离边界层, 当给定 $\partial p / \partial x$ 时, 边界层方程在分离点是奇点, 用正解法无法求解。Catherall 等 (1966) 首先提出了二维边界层积分型的反解法^[1]。在分离点附近, 分离对压力梯度的变化很敏感。合理的计算次序是应先规定位移厚度的分布, 求解压力分布, 这就是反解法。

由于三维边界层分离在分离现象, 判别和模拟等方面比二维复杂。直至 1981 年, Cousteix 等将反解法引入三维边界层^[2]。以后 Ballar, Delery^[3], Radwan^[4], 和 Edward^[5] 等分别提出了求解三维分离边界层的反解法, 取得了满意的结果。

本文提出了一种求解具有分离区三维边界层的反解法。在计算中采用半正交曲线坐标系。为了减少计算时间, 将基本方程进行变换后, 用 Keller 分块差分方法求解^[6]。为了反映三维边界层特征, 在计算湍流边界层时, 采用了涡粘性各向异性的湍流模型。并推导出三维边界层反解法中边界条件的一般适用公式。

二、基本方程及湍流模型

在图 1 半正交曲线坐标系中, 流向 x 和横向 z 均沿物面, 而 y 向垂直于物面。在半正交曲线坐标系 (x, z, y) 中, 不可压三维边界层的控制方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} (u h_2 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial z} (w h_1 \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial y} (v h_1 h_2 \sin \theta) = 0 \quad (1)$$

本文于 1989 年 9 月 21 日收到, 1990 年 11 月 12 日收到修改稿。

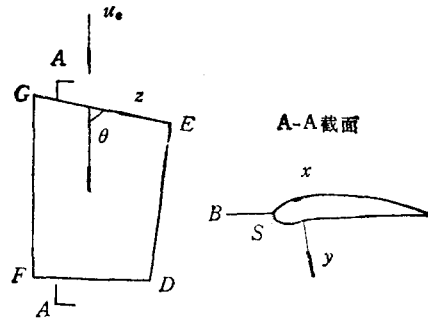


图 1 计算域和坐标系

$$\begin{aligned} & \frac{u}{h_1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{h_2} \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial y} - k_1 u^2 \operatorname{ctg} \theta + k_2 w^2 \csc \theta + k_{12} uw \\ &= -\frac{\csc^2 \theta}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\operatorname{ctg} \theta \csc \theta}{h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u}{h_1} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{w}{h_2} \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial y} - k_2 w^2 \operatorname{ctg} \theta + k_1 u^2 \csc \theta + k_{21} uw \\ &= \frac{\operatorname{ctg} \theta \csc \theta}{h_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{\csc^2 \theta}{h_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial w}{\partial y} - \overline{v'w'} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

式中 h_1, h_2 为拉梅系数, θ 表示 x 轴和 z 轴间夹角, k_1 和 k_2 分别为 $z=c$ 和 $x=c$ 平面与叶片表面相交形成曲线的曲率, k_{12} 和 k_{21} 定义为:

$$\begin{aligned} k_{12} &= \frac{1}{\sin \theta} \left[-\left(k_1 + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \cos \theta \left(k_2 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right] \\ k_{21} &= \frac{1}{\sin \theta} \left[-\left(k_2 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \cos \theta \left(k_1 + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

三维湍流模型不同于二维模型之一是雷诺应力的方向性或说是涡粘性的各向异性。根据文献[8],将雷诺应力方程中的压力应变项引入一参数 T ,并略去对流和扩散项,可得湍流切应力的代数表达式

$$-\overline{u'v'} = (v_t)_{xx} \frac{\partial u}{\partial y} + (v_t)_{xz} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4)$$

$$-\overline{v'w'} = (v_t)_{xz} \frac{\partial u}{\partial y} + (v_t)_{zz} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (5)$$

式中

$$(v_t)_{xx} = v_t(u^2 + Tw^2)/(u^2 + w^2)$$

$$(v_t)_{zz} = v_t(Tu^2 + w^2)/(u^2 + w^2)$$

$$(v_t)_{xz} = (v_t)_{zx} = v_t(1-T)uw/(u^2 + w^2)$$

涡粘性系数 v_t 由 Cebeci-Smith 模型决定,在内层

$$v_t = l^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + (T-1) \sin^2 \theta \frac{\left(w \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial w}{\partial y} \right)}{(u^2 + w^2 + 2 \cos \theta uw)} \right]^{1/2}$$

在外层

$$v_t = 0.168 \left| \int_0^\infty (U_{te} - U_t) dy \right|$$

$$U_t = (u^2 + w^2 + 2 \cos \theta uw)^{1/2}$$

式中

$$l = 0.4y \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{A}\right) \right]$$

$$A = A^+ \frac{\nu}{N} \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{-1/2}$$

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \nu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_w^2 + 2 \cos \theta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_w \right]^{1/2}$$

式中下标“w”表示壁面处, τ_w 为壁面切应力。若物面为实壁, 则

$$N = (1 - 11.8P^+)^{1/2}$$

$$P^+ = \nu U_{te} \left(\frac{\rho}{\tau_w} \right)^{3/2} \frac{dU_{te}}{ds}$$

$$\frac{d}{ds} = \frac{u_e}{U_{te}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{w_e}{U_{te}} \frac{\partial}{\partial z}$$

式中 e 表示外部流动参数, $A^+ = 26$ 。由于 T 的引入, 湍流模型中的涡粘性成为各向异性。East 等人根据各种试验数据提出 T 的数值^[8], Rotta 提出在没有更精确的试验数据情况下, T 取值为 0.5^[8]。本文采用此值。

三、方程变换及差分格式

在三维边界层计算中计算时间十分重要, 对基本方程进行变换后, 边界层内各参数变化梯度大为减小, 故可以用较大的步长, 另外还消除了原方程中的一些奇点。

在反解法中, 外部流速度 u_e 和 w_e 是待求值, 故采用变换:

$$x = x, z = z, d\eta = \left(\frac{u_\infty}{\nu s_1} \right)^{1/2} dy, s_1 = \int_0^x h_1 dx \quad (6)$$

引入矢量势 ψ 和 ϕ :

$$u h_2 \sin \theta = \frac{\partial \psi}{\partial y}, w h_1 \sin \theta = \frac{\partial \phi}{\partial y}, v h_1 h_2 \sin \theta = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (7)$$

ψ 和 ϕ 可表示为:

$$\psi = (\nu s_1 u_\infty)^{1/2} h_2 \sin \theta f(x, z, \eta)$$

$$\phi = (\nu s_1 u_\infty)^{1/2} u_{ref} / u_\infty \cdot h_1 \sin \theta g(x, z, \eta) \quad (8)$$

其中 u_∞ 是来流速度, u_{ref} 是参考速度, f, g 是无量纲函数。由式(6)至(8), 并计入(4)和(5)式, 那么(2)和(3)式变换后为:

$$(A_1 f'')' + (A_2 g'')' + A_3 f f'' - A_4 (f')^2 - A_5 f' g' + A_6 f'' g - A_7 (g')^2$$

$$+ A_8 \frac{\partial p}{\partial x} + A_9 \frac{\partial p}{\partial z} = A_9 \left(f' \frac{\partial f'}{\partial x} - f'' \frac{\partial f}{\partial x} \right) + A_{10} \left(g' \frac{\partial f'}{\partial z} - f'' \frac{\partial g}{\partial z} \right) \quad (9)$$

$$(A_{16}g'')' + (A_{11}f'')' + A_3fg'' - A_{12}f'g' - A_{13}(g')^2 + A_6g''g - A_{14}(f')^2 + A_{17}\frac{\partial p}{\partial x} + A_{18}\frac{\partial p}{\partial z} = A_9\left(f'\frac{\partial g'}{\partial x} - g''\frac{\partial f}{\partial x}\right) + A_{10}\left(g'\frac{\partial g'}{\partial z} - g''\frac{\partial g}{\partial z}\right) \quad (10)$$

式中 $A_1 \sim A_{18}$ 是方程变换后产生的系数^[7].

利用 Keller 差分格式^[6], 首先引入新的独立变量 $u(x, z, \eta)$, $v(x, z, \eta)$, $w(x, z, \eta)$ 和 $t(x, z, \eta)$ 则式(9)和(10)可写成(此处 u, v, w 为无量纲速度)

$$f' = u, \quad u' = v, \quad g' = w, \quad w' = t \quad (11a, b, c, d)$$

$$(A_1v)' + (A_2t)' + A_3fv - A_4u^2 - A_5uw + A_6vg - A_7w^2 + A_8\frac{\partial p}{\partial x} + A_{15}\frac{\partial p}{\partial z} - A_9\left(u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial f}{\partial x}\right) + A_{10}\left(w\frac{\partial u}{\partial z} - v\frac{\partial g}{\partial z}\right) \quad (11e)$$

$$(A_{16}t)' + (A_{11}v)' + A_3ft - A_{12}uw - A_{13}w^2 + A_6gt - A_{14}u^2 + A_{17}\frac{\partial p}{\partial x} + A_{18}\frac{\partial p}{\partial z} = A_9\left(u\frac{\partial w}{\partial x} - t\frac{\partial f}{\partial x}\right) + A_{10}\left(w\frac{\partial w}{\partial z} - t\frac{\partial g}{\partial z}\right) \quad (11f)$$

同时还考虑压力 p 沿 y 向的导数为零, 则

$$p' = 0 \quad (11g)$$

式中上标“ η ”表示对 η 的导数. 考虑图 2 所示的长方形网格. 令 k_n, h_i 和 r_i 分别为 x, η 和 z 向的步长; 令

$$x_0 = 0, \quad x_n = x_{n-1} + k_n \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

$$z_0 = 0, \quad z_i = z_{i-1} + r_i \quad (i = 1, 2, \dots, I)$$

$$\eta_0 = 0, \quad \eta_j = \eta_{j-1} + h_j \quad (j = 1, 2, \dots, J)$$

在中点 $(x_n, z_i, \eta_{j-1/2})$ 取中心差分格式, 则式(11a, b, c, d)写成差分形式为

$$\left. \begin{aligned} (f_j^{n,i} - f_{j-1}^{n,i})/h_j &= u_{j-1/2}^{n,i} \\ (u_j^{n,i} - u_{j-1}^{n,i})/h_j &= v_{j-1/2}^{n,i} \\ (g_j^{n,i} - g_{j-1}^{n,i})/h_j &= w_{j-1/2}^{n,i} \\ (w_j^{n,i} - w_{j-1}^{n,i})/h_j &= t_{j-1/2}^{n,i} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

同时引入下列符号, 例如对于 u

$$\bar{u} = u^{n-1/2, i-1/2}, \quad u_j^{n-1/2, i} = \frac{1}{2}(u_j^{n,i} - u_j^{n-1, i})$$

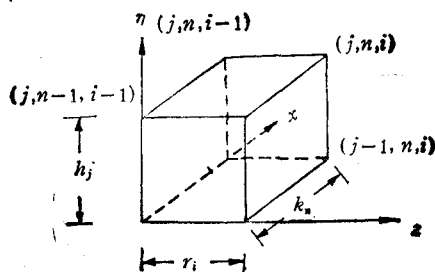


图 2 差分网格节点

和系数 $\bar{A}$

$$\bar{A} = (A)_{n-1/2}^{i-1/2} = \frac{1}{4} (A_n^i + A_n^{i-1} + A_{n-1}^i + A_{n-1}^{i-1})$$

则方程(11e)可以写成

$$\begin{aligned} & [(\bar{A}_1 v)_i - (\bar{A}_1 v)_{i-1}]/h_i + [(\bar{A}_2 t)_i - (\bar{A}_2 t)_{i-1}]/h_i + \bar{A}_3 (\bar{f} v)_{i-1/2} - \bar{A}_4 (\bar{u}^2)_{i-1/2} \\ & - \bar{A}_5 (\bar{u} w)_{i-1/2} + \bar{A}_6 (\bar{v} g)_{i-1/2} - \bar{A}_7 (\bar{w}^2)_{i-1/2} + \bar{A}_8 [p_{j-1/2}^{n,i-1/2} \\ & - p_{j-1/2}^{n,i-1/2}]/k_n + \bar{A}_{15} [p_{j-1/2}^{n,i-1/2} - p_{j-1/2}^{n,i-1}]/r_i \\ & - \bar{A}_9 [\bar{u}_{j-1/2} (u_{j-1/2}^{n,i-1/2} - u_{j-1/2}^{n,i-1/2})/k_n - \bar{v}_{j-1/2} (f_{j-1/2}^{n,i-1/2} - f_{j-1/2}^{n,i-1/2})/k_n] \\ & + \bar{A}_{10} [\bar{w}_{j-1/2} (u_{j-1/2}^{n,i-1/2} - u_{j-1/2}^{n,i-1})/r_i - \bar{v}_{j-1/2} (g_{j-1/2}^{n,i-1/2} - g_{j-1/2}^{n,i-1})/r_i] \quad (13) \end{aligned}$$

其余各控制方程可以导出与(13)式相类似的差分表达式。

如果已知 $(f, u, g, v, w, t, p)_{j-1}^{n,i-1}$, $(f, u, g, v, w, t, p)_{j-1}^{n,i-1}$ 和 $(f, u, g, v, w, t, p)_{j-1}^{n,i}$ ($0 \leq j \leq J$) 则所有差分方程成为一个包含有 $(7J+7)$ 个变量的隐式非线性代数方程组, 可以用 Newton 法进行线性化处理。线性化后的线性代数方程的系数矩阵是一个含有 $(7J+7)$ 行和列的块状矩阵, 可用分块法^[6]求解。

四、边界条件处理

由式(6)至(8)可得到实际流速 u, w 与 f', g' 的关系

$$u = u_{\infty} f' \quad w = u_{\infty} g' \quad (14)$$

并根据位移厚度 δ_x, δ_z 定义, 得到

$$\begin{aligned} \delta_x &= \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_{\infty}}\right) dy = \left(\frac{\nu s_1}{u_{\infty}}\right)^{1/2} \left[\eta_{\infty} - \frac{u_{\infty}}{u_{\infty}} f(x, \eta_{\infty}, z)\right] \\ \delta_z &= \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{w}{w_{\infty}}\right) dy = \left(\frac{\nu s_1}{u_{\infty}}\right)^{1/2} \left[\eta_{\infty} - \frac{u_{\infty}}{u_{\infty}} g(x, \eta_{\infty}, z)\right] \end{aligned}$$

以及根据壁面条件, 可以得到以下六个边界条件

$$\eta = 0: f = f' = g = g' = 0 \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta = \eta_{\infty}: f(x, \eta_{\infty}, z) &= f'(x, \eta_{\infty}, z) [\eta_{\infty} - \delta_x (u_{\infty}/\nu s_1)^{1/2}] \\ g(x, \eta_{\infty}, z) &= g'(x, \eta_{\infty}, z) [\eta_{\infty} - \delta_z (u_{\infty}/\nu s_1)^{1/2}] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中 $\eta = \eta_{\infty}$ 为边界层外边界。基本方程(11)含有七个方程, 需要七个边界条件。在边界层外边界上, 方程式(2)和(3)可表示为

$$\frac{u_{\infty}^2}{s_1} \left(A_8 \frac{\partial p}{\partial x} + A_{15} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{u_{\infty}}{h_1} \frac{\partial u_{\infty}}{\partial x} + \frac{w_{\infty}}{h_2} \frac{\partial u_{\infty}}{\partial z} - \text{ctg} \theta k_1 u_{\infty}^2 + \text{csc} \theta k_2 w_{\infty}^2 + k_{12} u_{\infty} w_{\infty} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{\infty} \cdot u_{\infty}}{s_1} \left(A_{17} \frac{\partial p}{\partial x} + A_{18} \frac{\partial p}{\partial z} \right) &= \frac{u_{\infty}}{h_1} \frac{\partial w_{\infty}}{\partial x} + \frac{w_{\infty}}{h_2} \frac{\partial w_{\infty}}{\partial z} - \text{ctg} \theta k_2 w_{\infty}^2 \\ &+ \text{csc} \theta k_1 u_{\infty}^2 + k_{21} u_{\infty} w_{\infty} \end{aligned} \quad (18)$$

对于上两式进行整理可得到第七个边界条件。例如把(18)式化成 $\frac{\partial p}{\partial z} = F\left(\frac{\partial p}{\partial x}, u, w\right)$ 的形式, 然后代入(11e)式, (11f)式和(17)式中, 消去 $\partial p/\partial z$ 项, 就可以得到第七个边界条件。

五、求解方法及算例

对于边界层方程中的对流项,当 $u > 0$ 时,用后向差分,当 $u < 0$ 时,用前向差分。所以在回流区为适应流动方向的改变,对流项的后向差分转到前向差分。可是用前向差分,向前推进的算法就不适用了。为此要进行在主流方向上从分离点前到再附着点后的扫描式总迭代。但这往往导致不稳定情况。实际上,这种迭代一般并无必要。因为回流区流速只有主流流速的5%乃至更小,因此在回流区可以略去主流方向的对流项。这就是所谓的 Flare 近似,它可以消除由主流回流相向而造成的边界层解的不稳定。

反解法的给定条件可以是边界层位移厚度 δ_x, δ_z ,也可以是剪切应力的分布,本文取 δ_x 和 δ_z 为给定值。反解法总体计算步骤如下:

(1) 假定 δ_x, δ_z 分布,由边界层反解法求得 $u_{e,bl}, w_{e,bl}$ (下标“bl”表示由边界层解求得的量)。

(2) 根据 $u_{e,bl}$ 和 δ_x ,以及 $w_{e,bl}$ 和 δ_z 求得壁面的边界条件,进行外部流动计算得到新的 $u_{e,ex}$ 和 $w_{e,ex}$ (下标“ex”表示外部流动计算结果)。

(3) 根据第 n 次迭代量 $\delta_{x,n}$ 和 $\delta_{z,n}$,计算新的 $\delta_{x,n+1}$ 和 $\delta_{z,n+1}$:

$$\delta_{x,n+1} = R_f \left[\delta_{x,n} \frac{u_{e,bl}}{u_{e,ex}} \right] + (1 - R_f) \delta_{x,n}$$

$$\delta_{z,n+1} = R_f \left[\delta_{z,n} \frac{w_{e,bl}}{w_{e,ex}} \right] + (1 - R_f) \delta_{z,n}$$

式中 R_f 为松弛系数。

(4) 判断 $u_{e,bl}$ 和 $u_{e,ex}$,以及 $w_{e,bl}$ 和 $w_{e,ex}$ 之间误差,如满足要求计算结束,如果不满足误差要求,利用新的 $\delta_{x,n+1}$ 和 $\delta_{z,n+1}$ 回到步骤(1),进行迭代计算。

本文用上述反解法,求解了图3所示的, Van Den Berg et. al.^[9]所进行实验的模拟无限后掠机翼三维分离边界层。图3所示为一倾斜 35° 的平板,由于导叶,顶板和尾缘可调阻塞的作用,在平板上产生了相应于无限后掠翼的三维边界层。图3中壁面流线,外部流线和尾缘附近的分离线均为实验结果^[9]。图中“o”表示测站,自上游至下游排号,共计10个。根据实验数据,可以认为来流沿前缘均匀分布^[2,9]。来流流速 $u_\infty = 35\text{m/s}$ 。图9为排挤厚度 δ_x, δ_z 的试验值,做为本次算例的输入数据。但在一般反解法中, δ_x 和 δ_z 要进行修正迭代,修正方法在本节的一般计算步骤中已提及。

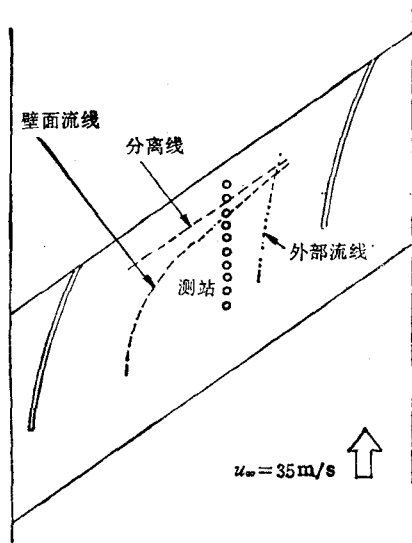


图3 试验装置示意图

图4至图8为计算结果。其中图4为 x 向外流速 u_x/u_∞ 的分布;图5为主流向动量损失厚度 θ_{11} ;图6为边界层外缘的流动角 α ;图7为主流向形状系数 $H = \delta_x/\theta_{11}$;图8

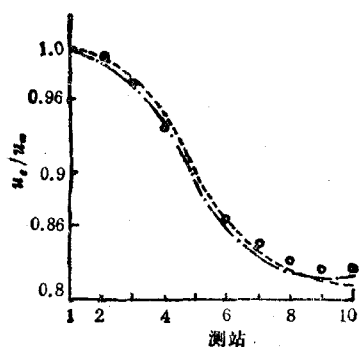


图 4 外流速度分布

○ 文献[9]实验值 由壁面压力测量而得
 - - - 文献[2]计算值 由边界层外缘测得
 ——— 本文计算值

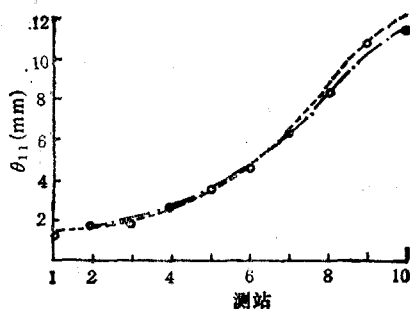


图 5 主流动量损失厚度

○ 文献[9]实验值
 - - - 文献[2]计算值
 ——— 本文计算值

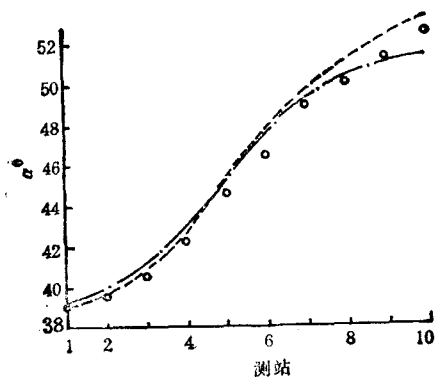


图 6 边界层外边界上流动角

○ 文献[9]实验值 由壁面压力测量而得
 由边界层外缘测得
 - - - 文献[2]计算值 ——— 本文计算值

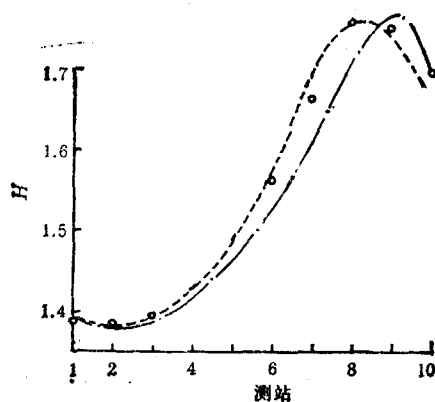


图 7 边界层主流形状系数

○ 文献[9]实验值 - - - 文献[2]计算值
 ——— 本文计算值

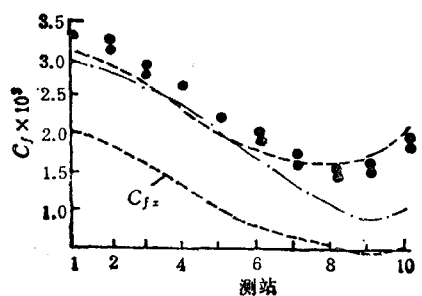


图 8 摩擦系数

○ 文献[9]实验值
 ——— 文献[2]计算值 ——— 本文计算值

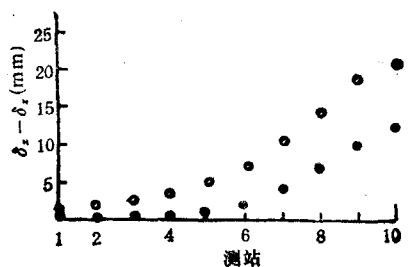


图 9 排挤厚度

○ \$\delta_x^*\$ 计算输入用的试验值
 ● \$\delta_x\$

为摩擦阻力系数。图中还给出了实验量测值和 Cousteix^[2] 的计算值。

通过计算值和量测值比较可以看出: 在第 1 至第 7 测站, 两者之间吻合得很好, 在第 8 至第 10 测站间, 两者之间有偏差, 但仍较为一致。

由图 8 的阻力系数 C_f 的分布可见, 计算分离点在 8 和 9 测站之间。这样就成功地计算出分离点, 并预估分离将在 9 和 10 测站间, 靠近第 10 测站重新附着。这也和试验结果吻合。

六、结 论

三维边界层分离流的反解法是近十几年来活跃的课题。本文提出了计算具有小范围分离区的三维层流和湍流边界层的一种反解法。在计算中, 由于采用了半正交曲线坐标系, 涡粘性各向异性湍流模型, 变换域技术和 Keller 分块差分格式, 故本文的三维边界层的反解法有精度高, 速度快的特点。计算实例表明计算值和实测数据吻合很好。

参 考 文 献

- [1] Cathal, D. & Mangler, K. M., *J. Fluid Mechanics*, 1966, Pt. 1, 163—182.
- [2] Cousteix, J. & Houdeville, R., *AIAA J.*, 1981, 19, 8, 976—989.
- [3] Delery, J. & Formery, M., *AIAA paper*, 83-0301(1983).
- [4] Radwan, S. F. & Lekoudis, S. G., *AIAA J.*, 1984, 22, 6, 737—749.
- [5] Edward, D. E. & Carter, J. E., *AIAA J.*, 1987, 25, 3, 380—396.
- [6] Keller, H. B., *AIAA J.*, 1972, 10, 9, 1193—1205.
- [7] 阎超, 流体机械叶轮中全三维粘性流动的数值分析, 清华大学工学博士学位论文, 1989.
- [8] Rotta, J. C., *Turbulent Shear Flow I*, Springer-Verlag, Berlin, 1979, 267—278.
- [9] Van Den Berg, B. et al, *J. Fluid Mechanics*, (1975) 70, Pt. 1, 15, 127—148.

INVERSE MODE OF CALCULATION OF THREE-DIMENSIONAL INCOMPRESSIBLE SEPARATED FLOWS IN BOUNDARY LAYER

Yan Chao Wu Yulin Mei Zuyan

(Tsinghua University Beijing, 100084, China)

Abstract In this paper an inverse mode of calculation of separated flows in the three-dimensional incompressible boundary layer is presented. The curvilinear semiorthogonal coordinate system and a turbulence model considering the anisotropy of eddy-viscosity are used. And the transformed coordinates and the Keller's box method are applied in the numerical analysis. The calculated results are found in good agreement with experimental data.

Key words three-dimensional boundary layer, inverse mode, numerical analysis