

薄壁结构屈曲和初始后屈曲的 局部分析及其精度*

黄宝宗 杨文成 沈祥富
(东北工学院力学系) (沈阳飞机公司研究发展中心)

摘要 为了解决大型复杂薄壁结构稳定性有限元分析中方程阶数过高的问题,本文建议用结构局部代替整体进行计算,证明局部分析方法可以得到整体结构线性分支点的上限和下限,以及整体结构渐近后屈曲行为的近似解,给出了算例。

关键词 薄壁结构屈曲,初始后屈曲,局部分析,分支点的上、下限

一、引言

复杂薄壁结构屈曲和后屈曲有限元分析,通常需要花费大量机时,所以想在整个结构范围内进行有限元离散和求解是很困难的。另一方面,在复杂薄壁结构中发生屈曲的部位,多数情况下只限于结构的某一局部区域,而不是遍及结构全部。根据结构和载荷特点,屈曲部位常常不难判断,所以在整个结构中进行有限元离散,并不一定必要,用结构的某一局部代替整体进行计算是可行的,显然这将大大缩短计算时间,使复杂结构的屈曲和后屈曲分析能够更方便地应用于工程实际。

在局部分析中,需要解决的问题是计算区域的选取及判断计算结果的精度。计算区域的选取带有一定经验性,除了应该充分考虑结构和载荷对称性引起的屈曲形态的对称性或反对称性外,由于薄壁结构中加强元件常常能有效地限制屈曲波形的扩展,因此在计算区域边界上有加强元件,特别是较强的加强元件,将有利于提高局部分析计算结果的精度。在不进行整体结构屈曲计算的情况下,判断局部分析给出的结果与整个结构的真实解的误差是重要的,只有使误差限制在合理的范围内,才能认为局部计算的结果是可靠的。

本文根据分支点处系统位能半正定条件,证明了用局部分析方法可以得到整个结构线性分支屈曲临界载荷的上限和下限,并在文[1]基础上,给出了计算上、下限的有限元法,通过算例表明这一方法是简便有效的。近年来,渐近后屈曲理论^[2,3]受到普遍重视^[4],本文将这一理论用于复杂薄壁结构的局部分析,通过算例考察了局部分析给出的渐近后屈曲行为的近似解。

* 国家自然科学基金资助项目。

本文于1989年12月22日收到第一稿,1990年4月5日收到第二稿。

二、薄壁结构系统临界载荷上、下限的局部分析

假定一个大型薄壁结构系统,在总体应力分析基础上,根据受力情况和结构特点,可以判断其屈曲形态主要发生在某一区域(通常情况下,作出这一判断并不十分困难)。对于保守系,利用位能原理,若选取分支点以前的平衡状态作为基本状态,记作 λu_0 ,分支点以后的一个许可状态为 u , 令

$$u = \lambda u_0 + \eta \quad (1)$$

η 为附加位移。若后屈曲平衡状态对基本状态的位能增量为 $P(\lambda, \eta)$, 则有

$$\delta P(\lambda, \eta) = 0 \quad (2)$$

将位能增量泛函 P 按 η 进行台劳展开

$$P(\lambda, \eta) = P_2(\lambda, \eta) + P_3(\lambda, \eta) + P_4(\lambda, \eta) + \dots \quad (3)$$

式中 $P_2(\lambda, \eta)$ 为位移增量 η 的二次泛函,亦即位能的二次变分,由于基本状态是平衡的,所以 $P_1(\lambda, \eta)$ 等于零。若 λ_1 为系统的最低分支点,则 λ_1 和屈曲形态 u_1 满足方程

$$\delta P_2(\lambda_1, \eta) = 0 \quad (4)$$

对于通常结构,在线性基本状态下, P_2 可以分为两部分

$$P_2(\lambda, \eta) = P_2^{(0)}(\eta) + \lambda P_2^{(1)}(\eta) \quad (5)$$

且线弹性变形成

$$P_2^{(0)}(\eta) > 0 \quad (6)$$

由分支屈曲理论,有下列引理:

1) 在分支点 λ_1 处, $P_2(\lambda_1, \eta)$ 半正定,即

$$P_2(\lambda_1, u_1) = \min P_2(\lambda_1, \eta) = 0 \text{ 而 } P_2(\lambda_1, \eta)|_{\eta \neq u_1} > 0 \quad (7)$$

2) 当 $\lambda < \lambda_1$ 时, $P_2(\lambda, \eta)$ 正定,即

$$P_2(\lambda, \eta)|_{\lambda < \lambda_1, \eta \neq 0} > 0 \quad (8)$$

(7)式是分支点的定义;当 η 足够小时,如果 $\lambda \approx \lambda_1$ 则 P 的符号决定于 $P_2(\lambda, \eta)$, 而 $\lambda < \lambda_1$ 时基本状态是稳定平衡,即 $P(\lambda, \eta)|_{\lambda < \lambda_1} > 0$, 所以(8)式成立。

下面证明在线性基本状态下,局部分析可以给出整个系统临界载荷的上限和下限。

假设系统屈曲的主要部位为 Q_b ,其余部分记作 Q_n (图 1)。

1. 上限。若 Q_b 边界完全固定(即 Q_n 对 Q_b 为刚性约束)时,局部系统 Q_b 的分支点 λ'_1 是整个系统 ($Q_b + Q_n$) 分支点 λ_1 的上限,即

$$\lambda_1 < \lambda'_1 \quad (9)$$

证: 当 Q_b 边界为刚性约束时,它可以看作是与 Q_n 无关的独立系统,分支点为 λ'_1 。若 λ'_1 对应的屈曲形态为 $u'_b \in Q_b$, 在 Q_b 边界处 u'_b 及转角等于零,取

$$\eta' = \begin{cases} u'_b & (\text{在 } Q_b \text{ 内}) \\ 0 & (\text{在 } Q_n \text{ 内}) \end{cases} \quad (10)$$

作为整个系统的附加位移,因为 η' 不是系统 ($Q_b + Q_n$) 的屈曲形态,由(7)式和(5)式

$$P_2(\lambda_1, \eta') = P_{2(Q_b)}(\lambda_1, u'_b) + P_{2(Q_n)}(\lambda_1, 0)$$

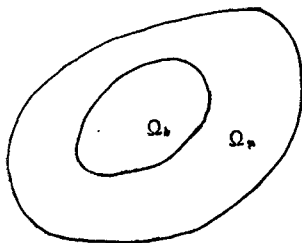


图 1 区域 Q_b 和 Q_n

$$-P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}^{(0)}(u_b) + \lambda_1 P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}^{(1)}(u_b) > 0 \quad (11)$$

因为 λ'_1 和 u_b 是 $\mathcal{Q}_b$ 的分支点和屈曲形态, 由(7)式

$$P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}^{(0)}(u_b) + \lambda'_1 P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}^{(1)}(u_b) = 0$$

或

$$P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}^{(1)}(u_b) = -P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}^{(0)}(u_b)/\lambda'_1 \quad (12)$$

(12)代入(11)式, 注意到 $P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}^{(0)}(u_b)$ 恒正, 故

$$1 - \lambda_1/\lambda'_1 > 0 \quad \text{即} \quad \lambda_1 < \lambda'_1 \quad (\text{证完})$$

2. 下限. 若 $\mathcal{Q}_b$ 边界完全自由(即 $\mathcal{Q}_n$ 对 $\mathcal{Q}_b$ 无约束)时, 局部系统 $\mathcal{Q}_b$ 的分支点 λ'_1 是整个系统 ($\mathcal{Q}_b + \mathcal{Q}_n$) 分支点 λ_1 的下限, 即

$$\lambda_1 > \lambda'_1 \quad (13)$$

证: 由(5)式和(7)式

$$\begin{aligned} &P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}(\lambda_1, u_1) + P_{\lambda(\mathcal{Q}_n)}(\lambda_1, u_1) \\ &= P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}^{(0)}(u_1) + \lambda_1 P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}^{(1)}(u_1) + P_{\lambda(\mathcal{Q}_n)}^{(0)}(u_1) + \lambda_1 P_{\lambda(\mathcal{Q}_n)}^{(1)}(u_1) = 0 \end{aligned}$$

将实际结构看作是二个互相支撑的弹性系统 $\mathcal{Q}_b$ 与 $\mathcal{Q}_n$, 因为已经假定整个系统中 $\mathcal{Q}_n$ 不是屈曲的主要部分, 换言之, $\mathcal{Q}_n$ 或者刚度(因而 $P_{\lambda(\mathcal{Q}_n)}^{(0)}$)较大, 或者在应力水平(因而 $P_{\lambda(\mathcal{Q}_n)}^{(1)}$)较低, 而 $\mathcal{Q}_b$ 则相反, 所以应有

$$P_{\lambda(\mathcal{Q}_n)}(\lambda_1, u_1) = P_{\lambda(\mathcal{Q}_n)}^{(0)}(u_1) + \lambda_1 P_{\lambda(\mathcal{Q}_n)}^{(1)}(u_1) > 0 \quad (14)$$

$$P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}(\lambda_1, u_1) = P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}^{(0)}(u_1) + \lambda_1 P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}^{(1)}(u_1) < 0 \quad (15)$$

当 $\mathcal{Q}_b$ 边界无约束时, 它也可以看作是与 $\mathcal{Q}_n$ 无关的独立系统, 分支点为 λ'_1 . 若 $\mathcal{Q}_b$ 在自由边界时分支点 λ'_1 对应的屈曲形态为 $u'_b (\in \mathcal{Q}_b)$, 因为 u_1 不是 $\mathcal{Q}_b$ 的屈曲形态, 所以

$$P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}(\lambda'_1, u_1) > 0 \quad (16)$$

由(14) + (16), 得到

$$\begin{aligned} 0 &< P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}(\lambda'_1, u_1) + P_{\lambda(\mathcal{Q}_n)}(\lambda_1, u_1) \\ &= P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}(\lambda_1, u_1) + P_{\lambda(\mathcal{Q}_n)}(\lambda_1, u_1) + P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}(\lambda'_1, u_1) - P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}(\lambda_1, u_1) \\ &= (\lambda'_1 - \lambda_1) P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}^{(1)}(u_1) \end{aligned}$$

由(15)式, 注意到 $P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}^{(0)}$ 恒正, 所以 $P_{\lambda(\mathcal{Q}_b)}^{(1)}(u_1) < 0$, 故

$$\lambda'_1 - \lambda_1 < 0 \quad \text{即} \quad \lambda_1 > \lambda'_1 \quad (\text{证完})$$

三、薄壁结构系统屈曲和初始后屈曲的局部有限元分析

渐近后屈曲理论^[2,3]可以比较方便地研究结构分支点附近的初始后屈曲行为. 但是, 在用有限元法分析复杂薄壁结构系统时, 仍然面临方程阶数高、计算时间过长的困难, 因此局部分析同样是有意义的. 文[1]给出了结构渐近后屈曲分析的基本方程, 下面只写出在线性基本状态和单模态屈曲时的形式.

对于弹性保守系统, 应变张量与位移的关系可以表为

$$\varepsilon(u) = \varepsilon_1(u) + \varepsilon_2(u) \quad (17)$$

其中 ε_1 为 u 的线性项, ε_2 为 u 的二次项. 应力张量与应变张量满足线性本构关系

$$\sigma = H\varepsilon \quad (18)$$

其中 H 为弹性张量. 由位能原理, 基本状态 u_0 满足方程

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int \varepsilon_1(u) H \varepsilon_1(u) dv - w_1(u) \right\} = 0 \quad (19)$$

式中 w_1 是外力功, 为 u 的线性泛函。由(4)式有

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int \varepsilon_1(\eta) H \varepsilon_1(\eta) dv + \lambda \int [\varepsilon_1(u_0) H \varepsilon_2(\eta) + 2 \varepsilon_1(\eta) H \varepsilon_{11}(u_0 \eta)] dv \right\} = 0 \quad (20)$$

式中 ε_{11} 是 ε_2 的对称双线性形式。由上式求得分支点 λ_1 和屈曲形态 u_1 , 并可按下式将 u_1 正规化

$$\int \varepsilon_1(u_1) H \varepsilon_1(u_1) dv = 1 \quad (21)$$

令附加位移

$$\eta = \xi u_1 + \xi^2 v_{11} + \dots \quad (22)$$

按渐近屈曲理论, v_{11} 可由下列方程求得

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \int \varepsilon_1(v_{11}) H \varepsilon_1(v_{11}) dv + \lambda_1 \int [\varepsilon_1(u_0) H \varepsilon_2(v_{11}) + 2 \varepsilon_1(v_{11}) H \varepsilon_{11}(u_0 v_{11})] dv \right. \\ \left. + \int 2 \varepsilon_1(u_1) H \varepsilon_{11}(u_1 v_{11}) dv \right\} = 0 \quad (23)$$

$$\int \varepsilon_1(u_1) H \varepsilon_1(v_{11}) dv = 0$$

将(22)代入(3), 略去高次小量, 得到近似的位能增量函数 $p(\lambda, \xi)$, 由平衡条件 $dp(\lambda, \xi)/d\xi = 0$ 得到载荷因子 λ 与附加位移幅度 ξ 的简单关系

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \xi + 3 A_3 \xi^2 + 4 A_4 \xi^3 = 0 \quad (24)$$

其中 $A_3 = \int \varepsilon_1(u_1) H \varepsilon_2(u_1) dv$

$$A_4 = \frac{1}{2} \int \varepsilon_2(u_1) H \varepsilon_2(u_1) dv - \int \left[\frac{1}{2} \varepsilon_1(v_{11}) H \varepsilon_1(v_{11}) + \lambda_1 (\varepsilon_1(u_0) H \varepsilon_2(v_{11}) \right. \\ \left. + 2 \varepsilon_1(v_{11}) H \varepsilon_{11}(u_0 v_{11})) \right] dv \quad (25)$$

以上诸式很容易表为有限元形式。

如果积分域不是结构整体 ($Q_0 + Q_s$), 而是局部区域 Q_b , 则得到渐近后屈曲局部分析的基本方程。由方程(23)、(25)可见, 后屈曲附加位移 v_{11} 及系数 A_3 、 A_4 , 均只取决于屈曲形态 u_1 和临界载荷因子 λ_1 , 所以当 u_1 主要发生在某一局部区域 Q_b 时, 在 Q_b 中得到的渐近后屈曲行为是整个结构的近似解, 但是尚不能证明该近似解是真解的上、下限。

在本文的有限元分析中, 选用几何非线性拟协调扁壳三角元^[13] (包括平板元), 和一种能精确描述刚体位移的空间曲梁元^[6] 及相应的直梁元。在薄壁结构总体应力分析基础上, 若基本状态接近于线弹性, 对于选定的主要屈曲部位 (Q_b), 利用本文的有限元程序, 分别在固定边界和自由边界条件下, 进行屈曲和初始后屈曲局部分析, 从而给出整个结构分支点的上、下限和近似的初始后屈曲行为。

四、算 例

例 1. 加筋平板受轴压(图 2)。边长 $a = b = 400\text{mm}$, 厚度 $t = 1\text{mm}$, 四边简支,

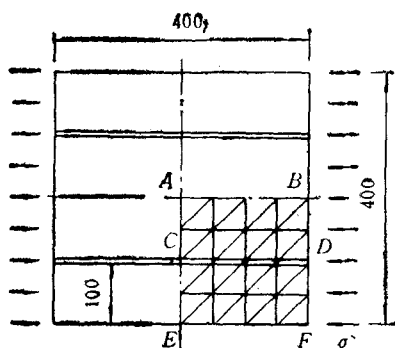


图 2 轴压加筋平板

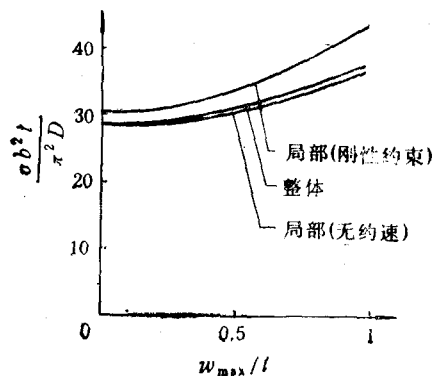


图 3 加筋板轴压初始后屈曲

表 1

计算区域	ABCD		ABEF (即整体)
	无约束	刚性约束	
k	28.505	30.434	28.605
c	0.31094	0.44517	0.33349

筋的惯性矩 $J = 800 \text{ mm}^4$, 筋在板中面内的惯性矩 $J' = 800 \text{ mm}^4$, 极惯性矩 $J_K = 200 \text{ mm}^4$, 截面积 $A = 40 \text{ mm}^2$, 弹性模量 $E = 66 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$ 。这是一个模拟算例, 载荷均匀, 结构不均匀, 中部筋的间距较大, 是屈曲的主要部分, $1/4$ 域内划分网格如图 2。屈曲和初始后屈曲计算结果见表 1 和图 3。表中 k 和 c 见下式

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{b^2 t}$$

$$\sigma / \left(\frac{\pi^2 D}{b^2 t} \right) = k \left[1 + c \left(\frac{w_{max}}{t} \right) \right]^2$$

式中 w_{max} 是最大模度。

例 2. 加筋平板面内弯曲(图 4)。边长 $a = 200 \text{ mm}$, $b = 400 \text{ mm}$, 厚度 $t = 1 \text{ mm}$, 四边简支; 筋: $J = 1160 \text{ mm}^4$, $J' = 1160 \text{ mm}^4$, $J_K = 170 \text{ mm}^4$, $A = 56 \text{ mm}^2$; $E = 66 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$ 。本算例结构均匀, 载荷不均匀, 屈曲主要发生在下部。由于左右对称, 只算结构一半, 网格如图, 计算结果见表 2 和图 5。

表 2

计算区域	ABCD		ABEF (即整体)
	无约束	刚性约束	
k	39.094	41.453	40.990
c	0.24485	0.24138	0.20615

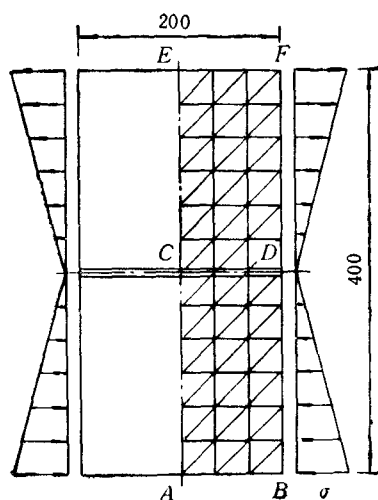


图 4 加筋平板面内弯曲

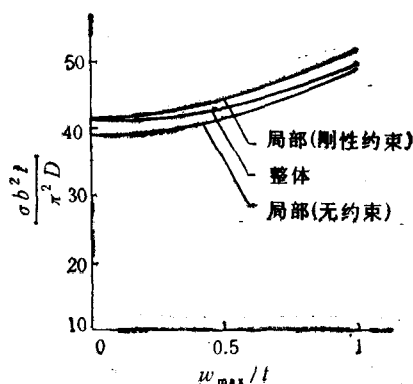


图 5 加筋平板面内弯曲初始后屈曲

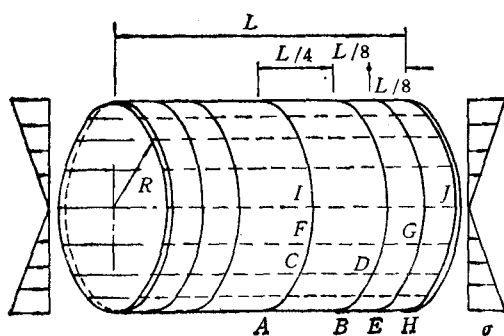


图 6 加筋圆柱壳的弯曲

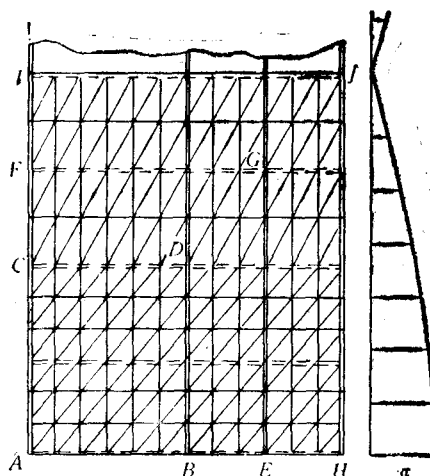


图 7 加筋圆柱壳计算区域及网格(展开图)

例 3. 非均匀加筋圆柱壳的弯曲(图 6)。半径 $R = 300\text{mm}$, 长度 $L = 800\text{mm}$, 蒙皮厚度 $t = 1.4\text{mm}$; 纵向筋 16 根, 均匀分布, 环向筋 7 根, 非均匀分布, 筋的截面尺寸分为两种情况: (I) 纵向筋: 截面积 $A = 56\text{mm}^2$, 惯性矩 $J = 1159.6\text{mm}^4$, 壳面内惯性矩 $J' = 1159.6\text{mm}^4$, 极惯性矩 $J_K = 210.32\text{mm}^4$, 偏心距 $e = -5.182\text{mm}$ (内加筋); 环向筋: $A = 59.5\text{mm}^2$, $J = 2458.6\text{mm}^4$, $J' = 1025.3\text{mm}^4$, $J_K = 159.02\text{mm}^4$, $e = 7.668\text{mm}$ (外加筋)。 (II) 纵向筋和环向筋横截面几何尺寸减半。

本算例是一个更复杂的模拟薄壁结构, 沿环向载荷不均匀, 沿纵向结构不均匀。应该指出, 情况 I 是实际结构中比较常见的加筋情况, 而情况 II 的筋相当弱, 用来考查筋的刚度对计算范围的影响。根据结构和载荷特点, 不难看到屈曲的主要部分在壳体中段下部, 由于对称性只考虑结构的一半, 为了比较临界应力上、下限的变化情况, 分别计算了区域

$ABCD$ 、 $AEFG$ 、 $AHIJ$, 计算网格见图7, 计算结果列于表3。

表3 $k = \sigma_{cr} R / (Et)$

加筋情况	临界载荷因子 k	$ABCD$ 区	$AEFG$ 区	$AHIJ$ 区
I (正常筋)	下限 k''	0.71501	0.71769	0.71783
	上限 k'	0.72017	0.71883	0.71834
II (弱筋)	下限 k''	0.49743	0.57518	0.57807
	上限 k'	0.69842	0.69644	0.59170

上述算例表明,在薄壁结构(特别是加筋结构)中,由于结构和应力分布不均匀,屈曲常常主要发生在局部,利用本文的局部分析方法,在一个比较小的计算区域内,可以给出整个结构临界载荷的上、下限和近似的初始后屈曲行为,从而使计算工作量大大减少。

参 考 文 献

- [1] 黄宝宗,沈祥富,加筋板壳结构初始后屈曲有限元分析,航空学报,11,2(1990).
- [2] Koiter, W. T., On the stability of elastic equilibrium, Dissertation, Delft, Holland (1945).
- [3] Koiter, W.T., Current trends in the theory of buckling, Proc. IUTAM Symposium on Buckling of Structures, 1974. Buckling of Structures, edited by B. Budiansky, (1976), 1—16.
- [4] 黄宝宗,任文敏, Koiter 稳定理论及其应用,力学进展,17,1(1987), 31—38.
- [5] 蒋和洋,拟协调模式非线性有限元,计算结构力学及其应用,1,2(1984), 49—60.
- [6] 黄宝宗,姜泽亚,一个几何非线性空间变形曲梁元,东北工学院学报,8,3(1987), 303—310.

LOCAL ANALYSIS OF THE BUCKLING AND INITIAL POST-BUCKLING OF THIN-WALLED STRUCTURES AND ITS ACCURACY

Huang Baozong Yang Wencheng

(Northeast University of Technology)

Shen Xiangfu

(Shenyang Aircraft Corporation Research and Development Center)

Abstract In order to solve the problem with a big number of equations in analysing the stability of large and complex thin-walled structures by FEM, this paper introduces a method of calculation which makes use of a local area to replace the whole structure. It is proved that the local analysis method can give the upper and lower limits of the linear bifurcation point of the whole structure and the approximate solution of its asymptotic post-buckling behavior. Some numerical examples are given.

Key words thin-walled structure buckling, initial post-buckling, local analysis, upper and lower limits.