

细长弹性杆在轴压下的二次分叉

吴柏生

(吉林大学)

摘要 基于[1]的弹性曲杆的平衡方程,本文研究了矩形横截面细长杆在轴压下的后屈曲行为。设横截面的边长比为 $1:2\delta$, 使用 Poincaré-Keller 的打靶法^[2]并引进坐标的伸缩变换^[3],研究了 δ 在 $\delta_0 = 1$ 附近的情形。当 $\delta \neq 1$ 时,发现了杆平衡态的二次分叉。我们也给出了原始后屈曲解支及二次分支的渐近表示并分析了各个解支的稳定性。

关键词 线弹性杆,二次分叉,稳定性

一、引言

力学研究在弹性后屈曲方面已取得很大进展,但仍有大量重要的技术问题需要处理,特别是在具有重合的或几乎重合的屈曲荷载的情况下,此时,结构可能产生很复杂的后屈曲行为。Bauer 等^[4]观察到:多重特征值的分裂可能导致二次分叉。基于上述观点,[5]用摄动法研究了板的二次分叉,但有关杆的二次分叉却研究得很少。[6]利用非线性本构关系及等价奇异性理论,研究了杆的二次分叉。如果采用线性本构关系,则这个方法失效。本文研究两端球形铰支、线弹性、不可压、单位长度的矩形横截面细长杆在轴压下的后屈曲行为。设横截面的边长比为 $1:2\delta$, 在[1]的基础上,导出了以杆的曲率、扭率为未知函数并带有参数 λ (轴向压力)及 δ 的边值问题。当 $\delta \neq 1$ 时,证明了杆的平衡态具有二次分叉,并对各个解支做了定性分析。

二、杆平衡的边值问题

弹性直杆受压后,其上任一点的向径记为 $\mathbf{r}(s)$, s 为从杆左端量起的弧长。自然坐标为 $[\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{r}]$, 其中 $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{r}$ 分别为曲杆的主法线,次法线和切线方向的单位矢量;而杆截面的形心主轴坐标系为 $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$; θ 是 $\mathbf{e}_1$ 与 $\mathbf{n}$ 间的夹角(见图1)。在以下讨论中,字母上加点表示对 s 的微商,而下角标表示对相应变量求偏导数,如

$$\dot{p}_{\alpha\beta} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \beta} \right)$$

由微分几何,有

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = r\mathbf{e}_2 - q\mathbf{e}_3 \quad (1.1)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 = -r\mathbf{e}_1 + p\mathbf{e}_3 \quad (1.2)$$

本文于1989年9月3日收到第一次稿,于1990年8月16日收到修改稿。

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = q\mathbf{e}_1 - p\mathbf{e}_2 \quad (1.3)$$

其中

$$r = \frac{1}{T} + \dot{\theta}, \quad p = \frac{1}{\rho} \sin \theta, \quad q = \frac{1}{\rho} \cos \theta$$

$1/\rho, 1/T$ 分别是曲率和挠率, r 为杆横截面的扭率; p, q 分别为杆两主惯性平面内的曲率.

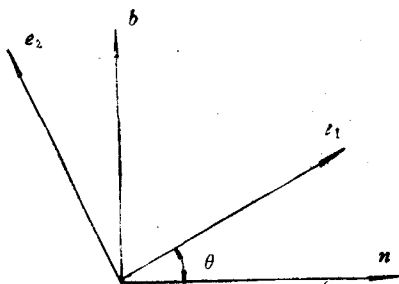


图 1

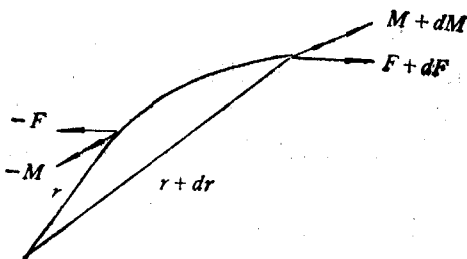


图 2

给定曲线 $\mathbf{r}(s)$ 和 $\theta(s)$, 则可求得 p, q, r ; 反之, 给定 p, q, r , 也可求得 $\mathbf{r}(s)$ 和 $\theta(s)$. 令 $\mathbf{r}(s)$ 处的内力、内力矩分别为

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 N_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{M} = \sum_{i=1}^3 M_i \mathbf{e}_i \quad (2)$$

引进线弹性本构关系:

$$M_1 = Ap, \quad M_2 = Bq, \quad M_3 = Cr \quad (3)$$

式中 A, B, C 分别为截面的两个抗弯刚度及抗扭刚度, 即

$$A = A(\delta) = EI\delta, \quad B = B(\delta) = 4EI\delta^3$$

$$C = C(\delta) = \frac{EI}{1 + \nu_0} \left[2\delta - \frac{192}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{th}(2n+1)\pi\delta}{(2n+1)^5} \right] \quad (4)$$

而 E, ν_0 分别为杨氏模量及泊松比, $I = a^4/6$, a 为杆截面的高. 由力、力矩的平衡方程

$$\dot{\mathbf{F}} = 0, \quad \dot{\mathbf{M}} + \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{F} = 0$$

并结合(1)、(2)、(3), 有

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 + qN_3 - rN_2 &= 0 \\ \dot{N}_2 + rN_1 - pN_3 &= 0 \\ \dot{N}_3 + pN_2 - qN_1 &= 0 \\ A\dot{p} + (C - B)qr - N_2 &= 0 \\ B\dot{q} + (A - C)pr + N_1 &= 0 \\ C\dot{r} + (B - A)pq &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

以上内容细节可参见[1].

从(5)中消去 N_1, N_2, N_3 (利用球铰支条件)可得杆平衡的控制方程

$$\begin{aligned} p + [(C - 2B)/A] \dot{q}r + [(C - B)(A - B)/AC] p \dot{q}^2 \\ + [(C - A)/A] p r^2 + p[\sqrt{\lambda^2 - [A\dot{p}(0)]^2 - [B\dot{q}(0)]^2}/A \\ + (1/2)p^2 + (B/2A)q^2 + (C/2A)r^2] = 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q} + [(2A - C)/B] \dot{p}r + [(A - C)(A - B)/BC] p^2 \dot{q} \\ + [(C - B)/B] q r^2 + q[\sqrt{\lambda^2 - [A\dot{p}(0)]^2 - [B\dot{q}(0)]^2}/B \\ + (A/2B)p^2 + (1/2)q^2 + (C/2B)r^2] = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\dot{r} + [(B - A)/C] p q = 0 \quad (6.3)$$

式中 $\lambda \geq \sqrt{[A\dot{p}(0)]^2 + [B\dot{q}(0)]^2}$ (右端是端点压力入在 e_1, e_2 张成平面上的投影). 因边界球形铰支, 故相应的边界条件为

$$s = 0, \quad p = q = r = 0 \quad (7.1)$$

$$s = 1, \quad p = q = 0 \quad (7.2)$$

(6)、(7)构成方程组边值问题.

三、杆平衡的原始后屈曲解支

借助 Poincaré-Keller 的打靶法, 将(6)、(7)组成的边值问题转化为初值问题来研究. 设初值条件为

$$p(0) = q(0) = r(0) = 0, \quad \dot{p}(0) = \alpha, \quad \dot{q}(0) = \beta \quad (8)$$

并令方程组(6)满足初条件(8)的解为 $p(s, \lambda, \delta, \alpha, \beta)$ 、 $q(s, \lambda, \delta, \alpha, \beta)$ 、 $r(s, \lambda, \delta, \alpha, \beta)$. 若有

$$p(1, \lambda, \delta, \alpha, \beta) = 0, \quad q(1, \lambda, \delta, \alpha, \beta) = 0 \quad (9)$$

则该解必是边值问题(6)、(7)的解, 故只需研究方程组(9). 注意到

$$\begin{aligned} p(s, \lambda, \delta, 0, 0) = 0, \quad q(s, \lambda, \delta, 0, 0) = 0 \\ r(s, \lambda, \delta, 0, 0) = 0, \quad 0 \leq s \leq 1 \end{aligned} \quad (10)$$

由常微分方程理论^[7], 知初值问题(6)、(8)的解能开拓到 $s = 1$, 并对 $\lambda, \delta, \alpha, \beta$ 连续可微. 由(10)知, $\alpha = \beta = 0$ 时, (9)恒成立, 它相应于杆的直的平衡态. 屈曲荷载是满足下式的 λ :

$$\begin{vmatrix} p_\alpha(1, \lambda, \delta, 0, 0) & p_\beta(1, \lambda, \delta, 0, 0) \\ q_\alpha(1, \lambda, \delta, 0, 0) & q_\beta(1, \lambda, \delta, 0, 0) \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

易验证

$$p(s, \lambda, \delta, -\alpha, \beta) = -p(s, \lambda, \delta, \alpha, \beta) \quad (12.1)$$

$$q(s, \lambda, \delta, \alpha, -\beta) = -q(s, \lambda, \delta, \alpha, \beta) \quad (12.2)$$

$$p(s, \lambda, \delta, \alpha, -\beta) = p(s, \lambda, \delta, \alpha, \beta) \quad (12.3)$$

$$q(s, \lambda, \delta, -\alpha, \beta) = q(s, \lambda, \delta, \alpha, \beta) \quad (12.4)$$

$$r(s, \lambda, \delta, -\alpha, \beta) = -r(s, \lambda, \delta, \alpha, \beta) \quad (12.5)$$

$$r(s, \lambda, \delta, \alpha, -\beta) = -r(s, \lambda, \delta, \alpha, \beta) \quad (12.6)$$

由(12.3)、(12.4)知

$$p_\beta(1, \lambda, \delta, 0, 0) = 0 \quad q_\alpha(1, \lambda, \delta, 0, 0) = 0 \quad (13)$$

又由(6)、(8)、(10)、(12)知, $p_\alpha(s, \lambda, \delta, 0, 0)$ 满足

$$\begin{aligned} \dot{p}_\alpha + (\lambda/A)p_\alpha &= 0 \\ s=0, \quad p_\alpha &= 0, \quad \dot{p}_\alpha = 1 \end{aligned}$$

解此方程, 得

$$p_\alpha(s, \lambda, \delta, 0, 0) = \sqrt{A/\lambda} \sin \sqrt{\lambda/A} s \quad (14)$$

同理可得

$$q_\beta(s, \lambda, \delta, 0, 0) = \sqrt{B/\lambda} \sin \sqrt{\lambda/B} s \quad (15)$$

将(4)、(13)、(14)、(15)代入(11), 可求得屈曲荷载

$$\lambda = \lambda_{m,0}(\delta) = m^2 \pi^2 EI \delta \quad \text{或} \quad \lambda = \lambda_{0,n}(\delta) = 4 n^2 \pi^2 EI \delta^3 \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

取 $\lambda_{2,0}(\delta) = 4 \pi^2 EI \delta$, $\lambda_{0,1}(\delta) = 4 \pi^2 EI \delta^3$, 当 $\delta = 1$ 时, 这两个屈曲荷载重合, 当 $\delta \neq 1$ 时, 它们分开. 我们将以 $\lambda = \lambda_{2,0}(\delta)$ 为例阐明原始后屈曲解支的产生并给出其渐近展开式.

于(9)中, 令 $\beta = 0$, 由(12.2), 则(9)的第二式自然满足. 只需考虑下式

$$p(1, \lambda, \delta, \alpha, 0) = 0 \quad (17)$$

的解. 令

$$p_1(1, \lambda, \delta, \alpha, 0) = \begin{cases} \alpha^{-1} p(1, \lambda, \delta, \alpha, 0) & \text{当 } \alpha \neq 0 \\ p_\alpha(1, \lambda, \delta, 0, 0) & \text{当 } \alpha = 0 \end{cases} \quad (18)$$

因 $p_1(1, 4 \pi^2 EI, 1, 0, 0) = p_\alpha(1, 4 \pi^2 EI, 1, 0, 0) = 0$, $\partial p_1 / \partial \lambda(1, 4 \pi^2 EI, 1, 0, 0) = p_{\alpha\lambda}(1, 4 \pi^2 EI, 1, 0, 0) = 1/8 \pi^2 EI \neq 0$, 由隐函数定理, 存在定义于 $D_1 = \{(\alpha, \delta) \in R^2: \alpha^2 + (\delta - 1)^2 < r_1^2\}$ 上的唯一的连续可微函数 $\lambda = \lambda_1(\alpha, \delta)$, 满足 $p_1(1, \lambda_1(\alpha, \delta), \delta, \alpha, 0) = 0$. 对固定的 δ , δ 靠近 1, 则

$$\Gamma_{1\delta} = \{\lambda = \lambda_1(\alpha, \delta), p = p(s, \lambda_1, \delta, \alpha, 0), q = 0, r = 0, |\alpha| < r_1\}$$

是杆平衡的原始后屈曲解支. 由(18)及隐函数的唯一性知, $\lambda_1(\alpha, \delta)$ 是 α 的偶函数, 且

$$\left. \frac{d^2 \lambda_1}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} = - \left. \frac{p_{\alpha\alpha\alpha}}{3 p_{\alpha\lambda}} \right|_{s=1, \lambda=\lambda_1(0, \delta), \delta=\delta, \alpha=0, \beta=0} = \frac{EI \delta}{16 \pi^2}$$

从而, 我们有 $\Gamma_{1\delta}$ 的渐近展开式

$$\lambda_1(\alpha, \delta) = 4 \pi^2 EI \delta + (EI \delta / 32 \pi^2) \alpha^2 + O(\alpha^4) \quad (19.1)$$

$$p(s, \lambda_1, \delta, \alpha, 0) = (\sin 2 \pi s / 2 \pi) \alpha + O(\alpha^3) \quad (19.2)$$

这样, 我们便给出了单独在截面主惯性矩为 $A(\delta)$ 的主惯性平面内从屈曲荷载 $\lambda = \lambda_{2,0}(\delta)$ 产生的唯一一对原始后屈曲解支. 此时杆的挠率为零, 故杆变形成平面曲线. 同理, 亦知杆有从屈曲荷载 $\lambda = \lambda_{0,1}(\delta)$ 产生的于截面主惯性矩为 $B(\delta)$ 的主惯性平面内唯一一对原始后屈曲解支 $\Gamma_{2\delta}$, 它们也使杆变形成平面曲线.

四、杆平衡的二次分叉

注意到, 对固定的 δ : δ 在 $\delta_0 = 1$ 的邻域内, $\Gamma_{1\delta}$ 上的 q 分量恒是零. 如果能够找到满足(6)、(8)、(9)的解支 $\Gamma_{2\delta}$ 它与 $\Gamma_{1\delta}$ 相交于 $\alpha = \alpha_0 \neq 0$, 且除此交点外, $q \neq 0$,

则 Γ_{3s} 是从 Γ_{1s} 上于此交点分出的不同于 Γ_{1s} 的解支, 即二次分支. 为找到 Γ_{3s} , 定义新函数 q_1 :

$$q_1(1, \lambda, \delta, \alpha, \beta) = \begin{cases} \beta^{-1} q(1, \lambda, \delta, \alpha, \beta) & \text{当 } \beta \neq 0 \\ q_\beta(1, \lambda, \delta, \alpha, 0) & \text{当 } \beta = 0 \end{cases} \quad (20)$$

我们来讨论方程组

$$p(1, \lambda, \delta, \alpha, \beta) = 0, \quad q_1(1, \lambda, \delta, \alpha, \beta) = 0 \quad (21)$$

的解. 将(21)左端于 $(\lambda, \delta, \alpha, \beta) = (4\pi^2 EI, 1, 0, 0)$ 点附近做 Taylor 展开, 并利用(12)、(14)、(15), 有

$$p(1, \lambda, \delta, \alpha, \beta) = a_1 \alpha (\lambda - 4\pi^2 EI) + b_1 \alpha (\delta - 1) + c_1 \alpha^3 + d_1 \alpha \beta^2 + R_1(\lambda, \delta, \alpha, \beta) \quad (22.1)$$

$$q_1(1, \lambda, \delta, \alpha, \beta) = a_2 (\lambda - 4\pi^2 EI) + b_2 (\delta - 1) + c_2 \alpha^2 + d_2 \beta^2 + R_2(\lambda, \delta, \alpha, \beta) \quad (22.2)$$

式中 R_1, R_2 分别为两展开式的高阶余项; 而系数可通过于 $(\lambda, \delta, \alpha, \beta) = (4\pi^2 EI, 1, 0, 0)$ 解一些常微分方程初值问题并令 $s = 1$ 求得:

$$\begin{aligned} a_1 &= p_{\alpha\lambda} = 1/8\pi^2 EI, \quad b_1 = p_{\alpha\delta} = -(1/2) \\ c_1 &= p_{\alpha\alpha\alpha}/6 = -(1/256\pi^4), \quad d_1 = p_{\alpha\beta\beta}/2 = (10EI - 3C(1))/8\pi^2 C(1) \\ a_2 &= q_{\beta\lambda} = -(1/8\pi^2 EI), \quad b_2 = q_{\beta\delta} = 3/2 \\ c_2 &= q_{\beta\alpha\alpha}/2 = (3C(1) - 10EI)/128\pi^4 C(1), \quad d_2 = q_{\beta\beta\beta}/6 = 1/16\pi^4 \end{aligned}$$

为了对(22)进行分析, 做下列伸缩坐标变换^[3],

$$\tilde{\lambda} - 4\pi^2 EI = v^2 \Lambda, \quad \tilde{\delta} - 1 = v^2 \tau, \quad \tilde{\alpha} = vx, \quad \tilde{\beta} = vy \quad (23)$$

式中 v 为伸缩尺度. 将 $\lambda = \tilde{\lambda}, \delta = \tilde{\delta}, \alpha = \tilde{\alpha}, \beta = \tilde{\beta}$ 代入(22), 并令

$$\tilde{p}(1, \Lambda, \tau, x, y, v) = \begin{cases} v^{-3} p(1, \tilde{\lambda}, \tilde{\delta}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) & \text{当 } v \neq 0 \\ a_1 x \Lambda + b_1 \tau x + c_1 x^3 + d_1 x y^2 & \text{当 } v = 0 \end{cases} \quad (24.1)$$

$$\tilde{q}_1(1, \Lambda, \tau, x, y, v) = \begin{cases} v^{-2} q_1(1, \tilde{\lambda}, \tilde{\delta}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) & \text{当 } v \neq 0 \\ a_2 \Lambda + b_2 \tau + c_2 x^2 + d_2 y^2 & \text{当 } v = 0 \end{cases} \quad (24.2)$$

因 $\tilde{p} = 0, \tilde{q} = 0$ 有解 $x = x_0 = 16\pi^2 [C(1)/(20EI - 5C(1))]^{1/2} \neq 0, \Lambda = \Lambda_0 = 4\pi^2 EI [(20EI - 3C(1))/(20EI - 5C(1))], \tau = \tau_0 = 1, y = v = 0$, 且于此解点 2×2 矩阵 $[\partial(\tilde{p}, \tilde{q}_1)/\partial(\Lambda, x)]$ 的行列式 $J_0 = 1/4\pi^2 EI \neq 0$. 由隐函数定理, 存在定义于 $D_2 = \{(y, v) \in R^2: y^2 + v^2 \leq r_2^2\}$ 上并于 $(\Lambda, x) = (\Lambda_0, x_0)$ 附近取值的连续可微函数 $\bar{\Lambda}(y, v), \bar{x}(y, v)$. 当 $\Lambda = \bar{\Lambda}(y, v), x = \bar{x}(y, v)$ 时, 对任意 $(y, v) \in D_2$, 有

$$\tilde{p}(1, \Lambda, \tau_0, x, y, v) = 0, \quad \tilde{q}_1(1, \Lambda, \tau_0, x, y, v) = 0 \quad (25)$$

对每个固定的 $v: |v| < r_2, v \neq 0$, 令

$$\begin{aligned} \lambda(y, v) &= 4\pi^2 EI + v^2 \bar{\Lambda}(y, v), \quad \delta(y, v) = 1 + v^2 \\ \alpha(y, v) &= v \bar{x}(y, v), \quad \beta(y, v) = vy \end{aligned}$$

则由(20)、(21)、(24)知

$$\begin{aligned} \Gamma_{3s} &= \{\lambda = \lambda, p = p(s, \lambda, \delta, \alpha, \beta), q = q(s, \lambda, \delta, \alpha, \beta), \\ &\quad r = r(s, \lambda, \delta, \alpha, \beta): |y| < r_2\} \end{aligned}$$

是(6)、(7)的解支. 特别地, 当 $y = 0$ 时, 由(24)有

$$p(1, \lambda(0, v), 1 + v^2, v\bar{x}(0, v), 0) = 0$$

由(17)解的唯一性, 应有

$$\lambda(0, v) = \lambda_1(v\bar{x}(0, v), 1 + v^2)$$

即 $\Gamma_{3\delta}$ 与 $\Gamma_{1\delta}$ 相交于 $\{\lambda = \lambda(0, v), p = p(s, \lambda, (0, v), 1 + v^2, v\bar{x}(0, v), 0), q = 0, r = 0\}$, 且 $\alpha_0 = v\bar{x}(0, v) \neq 0$. 当 $|y| < r_2$ 且 $y \neq 0$ 时, $\Gamma_{3\delta}$ 上 $q \neq 0$, 故 $\Gamma_{3\delta}$ 即我们要找的二次分支. 由(24)及隐函数的唯一性, 可知 $\lambda(y, v), \bar{x}(y, v)$ 是 y 的偶函数. 利用(12)知, $\lambda(y, v), p(s, \lambda, \delta, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 是 y 的偶函数, 而 $q(s, \lambda, \delta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}), r(s, \lambda, \delta, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 是 y 的奇函数. 进一步利用此二次分支对 y, v 的微商及对(25)于 $(y, v) = (0, 0)$ 应用隐函数的微商, 可得二次分支 $\Gamma_{3\delta}$ 的渐近展开式

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda(y, v) = 4\pi^2 EI + v^2 \Lambda_0 + O(v^2) \\ &\quad + \{[(\eta C(1) - 20EI)/2\pi^2 C(1)]EIV^2 + O(v^3)\}y^2 + O(y^4) \\ p(s, \lambda, \delta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= [(2\pi)^{-1}x_0 \sin 2\pi s]v + O(v^2) \\ &\quad + \{[4(\pi x_0)^{-1} \sin 2\pi s]v + O(v^2)\}y^2 + O(y^4) \\ q(s, \lambda, \delta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= [(\pi^{-1} \sin \pi s)v + O(v^2)]y + O(y^3) \\ r(s, \lambda, \delta, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= \{[(-3EI)/8\pi^2 C(1)](\sin \pi s - \sin 3\pi s/3)v^2 \\ &\quad + O(v^3)\}y + O(y^3) \end{aligned}$$

易验证, 当 $y \neq 0$ 时, $1/T \neq 0$, 故杆的二次分支对应着杆的空间屈曲变形. 同理可知, 当 $\delta = 1 - v^2, v$ 充分小且非零时, $\Gamma_{2\delta}$ 上亦将产生二次分支 $\Gamma_{4\delta}$, 它也使杆变形成空间曲线.

当二屈曲荷载重合, 即 $\delta = 1$ 时, 利用(23)(令 $\tau = 0$)知, 此时杆的平衡态除 $\Gamma_{1\delta}, \Gamma_{2\delta}$ 外, 尚有四支同时在两个主惯性平面内的原始后屈曲解支 $\Gamma^{\pm\pm}$.

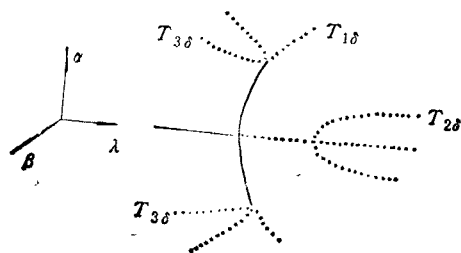


图 3 ($\delta > 1$)

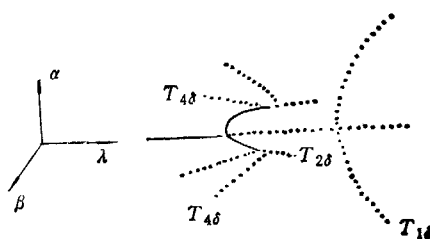


图 4 ($\delta < 1$)

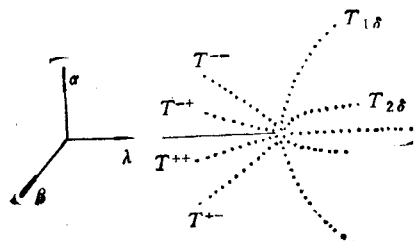


图 5 ($\delta = 1$)

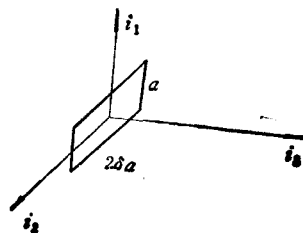


图 6

根据前面的讨论,我们可在 $(\lambda, \alpha, \beta) \in R^3$ 内, 对不同的参数 δ (δ 在 $\delta_0 = 1$ 附近) 形象地绘出原始后屈曲解支及二次分支的初始幅值 (α, β) 对压力 λ 的变化性态. 见图 3、4、5.

五、各解支的稳定性分析

我们通过平衡方程(6)、(7)的动态系统讨论 $\lambda = 4\pi^2 EI$ (δ 在 $\delta_0 = 1$ 的邻域内)附近各解支的稳定性. 考虑到杆的阻尼, 并利用小曲率、小扭率时力矩、位移的关系. 在(6.1)、(6.2)的右端分别添加 $\partial p / \partial t, \partial q / \partial t$ 后与(6.3)组成杆的动力学方程. 如果对杆不施加约束, 则因最小屈曲荷载为 $\lambda = \lambda_{1,0}(\delta)$, 故杆于 $\lambda = 4\pi^2 EI$ 附近的所有解支皆不稳定. 现施加约束如下: 取固定的直角坐标系 $[i_1, i_2, i_3]$, 在杆未受力状态下, 杆横截面长边平行于 i_2 轴, 轴线沿 i_3 轴(图 6). 若在 $s = 1/2$ 的位置上横截面长边 $(2\delta a)$ 的一侧加一铰以限制杆轴线中点沿 i_1 方向移动而不施加其它约束, 则杆于两主惯性平面内的第一屈曲荷载分别为 $\lambda = \lambda_{2,0}(\delta)$ 及 $\lambda = \lambda_{0,1}(\delta)$.

我们采用投影方法并化归为约化的分叉方程来研究各解支(带约束杆)的稳定性^{[8],[9]}. 利用变换(23),(9)的约化分叉方程是

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, \Lambda) &= a_1 \Lambda x + b_1 \tau x + c_1 x^3 + d_1 xy^2 = 0 \\ f_2(x, y, \Lambda) &= a_2 \Lambda y + b_2 \tau y + c_2 x^2 y + d_2 y^3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

由投影法, 各解支的稳定性决定于下面矩阵的特征值:

$$A = \begin{pmatrix} 4 \frac{\partial f_1}{\partial x} & -2 \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ 2 \frac{\partial f_2}{\partial x} & -\frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (27)$$

依次令 $\tau = 1, -1, 0$ (当 $\tau = 0$ 时, 取 $\Lambda = -1$), 找到(26)的解, 它们分别对应着 $\delta = 1 + \nu^2, 1 - \nu^2, 0$ 时杆的平衡态(含二次分叉), 再代入(27), 依次计算 A 的特征值. 如果 A 的特征值都是负的, 则该解支稳定, 否则不稳定. 各解支的稳定性见图 3、4、5. 图中实线表示稳定的解支, 虚线表示不稳定的解支.

从图 3—5 可见, 模态相互作用(两屈曲荷载相等或接近)使杆的承载能力大大降低. 本文的结果揭示了杆的复杂的后屈曲行为.

本文得到李荣华教授、胡守信教授的热情指导, 北京大学武际可教授审阅过初稿并提出宝贵意见. 作者向他们表示衷心的感谢!

参 考 文 献

- [1] 武际可、黄永刚, 力学学报, 19, 5(1987), 445—454.
- [2] Keller, J. B., Antman, S., eds., Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems, Benjamin, W. A., New York (1969).
- [3] Chow, S. N., Hale, J. Methods of Bifurcation Theory. Springer-Verlag, New York (1982).
- [4] Bauer, L., Keller, H. B. and Reiss, E. L., SIAM REVIEW, 17, 1(1975), 101—122.
- [5] Matkowsky, B. J., et al., SIAM J. Appl. MATH., 38, 1(1980), 38—51.
- [6] Buzano, E., SIAM J. MATH. ANAL., 17, 2(1986), 312—321.

- [7] 王柔怀, 伍卓群著, 常微分方程讲义, 人民教育出版社, 北京 (1963), 192—210.
- [8] Sattinger, D. H., Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag New York. (1979).
- [9] Iooss, G., Joseph, D. D., Elementary Stability and Bifurcation Theory, Springer-Verlag New York (1980).

SECONDARY BIFURCATIONS OF A SLENDER ELASTIC BAR UNDER AXIAL COMPRESSION

Wu Baisheng

(Jilin University)

Abstract Based on the equilibrium equation of an elastic curved bar in [1], the post-buckling behavior of a slender bar with rectangular cross-section under axial compression is studied. Let the ratio of the lengths of the sides of the cross-section be $1:2\delta$. By using Poincaré-Keller's shooting method and introducing rescaling functions, we investigate the case in which δ is in a neighborhood of $\delta_0=1$. The secondary bifurcations of the equilibrium state of the bar are found when $\delta \neq 1$; we also give the asymptotic unfoldings of the primary branches and secondary branches, and make analysis on the stability of each branch.

Key words linear elastic bar, secondary bifurcation, stability