

紊动流场中悬浮颗粒分布的随机理论

邵学军 夏震寰

(清华大学)

提要 通过分析固体颗粒在紊动流场中的随机运动,建立了二维流场中垂直于时均流动的方向上颗粒随机位移的概率密度分布函数所满足的方程。由该方程解出的分布函数在一定条件下即相当于颗粒浓度分布函数。运用这一方法研究了[1]、[2]中报道的壁面附近颗粒浓度降低的现象。

关键词 悬浮颗粒,紊动扩散,随机运动,概率密度分布

一、引言

研究固体颗粒在二维流动(如明槽均匀流或顺直管道流动)中垂直于时均流动的方向上浓度的分布时,常用 Fick 扩散定律描述颗粒紊动扩散过程,假定其扩散系数与紊流动量交换系数(或称涡粘性系数)成正比,由此得出相应的颗粒浓度分布所满足的方程。但对于实验中所观测到的稀薄悬浮体流动中壁面附近颗粒浓度的减少^[1,2],尚不能用这种理论作出解释,必须从颗粒的随机运动过程出发进行研究。

Tchen^[3]曾仿照 Brown 运动的 Fokker-Planck-Kolmogorov 理论,把悬浮颗粒的运动看作一维随机走动而建立了紊动场中颗粒数密度所满足的微分方程,同时从流体力学原理出发推导出了圆球体在无界流场中的运动方程,但未指出这两个方程间的内在联系,所以在颗粒数密度方程中还不能考虑颗粒在壁面附近受到升力作用后的情况。

本文从颗粒的随机运动过程出发推导颗粒位移的概率密度所满足的方程,从而可以考虑升力作用对其运动的影响。从方程的解析解可以看到升力作用对颗粒浓度分布的影响,因为对于稀薄悬浮液来说,颗粒位移的概率密度分布等价于颗粒的浓度分布。

二、颗粒运动方程

以二维流场中时均流速的方向为 x 轴正方向,指向流场内的壁面法线方向为 y 轴正方向。若只考虑时均流动方向为水平的情况,可令 y 轴正方向为铅垂向上。 y 向上颗粒运动方程为

$$m_p \frac{dv_p}{dt} = f + w_r + F_r \quad (1)$$

式中 m_p 为颗粒质量, v_p 为颗粒的 y 方向速度分量, f 为 y 向上颗粒所受流体阻力, w_r 为

本文于 1989 年 11 月 28 日收到第一次稿,于 1990 年 3 月 23 日收到修改稿。

颗粒所受重力, F_z 是颗粒所受的 y 向随机脉动力, 由流体的紊动引起。按 Hjelmfelt 和 Mockros^[4] 的分析, 颗粒脉动速度谱与当地流速脉动谱在高频部分有较大差异。把 y 向上的脉动流速 v_f 和颗粒脉动速度 v_p 分别表为 Fourier 积分式如下

$$v_f = \int_0^{\infty} (\zeta \cos \omega t + \beta \sin \omega t) d\omega \quad (2)$$

$$v_p = \int_0^{\infty} [\eta(\zeta \cos(\omega t + \phi) + \beta \sin(\omega t + \phi))] d\omega \quad (3)$$

式中 ω 为频率, ϕ 为相位差, ζ, β 是 Fourier 分量的幅值, η 为幅值比。根据 Tchen^[3] 的颗粒运动方程可计算出幅值比 η 与 Stokes 数 $N_s = [\nu/(\omega D^2)]^{1/2}$ 的关系^[4], 如图 1 所示。计算时取流体运动粘滞系数 $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, 颗粒直径 $D = 0.06 \sim 2 \text{ mm}$, 颗粒密度与流体密度之比 $\rho_s/\rho = 2.65$ 。计算前提是粒径 D 小于流体紊动的最小长度比尺 (例如 Kolmogorov 长度微比尺)。可见当 ω 或 D 较大时 η 约为 0.5, 表明此时颗粒受惯性影响难以响应流速脉动的高频部分。Lee 和 Durst^[5] 对颗粒的频率响应给出了一个更为简洁的描述, 如图 2 所示。图中 ω 表示涡旋运动的特征频率, 在一定的紊动状况下, ω 与涡旋运动的特征长度 l_e 成反比。图 2(a) 所示 ω 的三个范围对应于图 2(b) 所示 l_e 的三个范围。Lee

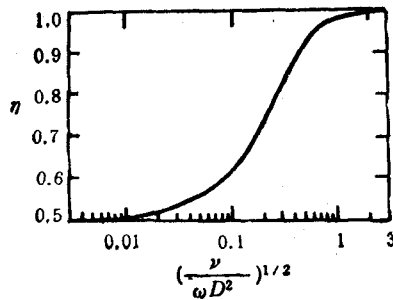


图 1 幅值比 η 与 Stokes 数 N_s 的关系(引自[4])

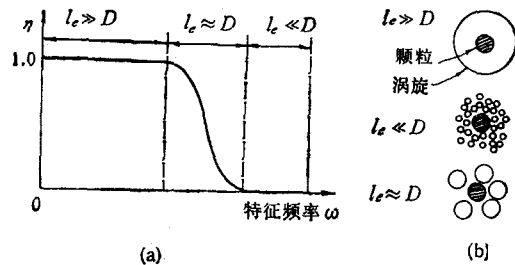


图 2 固体颗粒的频率响应(引自[5])

和 Durst 认为, 固体颗粒对于特征长度小于其直径 ($l_e \ll D$) 的涡旋运动将不作响应, 它的运动完全由特征长度大于颗粒直径 ($l_e \gg D$) 的涡旋所支配。

本文中把特征长度与粒径相等 ($l_e = D$) 的涡旋作为颗粒所能响应的尺度最小的涡旋运动, 其特征时间比尺可按量纲分析原理导出, 为

$$t_m \sim \frac{D}{v_*} \quad (4)$$

式中 $v_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ 为剪切流速, τ_w 为壁面处流体剪应力。把 y 方向脉动流速分解为 v_{f1} 和 v_{f2} 两部分的和

$$v_f = v_{f1} + v_{f2} \quad (5)$$

$$v_{f1} = \int_0^{\omega_0} (\zeta \cos \omega t + \beta \sin \omega t) d\omega$$

$$v_{f2} = \int_{\omega_0}^{\infty} (\zeta \cos \omega t + \beta \sin \omega t) d\omega \quad (6)$$

其中 $\omega_0 = 2\pi/t_m$ 。颗粒速度的脉动只由 v_{f1} 所决定, v_{f2} 的作用可忽略。以下分析颗粒随机运动时提到的脉动流速 v_f 都指式(5)的定义, 并省略下标“1”。 v_f 的均方根值定义为

$$v'(y) = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [v_f(y, t)]^2 dt} \quad (7)$$

其中 T 是一较长时段。壁面附近 $v'(y)$ 随 y 变化比较剧烈。

从上述频响分析出发可得到脉动随机力 F_f 的表达式, 并用解析方法从方程(1)得到颗粒随机速度 v_f 和随机位移 Y_f 的统计均值^[6]。当运动时间很长时得到如下的渐近式

$$\langle v_f \rangle = -\frac{gD^2}{18\nu} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \quad (8)$$

$$\langle [v_f - \langle v_f \rangle]^2 \rangle = \frac{9\nu t_m}{D^2} \frac{\rho}{\rho_s + \frac{1}{2}\rho} v^2 \quad (9)$$

$$\langle Y_f \rangle = -\frac{gD^2}{18\nu} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} t \quad (10)$$

$$\langle [Y_f - \langle Y_f \rangle]^2 \rangle = t_m v^2 t \quad (11)$$

式中尖括号表示统计平均, g 为重力加速度, t 为颗粒释放后运动时间, v^2 是流场中的平均紊动强度。可见颗粒在紊动流场中的运动可视为两者的叠加: 其一是平均运动, 等同于颗粒在静止流体中的运动; 其二是随机运动, 由平均紊动强度决定。由于 y 向脉动流速的作用, 颗粒与平均轨道之间总有一随机偏差, 流场中的平均紊动强度越大, 偏差的均方值也就越大, 如图 3 所示。在这种情况下无法预知某时刻 t 颗粒的确切位置 Y_f , 但可以确定 Y_f 的概率密度分布 $p(y, t)$ 。

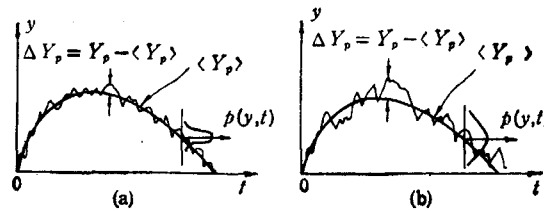


图 3 颗粒随机位移与紊动强度的关系

三、概率密度的 Fokker-planck 方程

y 向上颗粒的随机速度 v_f 与随机位移 Y_f 关系如下

$$v_f = \frac{dY_f}{dt} \quad (12)$$

如前所述可将 v_f 写为平均值 W_f 与脉动值 S_f 的和

$$v_f = W_f + S_f \quad (13)$$

其中脉动值可进一步写成^[6]

$$S_f = G_f \alpha(t) \quad (14)$$

式中 G_f 是 S_f 的均方根值, $\alpha(t)$ 是均值为零、均方根值为 1 的白噪音过程, 其自相关是一 δ 函数。实际上 S_f 的自相关是逐渐衰减为零的, 因而式(14)是一种近似, 在本文中可认为该近似有足够的精确度。分析表明在流场中 G_f 处处与 $v'(y)$ 成正比^[6], 所以有

$$\frac{dY_p}{dt} = W_p + G_p \alpha(t) \quad (15)$$

或

$$\frac{dY_p}{dt} = W_p + Av'(y)\alpha(t) \quad (16)$$

式中 A 为 D , ρ_s , ρ 和 ν 的函数。随机微分方程(15)和(16)右边含有白噪音过程, 可以证明其解 $Y_p(t)$ 必是一个 Markov 过程^[7]。令 T_L 代表颗粒脉动速度自相关从 1 衰减为零所需时间, 若我们感兴趣的是大于 T_L 的时间尺度上的情况, 则式(14)认为成立, 从而可以把颗粒的随机位移 $Y_p(t)$ 按 Markov 过程处理, 其概率密度函数 $p(y, t)$ 满足

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial y^k} (\omega_k p) \quad (17)$$

其中

$$\omega_k(y, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle [Y_p(t + \Delta t) - Y_p(t)]^k \rangle \quad (18)$$

是各项所含系数^[7]。显然 $\omega_k(y, t)$ 与 Y_p 有直接的联系, 它们的表达式可以从方程(15)出发获得。于是我们就可以在(15)与(17)之间建立联系。若(15)中包含了升力对颗粒随机运动的影响, 就可以通过方程(15)与(17)之间的联系在 $p(y, t)$ 上反映出该影响。

用粒径 D 和式(4)定义的 t_m 把方程(15)无量纲化并积分一次, 得到

$$Y(t + \tau) - y = \int_t^{t+\tau} \{W[Y(s), s] + G[Y(s), s]\alpha(s)\} ds \quad (19)$$

其中 Y, W, G, S 分别是 Y_p, W_p, G_p, t 的无量纲形式。把 $W[Y(s), s]$ 和 $G[Y(s), s]$ 在 $Y(s) = y$ 处展为 Taylor 级数, 经反复迭代后, 方程(19)成为

$$\begin{aligned} Y(t + \tau) - y = & \int_t^{t+\tau} W(y, s) ds + \int_t^{t+\tau} \int_t^s W'(y, s) W(y, r) dr ds \\ & + \int_t^{t+\tau} \int_t^s W'(y, s) G(y, r) \alpha(r) dr ds + \dots \\ & + \int_t^{t+\tau} G(y, s) \alpha(s) ds + \int_t^{t+\tau} \int_t^s G'(y, s) W(y, r) \alpha(s) dr ds \\ & + \int_t^{t+\tau} \int_t^s G'(y, s) G(y, r) \alpha(r) \alpha(s) dr ds + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $W' = \partial W / \partial y$, $G' = \partial G / \partial y$ 。最后方程(20)右边的被积函数将只由 $W(y, t)$, $G(y, t)$ 及其导数和白噪音过程 $\alpha(t)$ 组成。利用 $\alpha(t)$ 的均值为零、自相关为 δ 函数的性质, 对式(20)求统计平均就可得到 $Y(t + \tau) - y$ 的统计均值^[8]

$$\langle Y(t + \tau) - y \rangle = \left[W(y, t) + G(y, t) \frac{\partial G(y, t)}{\partial y} \right] \tau + O(\tau) \quad (21)$$

其中设 τ 为无穷小量, $O(\tau)$ 表示比 τ 高阶的无穷小量。把式(21)还原为有量纲形式得到

$$\langle Y_p(t + \tau) - y \rangle = \left(W_p + t_m G_p \frac{\partial G_p}{\partial y} \right) \tau + O(\tau) \quad (22)$$

把式(22)代入式(18)就可以求出方程(17)的一个系数

$$\omega_1(y, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle Y_p(t + \tau) - y \rangle = W_p + t_m G_p \frac{\partial G_p}{\partial y} \quad (23)$$

经过类似的计算可以得到

$$\omega_2(y, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle [Y_p(t + \tau) - y]^2 \rangle = t_m [G_p(y, t)]^2 \quad (24)$$

$$\omega_k(y, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \langle [Y_p(t + \tau) - y]^k \rangle = 0 \quad (k \geq 3) \quad (25)$$

将式(23), (24)和(25)代入方程(17)后有

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(W_p + t_m G_p \frac{\partial G_p}{\partial y} \right) p \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (t_m G_p^2 p) \quad (26)$$

式(26)一般称为 Fokker-Planck 方程。 $p(y, t)$ 是颗粒随机位移 $Y_p(t)$ 的概率密度分布, 表示一个固体颗粒释放入紊动流场后于时刻 t 出现于坐标 y 处的概率密度。对于稀薄悬浮体来说, $p(y, t)$ 与颗粒浓度分布只差一个常数^[6]。方程(26)表明了 $p(y, t)$ 与颗粒在 y 向上的平均速度 W_p 和脉动速度均方根值 G_p 之间的密切联系。当 W_p 或 G_p 因流场中的某种影响(例如壁面附近的升力)而有所改变时, 必然会引起 $p(y, t)$ 的变化。

四、边壁附近升力的影响

以明槽均匀紊流中底面附近的情况为例, 如图 4 所示。Magnus 效应、流速梯度的存在和颗粒对流的相对速度(滑移-剪切效应)等都导致升力的产生。对于流动 Reynolds 数较低的无界均匀简单剪切流动, Saffman 给出了颗粒所受升力的 x 向和 y 向分量表达式^[9,10]。当升力的方向是 y 轴正方向时, 流体中的颗粒重力 $m_p g(\rho_s/\rho - 1)$ 将部分或全部地被抵消, 沉速绝对值将减小或产生一个离壁面而去的速度(负沉速)。颗粒在升力作用下沉速的变化情况尚无实测资料可供参考。为了进一步研究沉速变化后颗粒浓度分布的状况, 我们假定壁面附近颗粒的 y 向平均速度 W_p (与沉速相差一个负号)可表示为

$$W_p = \xi y(H - y) \quad (27)$$

其中 ξ 是量纲为 $[L^{-1}T^{-1}]$ 的常数。在 $y = H$ 处升力恰好等于 $m_p g(\rho_s/\rho - 1)$, 从而 $W_p = 0$, 如图 5 所示。

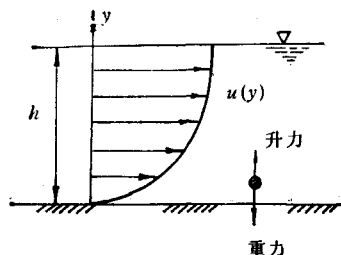


图 4 颗粒在壁面附近的受力状况

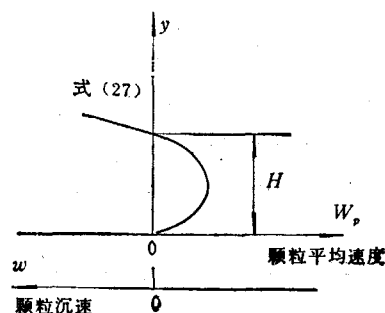


图 5 本文设定的颗粒沉速

如前所述, 颗粒 y 向脉动速度的均方根值 G_p 处处正比于式(7)定义的脉动流速均方

根值 $v'(y)$. Hinze^[11] 根据早期的实测资料认为 x 向和 z 向的脉动分速系统地趋向壁面的零值, 而 y 向分速由于连续原理的制约将与距离的平方成比例地趋向于零. Laufer^[12], Grass^[13] 和 Eckelmann^[14] 等采用了如下表达式

$$\frac{v'(y)}{v_*} = cy^+ \quad (c = 0.3) \quad (28)$$

式中 y^+ 是无量纲坐标. Nezu^[15] 建议的表达式为

$$\frac{v'(y)}{v_*} = D_* \exp\left(-\lambda \frac{y^+}{Re_*}\right) \cdot \Gamma + cy^+(1 - \Gamma) \quad (29)$$

其中 Re_* 为 Reynolds 数, $\Gamma = 1 - \exp(-y^+/B)$, B, λ, D_* 为常数. 本文中把 $v'(y)$ 在壁面附近随 y 的变化表达为

$$v'(y) = ky \quad (30)$$

k 是量纲为 $[T^{-1}]$ 的常数. 把式(27)和(30)代入(16)得到

$$\frac{dY_p}{dt} = \xi y(H - y) + Ak_y \alpha(t) \quad (31)$$

由前一节结果可知 Y_p 的概率密度 $p(y, t)$ 满足方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\xi y(H - y) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \epsilon_m A^2 k^2 y^2 \right) \right] p \right\} \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{2} \epsilon_m A^2 k^2 y^2 p \right) \end{aligned} \quad (32)$$

方程(32)只在壁面附近一个较小区域中成立. 当 $p(y, t)$ 达到稳恒时(即 $\partial p / \partial t = 0$), 方程(32)简化为

$$- \frac{d}{dy} \left\{ \left[y(H - y) + \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{2} \sigma^2 y^2 \right) \right] p \right\} + \frac{d^2}{dy^2} \left(\frac{1}{2} \sigma^2 y^2 p \right) = 0 \quad (33)$$

其中 $\sigma^2 = \epsilon_m A^2 k^2 / \xi$. 定义 $\phi(y, \theta)$ 为 $p(y)$ 的特征函数

$$\phi(y, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\theta y) p(y) dy \quad (34)$$

以 $\exp(i\theta y)$ 乘方程(33)的两边并将其从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分, 得到 ϕ 的微分方程如下

$$(H + \sigma^2)\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \left(i\theta + \frac{1}{2} \sigma^2 \theta^2 \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (35)$$

求解方程(35)得到如下的特征函数

$$\phi = \frac{C_1}{\frac{2H}{\sigma^2} + 1} \frac{2}{\sigma^2} \left(1 - \frac{\sigma^2}{2} i\theta \right)^{-\left(\frac{2H}{\sigma^2} + 1\right)} + C_2 \quad (36)$$

它所对应的概率密度分布函数为

$$p(y) = \frac{\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^{\left(\frac{2H}{\sigma^2} + 1\right)}}{\Gamma\left(\frac{2H}{\sigma^2} + 1\right)} y^{\frac{2H}{\sigma^2}} \exp\left(-\frac{2y}{\sigma^2}\right) \quad (y > 0) \quad (37)$$

其中用到了边界条件 $y = 0$ 时 $p(y) = 0$, 这一条件当升力方向是沿 y 的正方向、升力的量值超过颗粒重力 $m_p g(\rho_s/\rho - 1)$ 时成立。

由式(37)可以推知 $p(y)$ 的最大值出现在 $y = H$ 处, 如图 6 所示。该点也就是前面的推导中所规定的升力与颗粒重力恰好抵消的位置。壁面处 $0 < y < H$ 这一区域是推导过程中假定的升力大于重力的区域, 由式(37)可知升力大于重力的结果是颗粒在 $0 < y < H$ 范围内出现的机会大大减少。可以预料对于流速梯度或粒径较大的情况, H 也将较大。远离壁面处式(37)将不成立。

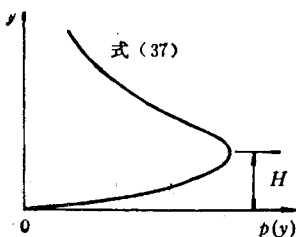
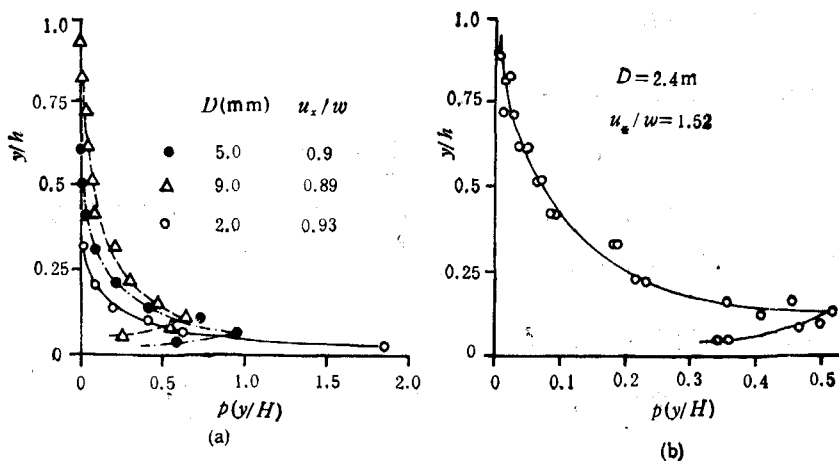


图 6 概率密度的理论解

利用式(37)可以给 Bouvard 和 Petkovic^[1] 在水槽实验中观测到的颗粒垂向位移的概率密度分布提供一种解释。他们的实验方法是把颗粒从水槽上游逐个投入水流中, 在投放点下游较远处(从而 $\partial p/\partial t = 0$) 用光电记录装置逐个记录颗粒通过某一指定断面时所处的垂向位置 y , 进而统计出颗粒垂向位移的概率密度 $p(y)$ 沿垂线的分布。图 7(a) 所示是静水沉速相近但粒径相差较大的三种圆球状颗粒的实测概率密度分布, 可见直径为 9mm 的颗粒 $p(y)$ 最大值点距底面最远, 而直径 2mm 的颗粒 $p(y)$ 最大值在壁面处(在能够量测的范围内而言)。这说明大颗粒所受升力的影响比小颗粒明显得多, 其范围也大得多。图 7(b) 是较大的流动强度下粒径 2.4mm 颗粒的 $p(y)$ 分布, 可见流速梯度增大后, 升力作用有所增强, 直径 2.4mm 的颗粒 $p(y)$ 最大值点与边壁的距离已相当于低流动强度下 9mm 颗粒情况。按前面的分析, 在 $p(y)$ 取最大值处升力与颗粒的水下重量相等, 所以可按颗粒的直径与密度计算出它们在该点所受升力的大小。



(a) $h = 7.5\text{cm}$ $u_* = 2.67\text{cm/s}$

(b) $h = 7.5\text{cm}$ $u_* = 5.41\text{cm/s}$

图 7 水槽实验中实测的概率密度分布(引自[1])

以上的分析虽然是针对水槽流动情况而言, 但也可用来解释垂直管道流动中观测到的壁面附近出现“无粒子区”^[2]的现象。所谓无粒子区, 就是颗粒浓度因升力作用而明显减少的区域。在这类流动中, 横断面上颗粒一般应具有均匀的稳恒浓度分布, 但若流速梯

度和颗粒直径较大,则在壁面附近某一范围内,升力的作用将会使颗粒产生一个离壁面而去的平均速度。仿照前面的分析可推知,在这个范围内颗粒出现的概率密度 $p(y)$ 将减小,因 $p(y)$ 在稀薄悬浮体的情况下与颗粒浓度分布函数只相差一个常数^[9],所以 $p(y)$ 的减小也就是颗粒浓度的减小。离开壁面一定距离后,升力的作用减弱到可以忽略,颗粒便不再具有垂直于壁面的平均位移速度,则此处的颗粒浓度即恢复到与管流核心区的浓度相同。垂直管流与水槽流动的不同之处在于垂直管流中壁面的法线方向上颗粒的随机位移不受重力影响,此方向上颗粒的平均位移速度完全取决于壁面附近的升力影响。

参 考 文 献

- [1] Bouvard, M. and Petkovic, S., *J. of Hydraulic Research*, **23**, 1(1985), 5—19.
- [2] Lee, S. L. and Durst, F., Sonderforschungsbereich 80, University of Karlsruhe, W. Germany, (1979), SFB/80/TE/142.
- [3] Tchen, C. M., Mean Value and Correlation Problems Connected with the Motion of Small Particles Suspended in a Turbulent Fluid, Ph. D. dissertation, Univ. of Delft (1947).
- [4] Hjelmfelt, A. T. and Mockros, L. F., *Applied Scientific Research*, **16**, (1966), 149—161.
- [5] Lee, S. L. and Durst, F., Proc. Polyphase Flow and Transport Techn. Symp., ASME, (1980), New York 223—231.
- [6] 邵学军,紊流中悬浮颗粒运动的随机理论,博士论文,清华大学(1989).
- [7] 郝柏林、于渌等主编,统计物理学进展第八章,汪培庄,随机微分方程,科学出版社(1981).
- [8] 黄祖洽、丁鄂江,输运理论,科学出版社(1987).
- [9] Saffman, P. G., *J. Fluid Mech.*, **22**, (1965), 385.
- [10] Saffman, P. G., *J. Fluid Mech.*, **31**, (1968), 624.
- [11] Hinze, J. O., Turbulence, 2nd ed., McGraw-Hill (1975), 640—641.
- [12] Laufer, J., Natl. Advisory Comm. Aeronaut Tech. Repts. No. 1174, (1954).
- [13] Grass, A. J., *J. Fluid Mech.*, **50**, 2(1971), 233—255.
- [14] Eckelmann, H., *J. Fluid Mech.*, **65**, 3(1974), 439—459.
- [15] Nezu, I., Proc. of Japanese Soc. Civil Engrs., No.261(1977), 67—76 (in Japanese).

THE DISTRIBUTION OF SOLID PARTICLES SUSPENDED IN A TURBULENT FLOW: A STOCHASTIC APPROACH

Shao Xuejun Xia Zhenhuan

(Department of Hydraulic Engineering, Tsinghua University)

Abstract The random motion of solid particles suspended in two-dimensional turbulent flow is considered in this paper. Mean values of particle velocity and displacement in a direction normal to the mean streamlines of the flow are calculated and it is found out that particle velocity v_p can be decomposed into a mean velocity $\langle v_p \rangle$ and a velocity fluctuation $v_p - \langle v_p \rangle$ where $\langle v_p \rangle$ is equal to the settling velocity of the same particle in tranquil fluid. A Langevin random differential equation for particle displacement Y_p is developed, from which a Fokker-Planck equation for the probability function $p(y, t)$ is derived on the basis of the theory of Markovian process. Thus the distribution of $p(y, t)$ is interrelated to the random motion of the particle. The lift effect to which a particle will be subject in the vicinity of the wall is taken into account and a corresponding Fokker-Planck equation is developed. Analytic solution of this equation shows that the probability density $p(y, t)$ describing particle displacement has a maximum value at $y=H$ where the perpendicular component of the resulting lift force precisely balances the particle gravity. Interpretation of experimental observations reported in the literature is given using this theory.

Key words suspended particles, turbulent diffusion, random motion, probability density distribution