

摩擦接触弹塑性分析的数学规划法

孙 苏 明 钟 万 纛

(大连理工大学工程力学研究所)

摘要 本文提出摩擦接触弹塑性分析的数学规划法,是弹性接触问题解法^[1-4]的推广,使之能处理比例加载时的塑性效应。利用所导出接触问题总刚度阵的逆,结合参变量线性互补公式,仍可消去由接触单元而引入的惩罚因子。于是,可以获得一个弹塑性问题、弹性接触和弹塑性接触问题的有限元参数二次规划法模型。所选的几个实例说明了方法的实用性。

关键词 接触,弹塑性,参数二次规划法

一、引 言

在工程实践中,只要物体发生接触就会出现接触应力。这些应力可能足以引起塑性变形,而影响机器的功效和寿命;因此,对弹塑性接触问题进行分析、研究是工程实践中的一个重要的课题。

弹性接触问题早已引起了学术界和工程界的兴趣,至今已做了这方面的大量工作^[1-4,6-8]。然而,弹塑性接触问题受边界非线性和材料非线性的影响,比较难于处理。文[10]用体系刚度阵的变化来体现非线性影响,增量步长受到了一个增量步内出现两种非线性耦合作用的限制;文[9]则抛弃了这种传统的“试验-误差”法,采用数学规划法处理弹塑性接触问题,不需来回迭代和步长的选择,遗憾的是方法要求接触面是光顺的。

本文基于参变量变原理所构造的二次规划模型^[1,5],应用于弹塑性接触问题。经过推导,仍可消去由接触单元所引入的惩罚因子,得到一个二次规划的线性互补问题,从而克服了数值计算上的困难。这样的数学模型可以退化解弹塑性问题、弹性接触问题;不仅物理概念清晰、计算程序简便,而且适用范围广。大量的数值实例表明,这种方法基本上不受步长的影响,收敛迅速、平稳。

二、塑性增量理论公式

塑性力学状态与历史有关,因此常用增量理论描述。为方便起见, d 表示增量;上标 P 表示塑性部分, e 表示弹性部分。那么屈服条件可表为

$$f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p + d\epsilon_{ij}^p) \leq 0 \quad (2.1)$$

在弹性阶段应有 $f < 0$, $f = 0$ 则表示在塑性状态。据流动法则,应力空间任何一点必有:

本文于 1988 年 10 月 29 日收到第一稿,于 1990 年 11 月 12 日收到修改稿。

$$g(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0 \quad (2.2)$$

其中 g 是塑性势函数, 且满足

$$d\varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.3)$$

这里 λ 是待定的塑性流动比例因子, 即流动参变量, 不取负值:

$$\lambda \begin{cases} = 0, & \text{当 } f < 0 \text{ 时} \\ \geq 0, & \text{当 } f = 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (2.4)$$

变形可以分为弹性增量和塑性增量两部分,

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (2.5)$$

据虎克定律

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (2.6)$$

其中, D_{ijkl} 是弹性模量张量.

三、接触问题的数学模式

为叙述起见, 考虑两体接触问题, 上标 α 用来表示与第 α 个物体相关的物理量. 在接触边界 S_c 上, 当前状态下的接触力可分解为法向接触力 P_n 和切向摩擦力 P_r , 位移也分解为法向位移 $u_n^{(\alpha)}$ 和切向位移 $u_r^{(\alpha)}$. 在增量之后, 它们满足如下关系式:

$$(u_n^{(2)} + du_n^{(2)}) - (u_n^{(1)} + du_n^{(1)}) + \delta^* \geq 0 \quad (3.1)$$

$$P_n + dP_n \leq 0 \quad (3.2)$$

其中 δ^* 为间隙.

若将接触边界 S_c 分成连续接触域 S_c 和滑动接触域 $S_s (S_c = S_c + S_s)$, 则在 S_s 上有:

$$\left. \begin{aligned} |P_r + dP_r| &= -\mu(P_n + dP_n) \\ |(u_r^{(2)} + du_r^{(2)}) - (u_r^{(1)} + du_r^{(1)})| &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

在 S_c 上有:

$$\left. \begin{aligned} |p_r + dp_r| &< -\mu(p_n + dp_n) \\ |(u_r^{(2)} + du_r^{(2)}) - (u_r^{(1)} + du_r^{(1)})| &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

将上述关系借助惩罚因子 $E_r, E_n (E_r = E_n = E \rightarrow \infty)$, 表示为接触力与相对位移的关系. 即

$$\left. \begin{aligned} p_n + dp_n &= -E_n \beta(u_n), \quad \text{在 } L^2(S_c) \text{ 上} \\ \beta(u_n) &= (-\Delta u_n)^+ \quad \Delta u_n = (u_n^{(2)} + du_n^{(2)}) - (u_n^{(1)} + du_n^{(1)}) + \delta^* \\ \phi^+(x) &= \sup\{\phi(x), 0\} \quad \text{在 } S_c \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

$$p_r + dp_r = \begin{cases} -E_r \Delta u_r, & |p_r + dp_r| < -\mu(p_n + dp_n) \text{ 时} \\ -\mu(p_n + dp_n) \cdot \text{sign}(\Delta u_r), & |p_r + dp_r| = -\mu(p_n + dp_n) \text{ 时} \end{cases} \quad (3.6)$$

应用 (3.5)–(3.6) 式, 类似于通常单元可以导出接触单元刚度阵

$$[K_c^e] = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

接触位移向量为相对位移,即

$$\{\Delta_c\} = \{(u_r^{(2)} + du_r^{(2)}) - (u_r^{(1)} + du_r^{(1)}), (u_n^{(2)} + du_n^{(2)}) - (u_n^{(1)} + du_n^{(1)})\}^T \quad (3.8)$$

而(3.2)~(3.4)可写为滑动条件:

$$\tilde{f}^{(1)} = (p_r + dp_r) + \mu(p_n + dp_n) \leq 0 \quad (3.9)$$

$$\tilde{f}^{(2)} = -(p_r + dp_r) + \mu(p_n + dp_n) \leq 0 \quad (3.10)$$

$$\tilde{f}^{(3)} = p_n + dp_n \leq 0 \quad (3.11)$$

与 $\tilde{f}^{(i)} (i = 1, 2, 3)$ 所对应定义滑动势函数

$$\begin{cases} \tilde{g}^{(1)} = p_r, & \tilde{g}^{(2)} = -p_r \\ \tilde{g}^{(3)} = p_n \end{cases} \quad (3.12)$$

显然,摩擦接触问题的滑动法则是非关联的。

仿照塑性力学问题,将接触位移(3.8)分成弹性接触位移 $\{\Delta_c^e\}$ 和滑动相对位移 $\{\Delta_c^p\}$; 那么,接触力 $\{p_c + dp_c\} = \{p_r + dp_r, p_n + dp_n\}^T$ 与弹性接触位移满足

$$\{p_c + dp_c\} = [D_c] \{\Delta_c^e\} = [D_c] (\{\Delta_c\} - \{\Delta_c^p\}) \quad (3.13)$$

其中 $[D_c]$ 为接触单元弹性矩阵。并且

$$\Delta_c^p = \tilde{\lambda} \left(\frac{\partial \tilde{g}^T}{\partial p_c} \right) \quad (3.14)$$

这里 $\tilde{g} = \{\tilde{g}^{(1)}, \tilde{g}^{(2)}, \tilde{g}^{(3)}\}^T$, $\tilde{\lambda}$ 为滑动参量。

四、弹塑性接触问题的有限元参数二次规划解

弹塑性和弹性接触问题的有限元参数二次规划解,最后都归结为解一个二次规划线性互补问题^[1-5]:

$$v - (M - CK^{-1}\phi)\lambda' = -CK^{-1}t' + d \quad (4.1)$$

$$\lambda'^T \cdot v = 0, \lambda', v \geq 0 \quad (4.2)$$

对于弹塑性接触问题应该是这两个的耦合,(4.1)、(4.2)式仍适用。

将总位移向量分成接触位移和普通位移,仅接触位移与惩罚因子有关。令总位移向量维数为 N_d , N_d 由两部分组成: 非接触位移自由度 N_{dn} 和接触相对位移自由度 N_{dr} 。同样,非线性单元约束总数 N_{CTS} 也可分成两部分: 塑性流动约束数 NN_{CTS} 和接触滑动约束数 NC_{CTS} 。设总刚度阵表为

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ \hline K_{21} & K_{22} + EK'_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow N_{dn} \\ \updownarrow N_{dr} \end{matrix} \quad (4.3)$$

其中 $E[K'_{22}]$ 为接触刚度阵,且 $[K'_{22}]$ 是 N_{dr} 阶单位阵^[2,4]。

另外,由文[2],[4]推导,总刚度阵的逆表为

$$[K^{-1}] = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ \hline V_3 & V_4 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

其中

$$V_1 = K_{11}^{-1} + \frac{1}{E} K_{11}^{-1} K_{12} K_{21} K_{11}^{-1} + O\left(\frac{1}{E^2}\right) \quad (4.5)$$

$$V_2 = -\frac{1}{E} K_{11}^{-1} K_{12} + O\left(\frac{1}{E^2}\right) \quad (4.6)$$

$$V_3 = -\frac{1}{E} K_{21} K_{11}^{-1} - \frac{1}{E^2} K_{21} K_{11}^{-1} K_{12} K_{21} K_{11}^{-1} + \frac{1}{E^2} K_{22} K_{21} K_{11}^{-1} + O\left(\frac{1}{E^3}\right) \quad (4.7)$$

$$V_4 = \frac{1}{E} I - \frac{1}{E^2} (K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12}) + O\left(\frac{1}{E^3}\right) \quad (4.8)$$

而总约束阵 [C]、势矩阵 [\Phi] 及屈服阻尼阵 [M] 形式分别如下:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ \hline 0 & EC'_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \text{NNCTS} \\ \updownarrow \text{NCCTS} \end{matrix}, \quad [\Phi] = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 \\ \hline \Phi_{21} & E\Phi'_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \text{Nd}_n \\ \updownarrow \text{Nd}_r \end{matrix} \quad (4.9)$$

$\begin{matrix} \longleftrightarrow & \longleftrightarrow \\ \text{Nd}_n & \text{Nd}_r \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \longleftrightarrow & \longleftrightarrow \\ \text{NNCTS} & \text{NCCTS} \end{matrix}$

$$[M] = \begin{bmatrix} M' & 0 \\ \hline 0 & M' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m'_n \\ \hline & & & m''_1 \\ & & & \ddots \\ & & & & m''_h \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \text{NNCTS} \\ \updownarrow \text{NCCTS} \end{matrix} \quad (4.10)$$

其中 n 为弹塑性单元数, h 为接触单元数。

那么

$$[M - CK^{-1}\Phi] = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ \hline G_3 & G_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \text{NNCTS} \\ \updownarrow \text{NCCTS} \end{matrix} \quad (4.11)$$

$\begin{matrix} \longleftrightarrow & \longleftrightarrow \\ \text{NNCTS} & \text{NCCTS} \end{matrix}$

其中

$$G_1 = M' - C_{11} K_{11}^{-1} \Phi_{11} + O\left(\frac{1}{E}\right) \quad (4.12)$$

$$G_2 = (C_{11} K_{11}^{-1} K_{12} - C_{12}) \Phi'_{22} + O\left(\frac{1}{E}\right) \quad (4.13)$$

$$G_3 = C'_{22} (K_{21} K_{11}^{-1} \Phi_{11} - \Phi_{21}) + O\left(\frac{1}{E}\right) \quad (4.14)$$

$$G_4 = EM'' - EC'_{22} \Phi'_{22} + C'_{22} (K_{22} - K_{21} K_{11}^{-1} K_{12}) \Phi'_{22} + O\left(\frac{1}{E}\right) \quad (4.15)$$

同样, 将荷载向量 t' 写成:

$$\{t'\} = \begin{Bmatrix} t'_1 \\ \vdots \\ t'_j \end{Bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \text{Nd}_n \\ \updownarrow \text{Nd}_r \end{matrix} \quad (4.16)$$

这里, t'_i 为作用在非接触点上的荷载向量, t'_j 为作用在接触点上的荷载向量。所以

$$[CK^{-1}t'] = \begin{bmatrix} R_1 \\ \dots \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}K_{11}^{-1}t'_1 + O\left(\frac{1}{E}\right) \\ \dots \\ -C'_{22}(t'_2 - K_{21}K_{11}^{-1}t'_1) + O\left(\frac{1}{E}\right) \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \text{NNCTS} \\ \updownarrow \text{NCCTS} \end{matrix} \quad (4.17)$$

我们将(4.1)式的约束宽余量表示如下:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ \dots \\ d_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \text{NNCTS} \\ \updownarrow \text{NCCTS} \end{matrix} \quad (4.18)$$

可以证明^[2,4]在(4.15)式 G_4 中 $EM'' = EC'_{22}\Phi'_{22}$, 于是, 将(4.11)–(4.18)代入互补问题(4.1)–(4.2)中, 得

$$\begin{aligned} v_1 - (M' - C_{11}K_{11}^{-1}\Phi_{11})\lambda'_1 - (C_{11}K_{11}^{-1}K_{12} - C_{12})\Phi'_{22}\tilde{\lambda}'_2 \\ = -C_{11}K_{11}^{-1}t'_1 + d_1 + O\left(\frac{1}{E}\right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_2 - C'_{22}(K_{21}K_{11}^{-1}\Phi_{11} - \Phi_{21})\lambda'_1 - C'_{22}(K_{22} - K_{21}K_{11}^{-1}K_{12})\Phi'_{22}\tilde{\lambda}'_2 \\ = -C'_{22}(t'_2 - K_{21}K_{11}^{-1}t'_1) + d_2 + O\left(\frac{1}{E}\right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$v_1 \cdot \lambda'_1 = 0, \tilde{v}_2 \cdot \tilde{\lambda}'_2 = 0; v_1, \tilde{v}_2 \geq 0, \lambda'_1, \tilde{\lambda}'_2 \geq 0 \quad (4.21)$$

其中 $\{v_1, \tilde{v}_2\}^T$ 为参变矢量 $\{\lambda'_1, \tilde{\lambda}'_2\}^T$ 的互补矢量。考察公式(4.19)–(4.21), 只要 $E \rightarrow \infty$ 取极限, 便可以消去惩罚因子的影响, 克服数值计算上的困难。

五、接触力计算

接触单元的接触压力 P_c 和摩擦力 P_f 由表达式(3.5)–(3.6)决定, 由于式中存在惩罚因子, 导致不能直接算出内力, 必须另寻他法。利用最小势能原理可以解决这个问题。

结构的总势能可由其变形能及外力势能相加而成, 文[1]写出了它的表达式

$$\begin{aligned} \pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon^T D \varepsilon d\Omega - \int_{\Omega} \lambda_1^T \left(\frac{\partial g^T}{\partial \sigma} \right)^T D \varepsilon d\Omega \\ + \frac{1}{2} \int_{S_c} \Delta_c^T D_c \Delta_c dS - \int_{S_c} \tilde{\lambda}_2'^T \left(\frac{\partial \tilde{g}^T}{\partial P_c} \right)^T D_c \Delta_c dS \\ - \int_{\Omega} b^T u d\Omega - \int_{S_p} \bar{P} u' dS \end{aligned} \quad (5.1)$$

经有限元离散化, (5.1)式的矩阵表示为:

$$\pi = \frac{1}{2} \delta'^T K \delta' - \delta'^T (\Phi \lambda' + t') \quad (5.2)$$

由最小势能原理, π 对 δ' 的一阶导数等于零。

$$\frac{\partial \pi}{\partial \delta'} = K \delta' - (\Phi \lambda' + t') = 0 \quad (5.3)$$

故

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} + EK'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta'_n \\ \delta'_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 \\ \Phi_{21} & E\Phi'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} t'_1 \\ t'_2 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

其中 δ'_n, δ'_c 分别是非接触位移和接触位移向量。

若将(5.4)的第二式展开,有:

$$K_{21}\delta'_n + K_{22}\delta'_c + EK'_{22}\delta'_c = \Phi_{21}\lambda'_1 + E\Phi'_{22}\lambda'_2 + t'_2 \quad (5.5)$$

且据(3.13)式,总接触力向量 t'_c 为

$$t'_c = EK'_{22}\delta'_c - E\Phi'_{22}\lambda'_2 \quad (5.6)$$

结合(5.5)与(5.6)式:

$$t'_c = t'_2 + \Phi_{21}\lambda'_1 - (K_{21}\delta'_n + K_{22}\delta'_c) \quad (5.7)$$

只要结构位移向量知道,其它物理量都是已知的,接触力就可以从(5.7)式直接获得。

六、计算结果与讨论

所提方法已在 Apollo 机上通用非线性程序系统 NAS-JIGFEX 得以实现,大量的实例在这个程序系统上进行考核。下面两个例题仅是所选典型弹塑性接触问题。

例 1. 简单杆系接触

接触的两个物体如图 1 所示,横杆和竖杆长 $l = 10^6$,横截面积 $A = 5$,斜杆截面积 $10\sqrt{2}$,弹性常数均为 $E = 2 \times 10^5$ 。悬挂弹簧刚度为 20,杆的屈服条件 $f = \sigma - \sigma_s \leq 0$,且 $\sigma_s = 200$,两物体初始间隙 $a_0 = 0.2$ 。

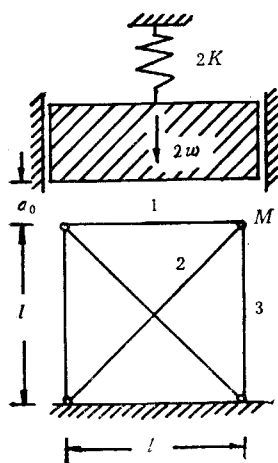


图 1 简单杆系接触

由于结构对称,可只取右边一半分析,则离散系统有四个自由度,其中横杆的竖向位移是相关位移,因此独立位移为 3 (即 $N_d = 3, N_{dn} = 1, N_{dr} = 2$)。单元共五个(一个接触元、弹簧元和三个杆元),接触滑动约束数和弹塑性流动约束数分别为 $NCCTS = 3, NNCTS = 3$ 。

表 1 为结构临界屈服时的接触力、M 点位移及各杆轴力。从表中可见,只有杆 1 发生塑性变形。本问题可用结构力学方法得到理论解,结果与本文相同。当 $\mu \geq 0.5$ 时,系统水平位移消失,杆 1 不可能进入塑性状态,可见摩擦对结构受力状态影响很大。

例 2. 平面沉陷问题

两块平板尺寸和有限元网格划分如图 2 所示,均匀压力作用在平板 2 之上表面。平板 1 和 2 材料假设为理想弹塑性的,且具有屈服应力 196 MPa,平板 2 屈服应力为 1.96 MPa,采用 Mises 屈服准则。两个平板的弹性模数和波松比均相同,分别为 $E = 206 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$ 。计算当摩擦系数 $\mu = 0.0$ 和 0.2 时的接触应力和位移,选平板 2 接触区域中点的竖向位移为结构刚体位移。

在平面应变条件下,当 $\mu = 0.0$ 和 0.2 时,平板 1 开始发生屈服的外荷载值均为 $Q^0 = 9.96 \text{ kN}$, Byung Chae Lee 等^[9]所算初始屈服荷载为 $Q^0 = 9.72 \text{ kN}$ ($\mu = 0.0$),则误差 2.4%,首先发生屈服是在两板接触边上向下几毫米处。图 3 所给荷载因子 r 与结

构刚体位移 δ , 关系图 ($\mu = 0.2$), 荷载因子 r 定义为总荷载值 Q 与初始发生屈服的荷载 Q^0 之比. 图4和图5分别为 $\mu = 0.0$ 及 $\mu = 0.2$ 时不同外荷载值的接触压力分布; 其中虚线是 $r = 1.6$ 时的弹性接触压力分布. 不论是 $\mu = 0.0$, 还是 $\mu = 0.2, r = 1.6$

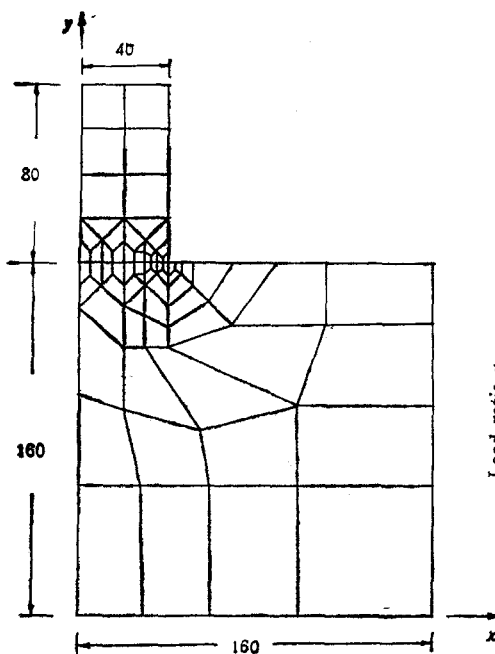
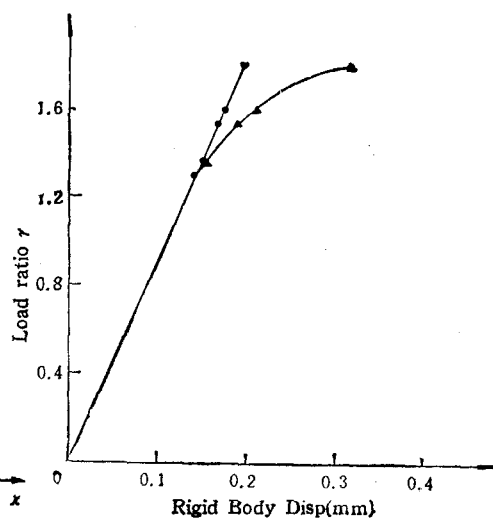


图2 理想弹塑性材料的平面沉陷问题 尺寸: mm



●弹性解 ▲弹塑性解 ($\mu = 0.2$)

图3 荷载因子 r 与刚体位移 δ , 关系图

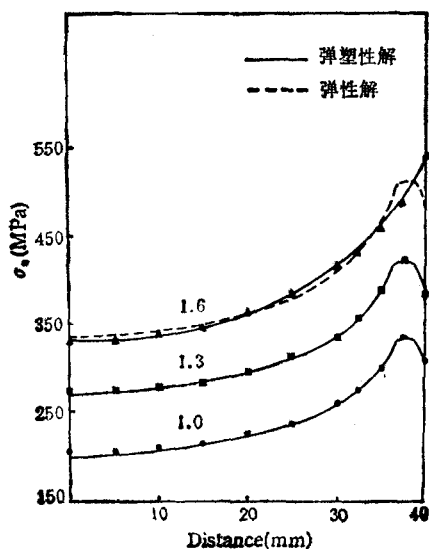


图4 $\mu = 0.0$ 时的接触压力分布

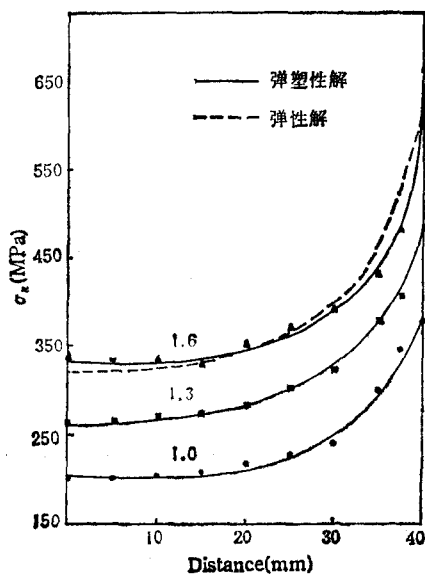


图5 $\mu = 0.2$ 时的接触压力分布

表 1 弹塑性接触解

μ	W^*	u	v	P_x	P_r	N_1	N_2	N_3
0.0	23004	1000.18	-2000.18	-3000	0	1000	-1414.2	-2000
0.1	27504	1000.15	-2375.18	-3750	375	1000	-1944.5	-2375
0.2	35004	1000.13	-3000.18	-5000	1000	1000	-2828.4	-3000
0.3	50004	1000.09	-4250.17	-7500	2250	1000	-4596.2	-4250
0.4	95004	1000.39	-8000.17	-1500	6000	1000	-9899.5	-8000
≥ 0.5	∞							

注: W^* 为临界屈服时的作用力。

时最大压力的弹塑性解都比其弹性解要大。图 6 是不同 r 值摩擦应力的弹塑性解, 从图中便可知, 当 $x \leq 17.85$ mm 接触区域为连续区, 而 17.85 mm $< x \leq 40$ mm 为滑动区。

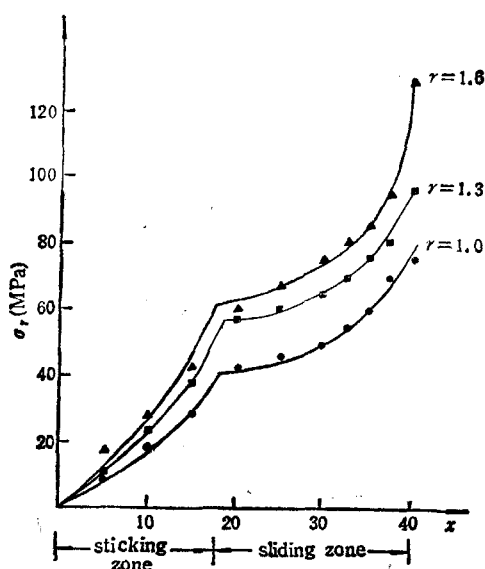


图 6 $\mu = 0.2$ 时摩擦应力分布

当塑性扩展到板 1 底部时, 荷载因子 $r = 1.56$, 应相当于本问题的极限荷载, 它的平均压力是 $1.98 \sigma_y$; 文[11]给出的值是 $1.96 \sigma_y$, 而文[9]算出是 $1.91 \sigma_y$ 。

七、结 语

弹塑性问题、弹性接触及弹塑性接触问题求解都可以直接转化为一个二次规划的互补问题 (4.19)–(4.21) 求解。(1) 当 $NNCTS = 0$, $NCCTS > 0$ 时, 互补问题与弹性接触问题^[2-4]所导公式完全相同;(2) 当 $NNCTS > 0$, $NCCTS = 0$ 时, 互补问题与弹塑性问题^[4]所导公式完全相同;(3) 只有在 $NNCTS > 0$, $NCCTS > 0$ 时, 才是弹塑性接触问题。

最小势能原理的应用可以获得接触力, 而不需通过其惩罚表达式获得, 避免了数值计算上的困难。同样, 互补问题(4.19)–(4.21)的求解也可彻底消去惩罚因子的存在, 保证求解的稳定性和精确性。公式(4.19)–(4.21)可直接用于三维问题及多体接触问题, 本方法已在 Apollo 机上实现, 程序充分考虑用户使用方便, 并且大量的实例也验证了程序及方法的可靠性。

参 考 文 献

- [1] 钟万勰、张柔雷、孙苏明, 参数二次规划法在计算力学中的应用, 计算结构力学及其应用, 5, 4(1988), 106–114.
- [2] Zhong, W. X. and Sun, S. M., A Parametric Quadratic Programming Approach to Elastic Contact Problems with Friction, *Comput. Struct.*, 32, 1(1989), 37–43.
- [3] 孙苏明、钟万勰, 有间隙带摩擦弹性接触问题及参数二次规划解, 计算结构力学及其应用, 6, 3(1989), 25–32.
- [4] Sun, S. M., Quadratic Programming with Parametric Vectors in Three-dimensional Contact Problems, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2, 3(1989), 295–308.

- [5] 张柔雷、钟万镛, 参变量最小势能原理的有限元参数二次规划解, 计算结构力学及其应用, 4, 1(1987), 1—12.
- [6] Panagiotopoulos, P. D., A Nonlinear Programming Approach to the Unilateral Contact and Friction-boundary Problem in the Theory of Elasticity, Ingenieur-Archiv, 44(1975), 421—432.
- [7] Klarbring, A., A Mathematical Programming Approach to Three-dimensional Contact with Friction, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., 58, 2(1986), 175—200.
- [8] Sachdeva, T. D. and Ramakrishnan, C. V., A Finite Element Solution for the Two-dimensional Elastic Contact Problems with Friction, Int. J. Numer. Meths., Engrg., 17, 8(1981), 1257—1271.
- [9] Byung, C. L. and Byung, M. K., A Computational Method for Elasto-plastic Contact Problems, Comput. Struct., 18, 5(1984), 757—765.
- [10] 陈曼琪, 用拟弹性叠加、双重迭代法解弹塑性接触问题, 固体力学学报, 4, 3(1983), 365—374.
- [11] Hill, R., The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford Univ. Press, (1950).

MATHEMATICAL PROGRAMMING METHOD FOR ANALYSIS OF ELASTO-PLASTIC CONTACT PROBLEMS WITH FRICTION

Sun Suming Zhong Wanxie
(Dalian University of Technology)

Abstract A mathematical programming procedure developed for the elasto-plastic contact problems with friction is presented. This is a generalization of a procedure for elastic contact problems^[2-4] to include the plastic effects under proportional loading. The method uses the flexibility matrix obtained by inversion of the global stiffness matrix formed by introducing the contact element, and Parametric Linear Complementary (PLC) in plasticity or in elastic contact problems. The penalty factors in elasto-plastic frictional contact problems can be eliminated similar to elastic contact problems.

Key words contact, elasto-plastic, parametric quadratic programming