第23卷 第2期 力 学 学 报 Vol. 23, No. 2
1991年3月 ACTA MECHANICA SINICA Mar., 1991

三维运动接触问题的广义 Галин 定理

G.M.L. Gladwell
(Univ. of Waterloo Canada)

范天佑
(北京理工大学材料科学研究中心)

提要 本文给出了求解一类相当普遍的三维运动接触问题的分析解法，并且把仅仅对静态接触问题成立的 Галин 定理推广到动力学情形，作了严格证明. 作为例子，对接触区为椭圆的情形给出了积分形式的解，并且作了数值计算，由这些结果可以看出运动压体速度的效应.

关键词 三维运动，接触问题，Галин 定理

三维运动接触问题在实践上是很有意义的. 由于其数学处理上的困难，就作者们的见识而言，很少见到这方面的解发表，包括一些最权威的接触理论的专著均未涉及此内容.

本文对一类颇为普遍的三维运动接触问题给出了普遍有效的解法. 在求解中还证明了原来对静态接触问题成立的著名的 Галин 定理可以推广到动态情形，因而我们得到了广义 Галин 定理. 作为具体应用，我们对接触区为椭圆的情形作了实地计算，解答表示成积分形式，并且给出了数值结果，这些结果揭示了运动压体速度的效应，当这种速度增大时，此效应十分显著.

一、Lamé 势的完全性

Lamé 势 ϕ 与 $\boldsymbol{\phi}=(\phi_x,\phi_y,\phi_z)$ 是本文讨论的基础，它们满足波动方程组

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2},\ \nabla^2\boldsymbol{\phi}=\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\phi}}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

其中 $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$，$\phi$ 与 $\boldsymbol{\phi}$ 由位移矢量 $\boldsymbol{u}=(u_x,u_y,u_z)$ 表示成

$$\boldsymbol{u}=\nabla\phi+\nabla x\boldsymbol{\phi} \tag{1.2}$$

这里 ∇ 表示梯度，∇x 表示旋度，在(1.1)中 c_1 与 c_2 分别为纵波与横波的波速

$$c_1^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho},\quad c_2^2=\frac{\mu}{\rho} \tag{1.3}$$

而 λ,μ 与 ρ 分别为材料的 Lamé 常数与质量密度.

在使用 ϕ 与 $\boldsymbol{\phi}$ 作为我们讨论的基础时，首要的问题需弄清楚它们是不是代表了三维弹性动力学的完全解？回答是肯定的. Sternberg 等[1]以及 Long[2] 对 ϕ 与 $\boldsymbol{\phi}$ 作为三维弹性动力学的解的完全性作了严格证明，尤其是文献[2]的证明是对相当普遍的情形得到

本文于1989年5月15日收到第一稿，1990年6月20日收到修改稿.

的．由于篇幅的限制这里不再讨论有关细节．

二、基　本　解

假设在三维弹性空间中有一个干扰源，例如一个压头，一个裂纹或其它的位移间断面以常速度 V 沿 x 轴方向运动．这是一种稳态的动力学情形，可以采用伽里略变换

$$x_1 = x - Vt,\quad x_2 = y,\quad x_3 = z \tag{2.1}$$

采用这一变换之后，方程(1.1)化成

$$\nabla^2\phi - \frac{V^2}{c_1^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} = 0,\quad D^2\boldsymbol{\psi} - \frac{V^2}{c_2^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\psi}}{\partial x_1^2} = 0 \tag{2.2}$$

其中 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$，因而控制方程可以不显含时间变量．它们还可以改写成

$$\nabla_1^2\phi = 0,\quad \nabla_2^2\boldsymbol{\psi} = 0 \tag{2.3}$$

这里

$$\begin{aligned}\nabla_1^2 &= \alpha_1^2\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2\\ \nabla^2 &= \alpha_2^2\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2\end{aligned} \tag{2.4}$$

以及

$$\alpha_1^2 = (1 - V^2/c_1^2),\quad \alpha_2^2 = (1 - V^2/c_2^2) \tag{2.5}$$

位移与应力分量分别为

$$\left.\begin{aligned}u_1 &= \partial\phi/\partial x_1 + \partial\psi_3/\partial x_2 - \partial\psi_2/\partial x_3\\ u_2 &= \partial\phi/\partial x_2 + \partial\psi_1/\partial x_3 - \partial\psi_3/\partial x_1\\ u_3 &= \partial\phi/\partial x_3 + \partial\psi_2/\partial x_1 - \partial\psi_1/\partial x_2\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

与

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{11} &= \lambda D^2\phi + 2\mu(\partial^2\phi/\partial x_1^2 + \partial^2\psi_3/\partial x_1\partial x_2 - \partial^2\psi_2/\partial x_1\partial x_3)\\ \sigma_{22} &= \lambda D^2\phi + 2\mu(\partial^2\phi/\partial x_2^2 + \partial^2\psi_1/\partial x_2\partial x_3 - \partial^2\psi_3/\partial x_1\partial x_2)\\ \sigma_{33} &= \lambda D^2\phi + 2\mu(\partial^2\phi/\partial x_3^2 + \partial^2\psi_2/\partial x_1\partial x_3 - \partial^2\psi_1/\partial x_2\partial x_3)\\ \sigma_{12} &= \mu[2\partial^2\phi/\partial x_1\partial x_2 + \partial^2\psi_1/\partial x_1\partial x_2 + \partial^2\psi_2/\partial x_2\partial x_3\\ &\quad + (\partial^2/\partial x_2^2 - \partial^2/\partial x_1)\psi_3]\\ \sigma_{23} &= \mu[2\partial^2\phi/\partial x_2\partial x_3 + (\partial^2/\partial x_3^2 - \partial^2/\partial x_2^2)\psi_1\\ &\quad + \partial^2\psi_2/\partial x_1\partial x_2 - \partial^2\psi_3/\partial x_1\partial x_3]\\ \sigma_{31} &= \mu[2\partial^2\phi/\partial x_1\partial x_3 - \partial^2\psi_3/\partial x_1\partial x_2 + (\partial^2/\partial x_1^2\\ &\quad - \partial^2/\partial x_3^2)\psi_3 + \partial^2\psi_3/\partial x_2\partial x_3]\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

运用二重 Fourier 变换

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\phi}(\xi_1,\xi_2,x_3) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x_1,x_2,x_3)\exp(i\xi_1x_1 + i\xi_2x_2)dx_1dx_2\\ \tilde{\boldsymbol{\psi}}(\xi_1,\xi_2,x_3) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\psi}(x_1,x_2,x_3)\exp(i\xi_1x_1 + i\xi_2x_2)dx_1dx_2\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

在对方程(2.3)两边施行这种变换之后，对于上半空间 ($x_3 > 0$)，我们得到解

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\phi}(\xi_1,\xi_2,x_3) &= A(\xi_1,\xi_2)\exp(-\gamma x_3)\\ \tilde{\psi}(\xi_1,\xi_2,x_3) &= \boldsymbol{B}(\xi_1,\xi_2)\exp(-\delta x_3)\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\gamma &= \gamma(\xi_1,\xi_2) = \sqrt{\alpha_1^2\xi_1^2+\xi_2^2}\\ \delta &= \delta(\xi_1,\xi_2) = \sqrt{\alpha_2^2\xi_1^2+\xi_2^2}\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

在公式(2.9)中 A 与 $\boldsymbol{B}$ 为任意函数.

位移分量 u_i 与应力分量 σ_{ij} 的 Fourier 变换由 $\tilde{\phi}$ 与 $\tilde{\psi}$ 及其导数表示如下

$$\left.\begin{aligned}\tilde{u}_1 &= -i\xi_1\tilde{\phi} - i\xi_2\tilde{\psi}_3 - d\tilde{\psi}_2/dx_3\\ \tilde{u}_2 &= -i\xi_2\tilde{\phi} + i\xi_1\tilde{\psi}_3 + d\tilde{\psi}_1/dx_2\\ \tilde{u}_3 &= -i\xi_1\tilde{\psi}_2 + i\xi_2\tilde{\psi}_1 + d\tilde{\phi}/dx_3\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{33} &= \lambda(d^2/dx_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2)\tilde{\phi} + 2\mu[d^2\tilde{\phi}/dx_{23} - i\xi_1 d\tilde{\psi}_2/dx_3 + i\xi_2 d\tilde{\psi}_1/dx_3]\\ \tilde{\sigma}_{23} &= \mu\{-2i\xi_3 d\tilde{\phi}/dx_3 + (d^2/dx_3^2+\xi_2^2)\tilde{\psi}_1 - \xi_1\xi_2\tilde{\psi}_2 + i\xi_1 d\tilde{\psi}_3/dx_3\}\\ \tilde{\sigma}_{31} &= \mu\{-2i\xi_1 d\tilde{\phi}/dx_3 + \xi_1\xi_2\tilde{\psi}_1 + (d^2/dx_3^2+\xi_1^2)\tilde{\psi}_2 - i\xi_2 d\tilde{\psi}_3/dx_3\}\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

这里应力分量仅列出与下面计算直接有关的一部分.

这样已经完成了变换空间中的解. 具体的解答需要针对干扰源的形式和边界条件确定.

三、运动压体问题

设上面所说的干扰源为一运动压体,它与半空间的接触面为一椭圆,用 Ω 表示. 在运动坐标系 (x_1,x_2,x_3) 中边界条件可以表示成

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{23}=\sigma_{31}=0,\ x_3=0,\ -\infty<x_1,x_2<\infty\\ &\sigma_{33}=f_1(x_1,x_2),\ x_3=0,\ (x_1,x_2)\in\Omega\\ &\sigma_{33}=0,\ x=0,\ (x_1,x_2)\bar{\in}\Omega\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

或者

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{23}=\sigma_{31}=0,\ x_3=0,\ -\infty<x_1,x_2<\infty\\ &\mu_3=f_2(x_1,x_2),\ x_3=0,\ (x_1,x_2)\in\Omega\\ &\sigma_{33}=0,\ x_3=0,\ (x_1,x_2)\bar{\in}\Omega\end{aligned}\right\} \tag{3.1'}$$

其中 $f_1(x_1,x_2)$ 与 $f_2(x_1,x_2)$ 为已知函数.

在分量 ψ_1, ψ_2 与 ψ_3 之中取一个为零,这并不失去一般性,不妨取

$$\psi_3(x_1,x_2,x_3)=0 \tag{3.2}$$

把(2.9)代入(2.12)并且考虑到公式(3.2)以及条件(3.1)中的

$$\sigma_{23}=\sigma_{31}=0,\ x_3=0$$

因而导出

$$B_1(\xi_1,\xi_2)=\Delta_1 A(\xi_1,\xi_2)/\Delta,\quad B_2(\xi_1,\xi_2)=\Delta_2 A(\xi_1,\xi_2)/\Delta \tag{3.3}$$

其中

$$\Delta=(\xi^2+\delta^2)\gamma^2,\ \Delta_1=-2i\gamma\xi_2,\ \Delta_2=2i\gamma\xi_1,\ \xi^2=\xi_1^2+\xi_2^2 \tag{3.4}$$

把公式(3.3)代入(2.11)第三式与(2.12)第一式中得到

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{u}_3(\xi_1,\xi_2,0)=\gamma(\xi^2-\delta^2)A/(\delta^2+\xi^2)\\&\tilde{\sigma}_{33}(\xi_1,\xi_2,0)=\{\lambda(\gamma^2-\xi^2)(\delta^2+\xi^2)+2\mu[\gamma^2(\delta^2+\xi^2)-2\gamma\delta\xi^2]\}A/(\delta^2+\xi^2)\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

根据 Willis[3] 引进的影响函数的物理意义,我们有

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{33}(\xi_1,\xi_2)&=-\tilde{u}_3(\xi_1,\xi_2,0)/2\pi\tilde{\sigma}_{33}(\xi_1,\xi_2,0)\\&=-\gamma M_2^2\xi_1^2/2\pi[-2(\lambda+\mu)M_1^2\xi^2\xi_1^2+\lambda M_1M_2\xi_1^2]\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中

$$M_1=V/c_1,\quad M_2=M/c_t\tag{3.7}$$

为第一与第二 Mach 数.

当 $V=0$, 那么 $\alpha_1=\alpha_2=1$, $\gamma=\delta=\xi$, 则(3.6)化成

$$\tilde{H}_{33}=-(1-\nu)/2\pi\mu\xi\tag{3.8}$$

还原为静态的著名的 Галин 解[4]. 这从一个侧面验证了本文建议的方法的正确性. 在下一节我们将进一步证明 Галин 定理对运动接触问题的推广.

四、接触面上的位移

当接触区 Ω 上的载荷为已知时,由 Willis 的表示[3,5],我们有(亦即求 Fourier 反演)

$$u_j(x_1,x_2,0)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{H}_{jk}(\xi_1,\xi_2)G_k(\xi_1,\xi_2)\exp(-i\xi_1x_1-i\xi_2x_2)d\xi_1d\xi_2\tag{4.1}$$

这里影响函数 $\tilde{H}_{jk}$ 类似于前面介绍过的 $\tilde{H}_{33}$,而 $G_k(\xi_1,\xi_2)$ 为边界条件中已知函数的二重 Fourier 变换,即

$$G_k(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g_k(x_1',x_2')\exp(i\xi_1x_1'+i\xi_2x_2')dx_1'dx_2'$$

其中

$$g_k(x_1',x_2')=-\sigma_{k3}(x_1',x_2',0)\quad(x_1',x_2')\in\Omega\tag{4.2}$$

由边界条件(3.1)可知,当 $k\neq3$, $g_k(x_1',x_2')=0$, 引进

$$x_1'=a\rho\cos\varphi,\quad x_2'=b\rho\sin\varphi\tag{4.3}$$

$|\rho|\leqslant1$, $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$. 假设

$$g_3(x_1',x_2')=F(\rho)\cos m(\varphi+\varphi_0)\tag{4.4}$$

那么

$$\begin{aligned}G_3(\xi_1,\xi_2)=\frac{ab}{2\pi}\int_0^1\rho F(\rho)d\rho\int_0^{2\pi}&\cos m(\varphi+\varphi_0)\\&\times[i(a\xi_1\cos\varphi+b\xi_2\sin\varphi)\rho]d\varphi\end{aligned}\tag{4.5}$$

记

$$a\xi_1=c\cos\phi,\quad b\xi_2=c\sin\phi\tag{4.6}$$

则(4.5)中的与 φ 有关的积分变成

$$I_m=i^m\cos m(\phi+\varphi_0)J_m(c\rho)\tag{4.7}$$

于是

$$G_3(\xi_1,\xi_2)=abi^m\cos m(\phi+\varphi_0)\int_0^1\rho F(\rho)J_m(c\rho)d\rho\tag{4.8}$$

取

$$F(\rho)=(1-\rho^2)^{-1/2}P_n^m[(1-\rho^2)^{1/2}] \tag{4.9}$$

这里 $P_m^n(x)$ 为一多项式．在这一情形下，(4.8)化成

$$I_{n,m}(c)=\int_0^1 \rho(1-\rho^2)^{-1/2}P_n^m[(1-\rho^2)^{1/2}]J_m(c\rho)d\rho \tag{4.10}$$

并且可以得出

$$I_{n,m}(c)=(-1)^{(n-m)}P_n^m(0)j_n(c) \tag{4.11}$$

其中 $j_n(c)$ 为第一类球 Bessel 函数．于是

$$G_3(\xi_1,\xi_2)=ab(-1)^{n/2}P_n^m(0)\cos n(\phi+\varphi_0)j_n(c) \tag{4.12}$$

现在把这一结果代入(4.1)并且利用(3.6)所给出的 $\widetilde{H}_{33}(\xi_1,\xi_2)$ 为 ξ 的一1阶齐次式的事实，我们有

$$\widetilde{H}_{33}(\xi_1,\xi_2)=c^{-1}\widetilde{H}_{33}(a^{-1}\cos\phi,b^{-1}\sin\phi)=c^{-1}\omega_{33}(\phi) \tag{4.13}$$

于是

$$u_3(x_1,x_2,0)=P_n^m(0)\{(-1)^{n/2}\int_0^\infty \exp(-i\zeta c)j_m(c)dc\}$$

$$\times\int_0^{2\pi}\omega_{33}(\phi)\cos m(\phi+\varphi_0)d\phi \tag{4.14}$$

其中

$$\zeta=a^{-1}x_1\cos\phi+b^{-1}x_2\sin\phi \tag{4.15}$$

由于 $\widetilde{H}_{33}$ 是实的，在这种情形下考虑(4.14)中大括号里的实部即够，亦即[5]

$$\mathrm{Re}\left\{(-1)^{n/2}\int_0^\infty \exp(-i\zeta c)j_n(c)dc\right\}=\begin{cases}(\pi/2)P_n(\zeta) & |\zeta|\leqslant 1\\ 0 & |\zeta|>1\end{cases} \tag{4.16}$$

在椭圆 Ω 内部，x_1 与 x_2 可以写成

$$x_1=ar\cos\theta,\ \ x_2=br\sin\theta,\ \ |r|\leqslant 1 \tag{4.17}$$

而 ζ 可以表示成

$$\zeta=\gamma\cos(\theta-\phi),\ \ |\zeta|\leqslant 1$$

这样

$$u_3(x_1,x_2,0)=(\pi/2)P_n^m(0)\int_0^{2\pi}\omega_{33}(\phi)P_n[r\cos(\theta-\phi)]$$

$$\times\cos m(\phi+\varphi_0)d\phi\quad (x_1,x_2)\in\Omega \tag{4.18}$$

这里 $\widetilde{H}_{33}$（自然 ω_{33}）由(3.6)给出．

至此，我们已经证明了 Галин 定理对运动接触问题的扩充．即

定理　假定位于上半空间 $z>0$（即 $x_3>0$）表面上一个运动压体，具有椭圆形横截面 Ω，它以常速度 V 沿某一方向(例如 x 方向)运动，假定接触面上无摩擦力，在接触面之外，半空间的表面不受外力作用，若接触面上的压力

$$P(x,y)=(1-x^2/a^2-y^2/b^2)^{-1/2}P_n(x,y)$$

那么接触面上的位移 u_z（即 u_3）为公式(4.18)表示，或者记为 $q_n(x,y)$，这里 P_n 与 q_n 均为 x 与 y 的联合 n 阶多项式．

很显然这里不仅证明了一个结论，而且把 $P_n(x,y)$ 与 $q_n(x,y)$ 之间的关系都通过

(4.18) 建立起来,因而可以计算出接触面上任一点的法向位移. 下面给出实例.

五、数值结果

作为实例,我们取 $m=0, n=0, P_n^m(0)=P_0^0(0), P_n[r\cos(\theta-\phi)]=1, \cos m(\phi+\varphi_0)=1$, 由(4.18)可知这时 $u_3(x_1, x_2, 0)$ 对坐标来说是常数, 但它随压体运动速度 V, Poisson 系数 ν 以及压体的几何特征而变化. 这里由于压体的横截面(底面)为一椭圆,其几何特征可以用 $e=\sqrt{1-b^2/a^2}$ 代表. 把以上各种数值代入公式(4.18),在 $V\neq 0$ 时为动态解, $V=0$ 时为静态解(即 Галин 解,即它作为本文解的一个特例),因而有无量纲形式的动态位移 $u=u_3^{动态}/u_3^{静态}$ 为

$$u=\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{1+\left\{\left[1-\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\frac{V^2}{c_2^2}\right](1-e^2)-1\right\}\cos^2\phi}}{1-\left\{e^2+\nu\frac{V^2}{c_2^2}(1-e^2)\right\}\cos^2\phi}d\phi}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2\phi}}d\phi} \tag{5.1}$$

计算结果表明 u 对 V 与 e 很敏感, 而 ν 相对地不太敏感, 因而在图 1 仅给出对于 $\nu=0.3$ 情形的计算值. 这个图清楚地显示了运动压头速度 V 的效应. 针对这一组曲线可以得到无量纲动态位移的近似拟合公式为

$$\begin{gathered}u=C+eD(V/c_2)^\alpha\\ C=1,\ D=-0.28,\ \alpha=1.9\end{gathered} \tag{5.2}$$

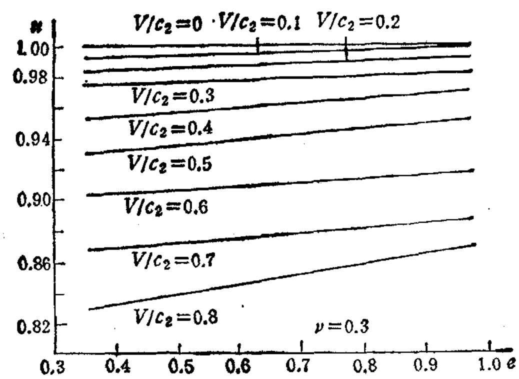

图 1 $\nu=0.3$ 的材料中接触区 Ω 上的无量纲法向位移随 V/c_2 与 e 的变化

六、讨论与结论

本文主要研究了定常运动压头在接触区上的压力与接触位移的关系,并且证明了 Галин 定理仍然成立, 进而计算出常压力作用下的接触位移随材料参数 ν, 运动学参数 V/c_2 和几何参数 $e=(1-b^2/a^2)^{1/2}$ 的变化,看来接触位移对 V/c_2 是敏感的.

对于接触区外的应力分布，这里没有讨论．这需要求解某些积分方程，我们将在另文中介绍。

参　考　文　献

[1] Sternberg, E., et al., Proc. 4th U. S. Nat. *Cong. Appl. Mech.*, 2(1962), pp. 793—797.

[2] Long, C. F., *Acta Mechanica*, 3(1967), 371—378.

[3] Willis, J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, 14(1966), 163—176.

[4] Galin, L. A., (Л. А. Галин), Contact Problems in the Theory of Elasticity (in Russian), Gostekhizdat, Moscow (1953).

[5] Gladwell, G. M. L., Contact Problems in the Classical Theory of Elasticity, Sijthoff & Noordhoff International Publishers B. V., Alphen and den Rijn, The Netherlands (1980).

GALIN'S THEOREM HOLDS FOR MOVING PUNCH

G. M. L. Gladwell

(*University of Waterloo, Waterloo, Ontario Nzl, 3G1, Canada*)

Fan Tianyou

(*Beijing Institute of Technology P. O. Box 327, Beijing China*)

Abstract This paper presents a formulation for solving three-dimensional moving punch problem. It proves that Galin's theorem holds for the punch. As an example, the study offers some results (including numerical data) of dynamic displacement over an ellipse contact region.

Key words Three dimensional moving contact, Lame potentials, double Fourier transform, influence functions, generalized Galin's theorem