

一种可以计算声波的反射和透射的层合板模型

徐 博 侯

(浙江大学力学系)

王 大 钧

(北京大学力学系)

提要 本文给出一种层合板的模型,可以用来同时计算声波在层合板上的反射与透射,并且是严格满足层间位移和横向剪应力连续条件,然后给出一系列数值例子,与相应的准确解比较. 以及说明在不同情况下声反射和透射的一些特点.

关键词 振动,层合板,反射,透射

1. 一种近似的层合板模型

1) 基本假定和位移模型

我们可以将板的两个表面上的载荷分为对称和反对称部分,对称部分引起纵振动,反对称部分引起弯曲振动. 通常板的理论忽略纵振动;但在计算声波的反射和透射时,若仅仅知道入射波的强度以及由弯曲振动所引起的两个表面上的压力差,是不能直接决定反射波和透射波的强度及相位的. 因此,我们假定

$$w = w_0(x, y, t) + zw_1(x, y, t) \quad (1)$$

此外,为保证层间剪应力连续性,我们假定^[1]

$$\tau_{xz} = \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)\phi_x(x, y, t) \quad (2)$$

$$\tau_{yz} = \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)\phi_y(x, y, t) \quad (3)$$

利用本构关系及 u, v 在层间的连续性,可以得到

$$u = u_0 + \alpha_{55}(z)\phi_x + \alpha_{56}(z)\phi_y - z \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial w_1}{\partial x} \quad (4)$$

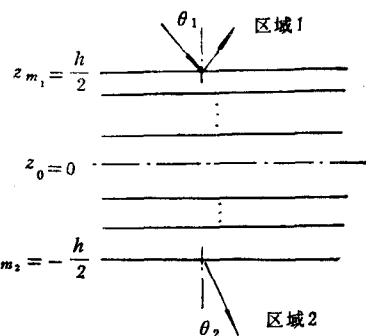


图1 层合板剖面, 座标平面位于中面

本文于 1989 年 3 月 30 日收到, 1989 年 11 月 21 日收到修改稿.

$$v = v_0 + \alpha_{56}(z)\phi_x + \alpha_{66}(z)\phi_y - z \frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{1}{2} z^2 \frac{\partial w_1}{\partial y} \quad (5)$$

这里, u_0, v_0 是中面上的平行板的位移函数, α_{kl} 是分层定义的连续函数

当 $z \geq 0$ 时

$$\alpha_{kl}(z) = \sum_{j=1}^{i-1} c_{kl}^j \left(z_j - z_{j-1} - \frac{z_j^3 - z_{j-1}^3}{3z_{m_i}^2} \right) + c_{kl}^i \left(z - z_{i-1} - \frac{z^3 - z_{i-1}^3}{3z_{m_i}^2} \right) \\ z_{i-1} \leq z \leq z_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1, \quad k, l = 5, 6 \quad (6)$$

当 $z \leq 0$ 时

$$\alpha_{kl}(z) = - \sum_{j=i+1}^{-1} c_{kl}^j \left(z_{i+1} - z_j - \frac{z_{i+1}^3 - z_j^3}{3z_{m_i}^2} \right) + c_{kl}^i \left(z_{i+1} - z - \frac{z_{i+1}^3 - z^3}{3z_{m_i}^2} \right) \\ z_{i+1} \geq z \geq z_i, \quad i = -1, -2, \dots, -m_2, \quad k, l = 5, 6 \quad (7)$$

(6), (7) 中的 c_{kl}^i 是第 i 层的剪切弹性常数, 即

$$\gamma_{xz} = c_{55}\tau_{xz} + c_{56}\tau_{yz} \\ \gamma_{yz} = c_{56}\tau_{yz} + c_{66}\tau_{yz}$$

式(6)、(7)中的求和号, 当上限小于下限时, 我们约定其值为零。当板关于中面对称时

$$\alpha_{kl}(-z) = -\alpha_{kl}(z), \quad k, l = 5, 6 \quad (8)$$

2) 平衡方程

在通常板的弯曲理论中, 还要假定 $\sigma_z = 0$; 但在这里, 这一假定将导致一种荒谬的推论: 当层合板退化成各向同性单层板时, 且入射角 $\theta_1 = 0$, 声波的反射和透射居然与弹性常数无关。这一推论是由于我们既考虑纵振动, 又假定 $\sigma_z = 0$ 自相矛盾所引起的。为此, 我们只用由基本假定导致的位移模型(1)、(4)、(5)。这样, 利用最小势能原理^[3], 可以得到平衡方程

$$E(\nabla)\{N\} - \xi_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u_0\} - [c_0] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\phi\} + \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla w_0 \\ + \frac{1}{2} \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla w_1 = 0 \quad (9)$$

$$E_1(\nabla)\{S\} - \{R\} - [c_0] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{u_0\} - [d] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\phi\} \\ + [c_1] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla w_0 + \frac{1}{2} [c_2] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla w_1 = 0 \quad (10)$$

$$F(\nabla)\{M_1\} - \xi_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \{u_0\} - \nabla \cdot [c_1] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\phi\} \\ + \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 w_0 + \frac{1}{2} \xi_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 w_1 \\ - \xi_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \xi_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - (p_1 - p_2) = 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 F(\nabla)\{M_2\} - Q_z - \frac{1}{2} \xi_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \cdot \{u_0\} - \frac{1}{2} \nabla \cdot [c_2] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\phi\} \\
 + \frac{1}{2} \xi_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 w_0 + \frac{1}{4} \xi_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 w_1 \\
 - \xi_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \xi_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \frac{h}{2} (p_1 + p_2) = 0
 \end{aligned} \quad (12)$$

这里

$$\begin{aligned}
 \{u_0\} &= [u_0 v_0]^T, \quad \{\phi\} = [\phi_x \phi_y]^T, \quad p_1, p_2 \text{ 为上下面压力,} \\
 E(\nabla) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad E_1(\nabla) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \\
 F(\nabla) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \\
 \{N\} &= \int [\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}]^T dz, \quad \{S\} = \int [\alpha \alpha]^T [\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}]^T dz, \\
 \{M_1\} &= \int z [\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}]^T dz, \quad \{M_2\} = \frac{1}{2} \int z^2 [\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}]^T dz, \\
 \{R\} &= \left(\int [\tau_{xz} \tau_{yz}] d[\alpha] \right)^T, \quad Q_z = \int \sigma_z dz, \quad [d] = \int \rho [\alpha]^2 dz, \\
 \xi_i &= \int \rho z^i dz, \quad [c_i] = \int \rho z^i [\alpha] dz, \\
 [\alpha] &= \begin{bmatrix} \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{56} & \alpha_{66} \end{bmatrix}, \quad [\alpha \alpha] = \begin{bmatrix} \alpha_{55} & 0 & 0 & \alpha_{56} \\ 0 & \alpha_{66} & \alpha_{56} & 0 \\ \alpha_{56} & \alpha_{56} & \alpha_{55} & \alpha_{66} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

上面的积分都是从 $z = -h/2$ 到 $h/2$ 。

我们可以进一步利用本构关系,将方程(9)~(12)化为位移形式的平衡方程。在这里,共有六个方程,六个未知函数 ($u_0, v_0, \phi_x, \phi_y, w_0$ 和 w_1)。不难证明,通常板的理论仅当材料对称、载荷是反对称时,才与我们的理论一致。

3) 在无限大的层合板上反射和透射

不妨假定入射波为

$$p_i = \exp(i(k_x x - \omega t)) \quad (13)$$

由文[4]可知

$$p_1 = (1 + V_1) \exp(i(k_x x - \omega t)) \quad (14)$$

$$p_2 = V_2 \exp(i(k_x x - \omega t)) \quad (15)$$

$$w_0 + \frac{h}{2} w_1 = \frac{ik_z^1}{\omega^2 \rho_1} (V_1 - 1) \exp(i(k_x x - \omega t)) \quad (16)$$

$$w_0 - \frac{h}{2} w_1 = -\frac{ik_z^2}{\omega^2 \rho_2} V_2 \exp(i(k_x x - \omega t)) \quad (17)$$

式中, ω 是频率, k_x 为切向波数, k_1^2 、 k_2^2 分别为板的上下区域中的横向波数 (k_1^2 可由 Snell 定律决定), ρ_1 、 ρ_2 为上下区域介质的密度, V_1 、 V_2 为复的反射系数和透射系数。将(14)–(17)与(9)–(12)联立, 即可决定 V_1 、 V_2 。

2. 数值例子

我们取两个数值例子。这两个例子中每层材料常数为

$$E_L = 200\text{GPa}, E_T = 5\text{GPa}, G_{LT} = 2\text{GPa}, \nu_{LT} = 0.25,$$

$$\nu_{TT} = 0.3, \rho = 1500\text{kg/m}^3.$$

其它参数列在下表中。

表 1 单位: 国际单位 ($\text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{sec}$)

例号层厚	层数与铺设方向	ρ_1	ρ_2	c_1	c_2
1 0.005	90°/0°/90°/0°/0°/90°/0°/90°	1	1	340	340
2 0.002	90°/0°/0°/90°	1000	1	1450	313

表 2 八层板的透射系数 V_i (例 1)

θ_1	ω	本文解	准确解
0°	1	0.9923 + i0.0876	0.9923 + i0.0876
	10 ²	0.0127 + i0.1119	0.0127 + i0.1119
	10 ⁴	i0.0011	i0.0011
	10 ⁶	0.0	i0.0003
30°	1	0.9942 + i0.0760	0.9942 + i0.0761
	10 ²	0.0169 + i0.1287	0.0169 + i0.1287
	10 ⁴	0.0001 - i0.0075	0.0001 + i0.0095
	10 ⁶	0.0	0.0

表 3 两侧介质不同时的反射和透射(例 2)

θ_1	ω	V_1	V_2
0°	1	-0.9996	0.0004
	10 ²	-0.9996 - i0.0017	0.0004
	10 ⁴	-0.9860 - i0.1644	0.0004
	10 ⁶	-0.1931 - i0.9809	-0.0002 - i0.0002
30°	1	-0.9996	0.0004
	10 ²	-0.9996 - i0.0014	0.0004
	10 ⁴	-0.9894 - i0.1426	0.0004
	10 ⁶	-0.2420 - i0.9701	-0.0002 - i0.0001

每个例子都计算 $\theta_1 = 0^\circ, 30^\circ$ 及 $\omega = 1, 10^2, 10^4, 10^6$ 共 8 种情况, 分别列在表 2, 表 3 中。

在表 2 中还列入基于三维弹性理论准确解。从所列数据可见, 本文所提出的近似模型有极高的精度。从表 3 可见, 当声波由水中入射、穿过层合板、透射到空气中去时,

极大部分能量被反射;不仅如此,当 ω 不太大时反射波的相位接近 180° 。当声波由空气到板、再到水中的情形,刚好相反(表中被省略)。

参 考 文 献

- [1] 徐博侯、谢贻权、王清,一种反映横向剪应力分布的层合板模型,复合材料学报,5(4) (1988), pp. 1—9.
- [2] Ramakrishnan, J. V. and Koval, L. R., A finite element method for sound transmission through laminated composite plates, *J. of Sound and Vibration*, 112(3), (1987), pp. 433—446.
- [3] 胡海昌,弹性力学变分原理及其应用,科学出版社,北京(1981).

A MODEL FOR LAMINATED PLATES USED TO CALCULATE SOUND REFLECTION AND TRANSMISSION

Xu Bohou

(Dept. of Mechanics, Zhejiang Univ., Hangzhou)

Wang Dajun

(Dept. of Mechanics, Peking Univ., Beijing)

Abstract A new model for laminated plates is proposed in this paper, which might be used to calculate simultaneously sound reflection and transmission through the plates. Besides, this model satisfies the continuity conditions of the displacements and transverse shearing stresses at the interfaces. At the end some numerical examples are given.

Key words laminated plates, reflection, transmission