第23卷 第3期 力学学报 Vol. 23, No. 3
1991年5月 ACTA MECHANICA SINICA May, 1991

非完整系统的第一积分与其变分方程特解的联系[1)]

梅凤翔
(北京理工大学)

提要 本文给出非完整系统的变分方程,研究它们的解,并证明在一定条件下可利用第一积分来得到变分方程的特解,最后举例说明其应用.

关键词 分析力学,非完整系统,第一积分,变分方程

1. 引言

对于完整保守系统,Whittaker 研究了利用已知第一积分来求变分方程的特解问题,并证明了如下定理:动力学系统的积分和使系统变为自身的接触变换是一回事;任何积分都对应一个无限小变换[1]. 实际上,这个结论早在1890年已由 Poincaré 得到. 这个问题属于运动微分方程的积分理论问题.

对于非完整系统 由于动力学方程一般不具有完整保守系统那样的对称形式,因此讨论起来就十分困难. 本文首先导出非完整系统的变分方程;其次,讨论变分方程的解,并证明在一定条件下,非完整系统变分方程的解可由已知的第一积分来得到;最后,举例说明本文结果的应用. 本文主要结果为非完整系统的变分方程(9),关于第一积分的两组关系 (15)、(16),以及重要条件 (21)、(22).

2. 非完整系统的变分方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定,在系统的运动上施加 g 个理想 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0 \quad (\beta=1,\cdots,g;\ s=1,\cdots,n) \tag{1}$$

系统的运动方程可表为 Routh 形式[2]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,\cdots,n) \tag{2}$$

其中 T 为系统的动能,Q_s 为广义力,λ_β 为不定乘子. 将广义力分成有势的 Q'_s 和非势的 Q''_s

$$Q_s=Q'_s+Q''_s,\ Q'_s=-\frac{\partial V}{\partial q_s},\ V=V(q_k,t),\ (s=1,\cdots,n) \tag{3}$$

于是(2)可表为

1) 国家自然科学基金资助课题.

本文于1990年5月24日收到第一次稿,于1990年9月16日收到修改稿.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s''+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\quad (s=1,\cdots,n) \tag{4}$$

文献[3]证明，方程(4)可作为一个有条件的完整系统力学问题来研究，其中非完整约束(1)是方程(4)的特殊的第一积分。

由(1)、(4)，按文献[2]给出的方法，可在运动微分方程积分之前，求出 λ_β 作为q_s,$\dot{q}_s$,t 的函数。引入广义动量和 Hamilton 函数

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \tag{5}$$

$$H=\sum_{s=1}^{n}p_s\dot{q}_s-L \tag{6}$$

则方程(4)可表为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\ \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}+\tilde{\Lambda}_s\quad (s=1,\cdots,n) \tag{7}$$

其中

$$\tilde{\Lambda}_s(q,p,t)=Q_s''(q,\dot{q}(q,p,t),t)+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta(q,\dot{q}(q,p,t),t)\left(\widetilde{\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}}\right) \tag{8}$$

方程(7)可称为非完整系统一般形式的正则方程，它的解联同非完整约束(1)对初始条件的限制，便给出非完整系统的运动。

下面导出非完整系统的变分方程。用 $q_s+\delta q_s$ 替代 q_s，用 $p_s+\delta p_s$ 替代 p_s，且 δq_s，δp_s 为无限小量，则由(7)容易导出

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta q_s&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial q_k}\delta q_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial p_k}\delta p_k\\ \frac{d}{dt}\delta p_s&=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial q_s\partial q_k}\delta q_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial q_s\partial p_k}\delta p_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\Lambda}_s}{\partial q_k}\delta q_k\\ &\quad+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\Lambda}_s}{\partial p_k}\delta p_k\quad (s=1,\cdots,n)\end{aligned} \tag{9}$$

方程(9)称为非完整系统的变分方程。当已知 $H,\tilde{\Lambda}_s$ 时，就可组成这组方程。方程(9)不同于完整保守系统的变分方程，在于出现带 $\tilde{\Lambda}_s$ 对 q_k 和 p_k 的偏导数项。

3. 非完整系统的第一积分与变分方程的解

现在研究变分方程(9)的解与给定第一积分的关系。首先，导出关于第一积分的两个重要关系。设非完整系统有一个第一积分，形如

$$\phi(q_s,p_s,t)=\text{const} \tag{10}$$

将(10)对 t 求导数，并利用(7)，得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial p_k}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_k}+\tilde{\Lambda}_k\right)+\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{11}$$

用 Poisson 括号表示为

$$(\phi,H)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial p_k}\tilde{\Lambda}_k+\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{12}$$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial p_r}\left\{(\phi,H)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial p_k}\tilde{\Lambda}_k+\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\}=0 \quad (r=1,\cdots,n) \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_r}\left\{(\phi,H)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial p_k}\tilde{\Lambda}_k+\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\}=0 \quad (r=1,\cdots,n) \tag{14}$$

下面计算 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial p_r}\right)$ 和 $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial q_r}\right)$. 我们有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial p_r}\right)=\frac{\partial}{\partial p_r}\left\{(\phi,H)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial p_k}\tilde{\Lambda}_k+\frac{\partial\phi}{\partial t}\right\}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial q_k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_k\partial p_r}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial q_k\partial p_r}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial p_k}\frac{\partial\tilde{\Lambda}_k}{\partial p_r}$$

注意到(13),则有

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial p_r}\right)=\left(\frac{\partial H}{\partial p_r},\phi\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial p_k}\frac{\partial\tilde{\Lambda}_k}{\partial p_r} \quad (r=1,\cdots,n) \tag{15}$$

类似地,利用(14),我们得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\phi}{\partial q_r}\right)=\left(\frac{\partial H}{\partial q_r},\phi\right)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial p_k}\frac{\partial\tilde{\Lambda}_k}{\partial q_r} \quad (r=1,\cdots,n) \tag{16}$$

关系(15)、(16)就是关于第一积分的两组重要关系.

其次,求变分方程(9)的解. 假设方程(9)有如下形式的解

$$\delta q_s=\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial p_s}+\varepsilon A_s(q,p,t),\quad \delta p_s=-\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial q_s}+\varepsilon B_s(q,p,t) \tag{17}$$

其中 ε 为一小常数. 将(17)代入(9),并利用(15)、(16),得到

$$\frac{dA_s}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial q_k}A_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial p_k}B_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial p_k}\frac{\partial\tilde{\Lambda}_k}{\partial p_s}$$

$$\frac{dB_s}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\tilde{\Lambda}_s-\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)A_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\tilde{\Lambda}_s-\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)B_k$$

$$+(\tilde{\Lambda}_s,\phi)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial p_k}\frac{\partial\tilde{\Lambda}_k}{\partial q_s}\quad (s=1,\cdots,n) \tag{18}$$

方程(18)就是为确定 $A_s,B_s(s=1,\cdots,n)$ 的方程. 如能从中解得 A_s,B_s, 便可求出变分方程(9)的形如(17)的解. 当然,求方程(18)的通解,一般说来是十分困难的.

最后,研究变分方程的特解与第一积分的关系. 如果方程(7)中 $\tilde{\Lambda}_s=0$ $(s=1,\cdots,n)$, 即问题是完整的,则(18)有简单形式

$$\frac{dA_s}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial q_k}A_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial p_k}B_k$$

$$\frac{dB_s}{dt}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial q_s\partial q_k}A_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial q_s\partial p_k}B_k\quad(s=1,\cdots,n)\tag{19}$$

方程(19)有特解 $A_s=B_s=0\ (s=1,\cdots,n)$，于是(17)成为

$$\delta q_s=\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial p_s},\quad \delta p_s=-\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial q_s}\quad(s=1,\cdots,n)\tag{20}$$

这就是文献[1]的结果.

如果非完整系统的广义力 $\tilde{\Lambda}_s$ 和第一积分 ϕ 满足下述条件

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial p_k}\frac{\partial\tilde{\Lambda}_k}{\partial p_s}=0\quad(s=1,\cdots,n)\tag{21}$$

$$(\tilde{\Lambda}_s,\phi)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial p_k}\frac{\partial\tilde{\Lambda}_k}{\partial q_s}=0\quad(s=1,\cdots,n)\tag{22}$$

则(18)成为

$$\begin{aligned}\frac{dA_s}{dt}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial q_k}A_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 H}{\partial p_s\partial p_k}B_k\\ \frac{dB_s}{dt}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\tilde{\Lambda}_s-\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)A_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\tilde{\Lambda}_s-\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)B_k\end{aligned}\quad(s=1,\cdots,n)\tag{23}$$

显然，方程(23)有特解 $A_s=B_s=0\ (s=1,\cdots,n)$，而解(17)有形式(20). 于是，我们有如下定理.

定理　如果非完整系统的广义力 $\tilde{\Lambda}_s$ 和第一积分 ϕ 满足条件(21)、(22)，则非完整系统变分方程(18)的特解可通过第一积分 ϕ 由(20)给出.

4. 算例

在 Appell-Hamel 例中，Lagrange 函数和约束方程分别为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-mgq_3,\quad f=\dot{q}_3-\frac{b}{a}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{1/2}=0\tag{24}$$

方程(4)给出为

$$m\ddot{q}_1=-\lambda\frac{b}{a}\dot{q}_1(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2},\quad m\ddot{q}_2=-\lambda\frac{b}{a}\dot{q}_2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)^{-1/2},\quad m\ddot{q}_3=-mg+\lambda\tag{25}$$

于是有

$$\tilde{\Lambda}_1=-\frac{mg}{1+b^2/a^2}\frac{b}{a}p_1(p_1^2+p_2^2)^{-1/2},\quad \tilde{\Lambda}_2=-\frac{mg}{1+b^2/a^2}\frac{b}{a}p_2(p_1^2+p_2^2)^{-1/2},$$

$$\tilde{\Lambda}_3=\frac{mg}{1+b^2/a^2}\tag{26}$$

研究第一积分

$$\phi=\frac{1}{2m}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+mgq_3=\text{const.}\tag{27}$$

我们有

$$\frac{\partial\phi}{\partial p_r}=\frac{p_r}{m}\quad(r=1,2,3),\quad \frac{\partial\phi}{\partial q_1}=\frac{\partial\phi}{\partial q_2}=0,\quad \frac{\partial\phi}{\partial q_3}=mg \tag{28}$$

由(26)、(28)容易算得

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\phi}{\partial p_k}\frac{\partial\tilde{\Lambda}_k}{\partial p_s}=0,\quad (\tilde{\Lambda}_s,\phi)-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\phi}{\partial p_k}\frac{\partial\tilde{\Lambda}_k}{\partial q_s}=0\quad(s=1,2,3) \tag{29}$$

即条件(21)、(22)成立. 于是,变分方程有特解

$$\delta q_s=\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial p_s},\quad \delta p_s=-\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial q_s}\quad(s=1,2,3)$$

即

$$\delta q_1=\varepsilon\frac{p_1}{m},\quad \delta q_2=\varepsilon\frac{p_2}{m},\quad \delta q_3=\varepsilon\frac{p_3}{m}$$

$$\delta p_1=0,\quad \delta p_2=0,\quad \delta p_3=-\varepsilon mg \tag{30}$$

这就是 Appell-Hamel 问题变分方程对应于第一积分(27)的特解.

参 考 文 献

[1] Whittaker, E.T., A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies, Fourth Edition, Cambridge(1952).
[2] 梅凤翔,非完整系统力学基础,北京工业学院出版社,(1985).
[3] Новоселов, В.С., Вариационные методы в механике, ЛГУ(1966).

CONNEXION OF FIRST INTEGRALS WITH PARTICULAR SOLUTION OF THE VARIATIONAL EQUATIONS FOR NONHOLONOMIC SYSTEMS

Mei Fengxiang
(Beijing Institute of Technology)

Abstract The paper presents the variational equations of nonholomic systems and studies their solution. By using a first integral, a particular solution of the variational equations is obtained, and an example is given.

Key words analytical mechanics, nonholonomic system, first integral, variational equations