

热激活断裂统计理论

邢修三

(北京理工大学应用物理系, 100081)

Krausz, A. S.

(渥太华大学机械工程系)

提要 本文研究了原子键机理与宏观特性相结合的热激活断裂非平衡统计理论, 统一导出了微裂纹分布函数、断裂几率、可靠性、断裂寿命分布函数和平均断裂寿命。

关键词 热激活断裂, 微裂纹随机长大方程, 原子键机理, 分布函数, 平均断裂寿命

一、引言

热激活断裂理论的主要目的, 是要从微观机理出发研究热激活断裂的宏观规律。关于热激活断裂的动力学特性, Жуклов 早有系统的实验研究^[1,2], 只是至今缺乏定量的理论。本文试图从微裂纹长大的原子键机理^[3]出发, 结合非平衡统计断裂理论方法^[4,5], 推导出描述宏观特性的热激活断裂理论。

二、长大方程和原子键机理

热激活断裂过程的物理图象可看成与脆性和疲劳断裂的相似^[6]。由于热涨落和材料微观结构背景涨落的存在, 微裂纹演化过程可看成是个随机过程, 描述这种随机长大过程的微分方程为^[4]

$$\frac{\partial P(C_0, C; t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial C} \left\{ \left[A\beta(C) + \frac{Q}{2}\beta(C) \frac{\partial \beta(C)}{\partial C} \right] P(C_0, C; t) \right\} + \frac{Q}{2} \frac{\partial^2}{\partial C^2} [\beta^2(C) P(C_0, C; t)] \quad (1)$$

其中几率密度函数 $P(C_0, C; t)dC$ 为 $t=0$ 起始长度为 C_0 的微裂纹到 t 时长大到 C 和 $C+dC$ 间的几率, $A\beta(C)$ 为迁移长大速率, Q 为涨落长大系数。当由下述的原子键机理求得 $A, \beta(C)$ 和 Q 时, 就可由式(1)解得 $P(C_0, C; t)$ 。

根据微裂纹长大的原子键机理, 如图1所示, 在外应力和热激活的双重作用下, 微裂纹顶端前的原子键被破裂, 原子排列构象将从图1(a)变成图1(b), 微裂纹顶端前进了一个或几个原子距离。微裂纹的长大就是由这样一系列原子键重复破裂的步骤组成的。

本文于1989年7月24日收到, 1990年2月8日收到修改稿。

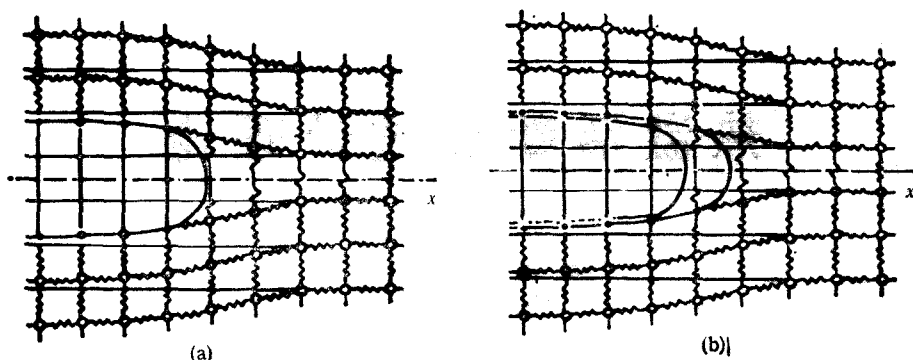


图 1

根据这种原子键断裂机理,微裂纹长大速率为^[3]

$$V(C) = \nu_0 L \exp\left(-\frac{\nu - w}{kT}\right) \quad (2)$$

其中 ν_0 为原子本征振动频率, k 为波尔兹曼常数, T 为温度, ν 为破坏原子键所需的激活能, $L = nb$, b 为原子间距, n 为 1, 2, 3, … 等的整数,

$$w = \begin{cases} \alpha_V \sigma & (3A) \\ \alpha_A C \sigma & (3B) \end{cases}$$

为外应力 σ 所作的功, α_V 为激活体积, α_A 为激活面积. 下面将会看到, 由于 (3A) 和 (3B) 的差别, 后面的一系列结果都将有所不同, 对应的结果将分别以 (…A) 和 (…B) 表示之.

由 (2)、(3A)、(3B) 式知^[4]

$$\left. \begin{aligned} A &= \nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \\ B &= L \exp\left(\frac{\alpha_V \sigma}{kT}\right) \\ Q &\simeq \eta^2 A = \eta^2 \nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \\ \eta^2 &= \left(\frac{\alpha_V \sigma}{kT}\right)^2 \frac{\langle \Delta \alpha_V^2 \rangle}{\alpha_V^2} + \left(\frac{\nu - \alpha_V \sigma}{kT}\right)^2 \frac{\langle \Delta T^2 \rangle}{T^2} \end{aligned} \right\} \quad (4A)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \\ B(C) &= L \exp\left(\frac{\alpha_A C \sigma}{kT}\right) \\ Q &\simeq \eta^2 A = \eta^2 \nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \\ \eta^2 &= \left(\frac{\alpha_A C \sigma}{kT}\right)^2 \frac{\langle \Delta \alpha_A^2 \rangle}{\alpha_A^2} + \left(\frac{\nu - \alpha_A C \sigma}{kT}\right)^2 \frac{\langle \Delta T^2 \rangle}{T^2} \end{aligned} \right\} \quad (4B)$$

三、微裂纹分布函数

现在根据原子键断裂机理来求出微裂纹的几率密度函数 $P(C_0, C; t)$ 。将(4A)代入(1)式, 得

$$P(C_0, C; t) dC = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2\nu_0 L^2 t \exp\left(-\frac{\nu - 2\alpha_V \sigma}{kT}\right)}} \times \exp\left\{-\frac{\left[C - C_0 - \nu_0 L t \exp\left(-\frac{\nu - \alpha_V \sigma}{kT}\right)\right]^2}{2\eta^2\nu_0 L^2 t \exp\left(-\frac{\nu - 2\alpha_V \sigma}{kT}\right)}\right\} dC \quad (5A)$$

可见这时 $P(C_0, C; t)$ 应是微裂纹长度 C 的正态分布函数。

将(4B)代入(1)式, 得

$$P(C_0, C; t) dC = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2\nu_0 L^2 t \exp\left(-\frac{\nu - 2\alpha_A C \sigma}{kT}\right)}} \times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{kT}{\alpha_A \sigma L} \left[\exp\left(-\frac{\alpha_A C_0 \sigma}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_A C \sigma}{kT}\right)\right] - \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)\right]^2}{2\eta^2\nu_0 L^2 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}\right\} dC \quad (5B)$$

这时 $P(C_0, C; t)$ 是微裂纹长度 C 的负指数正态分布函数。

若上面讨论的 $P(C, t) dC$ 看成是微裂纹的空间几率密度函数, 则微裂纹的时间几率密度函数应为

$$P(t, C) dt = \frac{P(C, t) dt}{\int_0^\infty P(C, t) dt} \quad (6)$$

它定义为从无限长的时间范围 $(0, \infty)$ 内求得长度为 C 的微裂纹存在于 t 和 $t + dt$ 区间的几率, 显然, $P(t, C) dt$ 满足归一化条件 $\int_0^\infty P(t, C) dt = 1$, 其物理意义是任何长度 C 的微裂纹总是存在于无限长的时间内。

将(5A)和(5B)代入(6)式, 则得

$$P(t, C) dt = \sqrt{\frac{\nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}{2\pi\eta^2 t}} \times \exp\left\{-\frac{\left[C - C_0 - \nu_0 L t \exp\left(-\frac{\nu - \alpha_V \sigma}{kT}\right)\right]^2}{2\eta^2\nu_0 L^2 t \exp\left(-\frac{\nu - 2\alpha_V \sigma}{kT}\right)}\right\} dt \quad (7A)$$

$$P(t, C)dt = \sqrt{\frac{\nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}{2\pi\eta^2 t}} \times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{kT}{\alpha_A \sigma L} \left[\exp\left(-\frac{\alpha_A C_0 \sigma}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_A C \sigma}{kT}\right)\right] - \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)\right]^2}{2\eta^2 \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}\right\} dt \quad (7B)$$

(7A) (7B) 就是我们基于原子键断裂机理求得的微裂纹的时间几率密度函数。

四、断 裂 几 率

现在来讨论材料的断裂几率。与脆性和疲劳断裂类似^[4], 整个热激活断裂过程原则上可分为两阶段, 即大量微裂纹的成核长大阶段和单个主裂纹的传播阶段。前者是低速阶段, 后者是高速阶段。由于裂纹传播是以弹性波的速率在固体中进行的, 只要主裂纹开始传播, 断裂将立即发生。因此, 材料的断裂寿命主要由低速过程决定的, 高速过程所消耗的时间可以略去。根据 Griffith 理论, 裂纹的传播条件应为^[4]

$$C_k = \frac{G_{lc} E}{\pi(1-\mu^2)\sigma^2} \quad (8)$$

其中 E 为杨氏模量, μ 为泊松比, G_{lc} 为裂纹扩展力。在微裂纹长大的原子键机理中, 目前尚不知以什么样的传播条件取代(8)式, 因而仍用(8)式。

根据确定论观点, (8)式可看成裂纹传播的充要条件。但根据概率论观点, 当条件(8)满足时, 裂纹只有某种几率发生传播。设 $P(\sigma, t)d\sigma$ 为在延时应力作用 t 时一个裂纹在应力 σ 和 $\sigma + d\sigma$ 间传播的几率, 根据概率论, 应有 $P(\sigma, t)d\sigma = P(C, t)|dC|$, 将 (5A) (5B) (8) 式代入此式, 得

$$P(\sigma, t)d\sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi^3 \eta^2 \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}} \cdot \frac{G_{lc} E}{(1-\mu^2)\sigma^2 L \exp\left(\frac{\alpha_V \sigma}{kT}\right)} \times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{lc} E}{\pi(1-\mu^2)\sigma^2} - C_0 - \nu_0 L t \exp\left(-\frac{\nu - \alpha_V \sigma}{kT}\right)\right]^2}{2\eta^2 \nu_0 L^2 t \exp\left(-\frac{\nu - 2\alpha_V \sigma}{kT}\right)}\right\} d\sigma \quad (9A)$$

$$P(\sigma, t)d\sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi^3 \eta^2 \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}} \times \frac{G_{lc} E}{(1-\mu^2)\sigma^2 L \exp\left(\frac{\alpha_A G_{lc} E}{\pi(1-\mu^2)kT\sigma}\right)}$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{\frac{kT}{\alpha_A \sigma L} \left[\exp \left(- \frac{\alpha_A C_0 \sigma}{kT} \right) - \exp \left(- \frac{\alpha_A G_{1c} E}{\pi(1-\mu^2)kT\sigma} \right) \right] - v_0 t \exp \left(- \frac{v}{kT} \right)}{2\eta^2 v_0 t \exp \left(- \frac{v}{kT} \right)} \right\} \quad (9B)$$

将(8)式代入(7A)(7B), 得

$$P(t, \sigma) dt = \sqrt{\frac{v_0 \exp \left(- \frac{v}{kT} \right)}{2\pi^2 \eta^2 t}} \times \exp \left\{ - \frac{\left[\frac{G_{1c} E}{\pi(1-\mu^2)\sigma^2} - C_0 - v_0 t L \exp \left(- \frac{v - \alpha_v \sigma}{kT} \right) \right]^2}{2\eta^2 v_0 t L^2 \exp \left(- \frac{v - 2\alpha_v \sigma}{kT} \right)} \right\} dt \quad (10A)$$

$$P(t, \sigma) dt = \sqrt{\frac{v_0 \exp \left(- \frac{v}{kT} \right)}{2\pi^2 \eta^2 t}} \times \exp \left\{ - \frac{\left[\frac{kT}{\alpha_A \sigma L} \left[\exp \left(- \frac{\alpha_A C_0 \sigma}{kT} \right) - \exp \left(- \frac{\alpha_A G_{1c} E}{\pi(1-\mu^2)kT\sigma} \right) \right] - v_0 t \exp \left(- \frac{v}{kT} \right) \right]^2}{2\eta^2 v_0 t \exp \left(- \frac{v}{kT} \right)} \right\} dt \quad (10B)$$

通常, 材料中不是存在一个裂纹而是大量裂纹。设 V 是材料的体积, M 是材料单位体积中能传播的裂纹数目, $M_1 = MV$ 是材料中的微裂纹总数目, 根据导致断裂的最弱链模型(或叫最小强度原理), 则材料经延时应力作用 t 时于应力 0 和 σ 间发生断裂的几率为^[4]

$$P_f(\sigma) = 1 - \left[1 - \int_0^\sigma P(\sigma, t) d\sigma \right]^{M_1} \simeq 1 - \exp \left[-M_1 \int_0^\sigma P(\sigma, t) d\sigma \right] \quad (11)$$

$P_f(\sigma)$ 可直接叫做应力的断裂几率。显然, $P_f(\sigma = 0) = 0$, $P_f(\sigma \rightarrow \infty) = 1$, 其物理意义为: 任何材料不受外应力作用时总不会断裂, 而在无限大的外应力作用下总一定断裂。

同样, 材料在延时应力 σ 的作用下于 0 和 t 时间内发生断裂的几率为

$$P_f(t) = 1 - \left[1 - \int_0^t P(t, \sigma) dt \right]^{M_1} \simeq 1 - \exp \left[-M_1 \int_0^t P(t, \sigma) dt \right] \quad (12)$$

$P_f(t)$ 可直接叫时间的断裂几率。显然, 当 σ 大于某个临界阈应力时, 将有 $P_f(t = 0) = 0$, $P_f(t \rightarrow \infty) = 1$, 其物理意义为: 当外应力未作用时材料总不会发生断裂, 而当外应力大于某个临界应力时, 经无限长的时间作用, 材料总要发生断裂, 即任何材料的断裂

寿命总是有限的.

将 (9A)、(9B) 式代入(11)式,得应力断裂几率的表示式为

$$P_f(\sigma) \simeq 1 - \exp \left\{ -MV \sqrt{\frac{2}{\pi^3 \eta^2 \nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu - 2\alpha_V \sigma}{kT}\right)}} \right. \\ \cdot \frac{G_{1c} E}{(1 - \mu^2) L} \int_0^\sigma \frac{1}{\sigma^3 \exp\left(\frac{\alpha_V \sigma}{kT}\right)} \\ \times \exp \left\{ -\frac{\left[\frac{G_{1c} E}{\pi(1 - \mu^2) \sigma^2} - C_0 - \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu - \alpha_V \sigma}{kT}\right) \right]^2}{2\eta^2 \nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu - 2\alpha_V \sigma}{kT}\right)} \right\} d\sigma \left. \right\} \quad (13A)$$

$$P_f(\sigma) \simeq 1 - \exp \left\{ -MV \sqrt{\frac{2}{\pi^3 \eta^2 \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu - 2\alpha_V \sigma}{kT}\right)}} \right. \\ \cdot \frac{G_{1c} E}{(1 - \mu^2)} \int_0^\sigma \frac{1}{\sigma^3 \exp\left(\frac{\alpha_A G_{1c} E}{\pi(1 - \mu^2) kT \sigma}\right)} \\ \times \exp \left\{ -\frac{\left[\frac{kT}{\alpha_A \sigma L} \left[\exp\left(-\frac{\alpha_A C_0 \sigma}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_A G_{1c} E}{\pi(1 - \mu^2) kT \sigma}\right) \right] - \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right) \right]^2}{2\eta^2 \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)} \right\} d\sigma \left. \right\} \quad (13B)$$

将 (10A)、(10B) 代入(12)式,得时间断裂几率的表示式为

$$P_f(t) \simeq 1 - \exp \left\{ -MV \sqrt{\frac{\nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}{2\pi^2 \eta^2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right. \\ \times \exp \left\{ -\frac{\left[\frac{G_{1c} E}{\pi(1 - \mu^2) \sigma^2} - C_0 - \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu - \alpha_V \sigma}{kT}\right) \right]^2}{2\eta^2 \nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu - 2\alpha_V \sigma}{kT}\right)} \right\} d\tau \left. \right\} \quad (14A)$$

$$P_f(t) \simeq 1 - \exp \left\{ -MV \sqrt{\frac{\nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}{2\pi^2 \eta^2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right.$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{\left[\frac{kT}{\alpha_A \sigma L} \left[\exp \left(- \frac{\alpha_A C_0 \sigma}{kT} \right) - \exp \left(- \frac{\alpha_A G_{1c} E}{\pi (1 - \mu^2) kT \sigma} \right) \right] - v_0 t \exp \left(- \frac{v}{kT} \right) \right]^2}{2 \eta^2 v_0 t \exp \left(- \frac{v}{kT} \right)} \right\} dt \quad (14B)$$

由 (13A) — (14B) 式可见, 断裂几率 $P_f(\sigma)$ 和 $P_f(t)$ 是随外应力 σ 、温度 T 、时间 t 、材料特征量 U 、 $\alpha_A(\alpha_V)$ 、 G_{1c} 、 E 及体积 V 等变化的, 在同一外应力 σ 、温度 T 、时间 t 作用下, 由于各种材料特微量的不同, 他们的断裂几率也是不同的。

五、可 靠 性

现在来讨论固体材料在外应力和热激活双重作用下的可靠性。由于存在着应力和时间两种断裂几率, 故亦可引入两种对应的可靠性, 其精确定义如下。

A. 固体材料在延时应力作用 t 时于应力 0 和 σ 间仍能安全承载而不发生断裂的几率。

B. 固体材料在延时应力 σ 的作用下于 0 和 t 时间内仍能安全承载而不发生断裂的几率。

简言之, 前者叫应力可靠性, 以 $R(\sigma)$ 表示之, 后者叫时间可靠性, 以 $R(t)$ 表示之。

按此定义及 (11)、(12) 式, 应有

$$R(\sigma) = 1 - P_f(\sigma) \simeq \exp \left[-MV \int_0^\sigma P(\sigma, t) d\sigma \right] \quad (15)$$

$$R(t) = 1 - P_f(t) \simeq \exp \left[-MV \int_0^t P(t, \sigma) dt \right] \quad (16)$$

显然, $R(\sigma = 0) = 1$, $R(\sigma \rightarrow \infty) = 0$, 其物理意义为: 固体材料在无外应力作用时总是安全可靠的, 而当外应力增大到无限大时总要发生断裂, 即固体材料不再安全可靠。同样, 当 σ 大于某个临界阈应力时, 将有 $R(t = 0) = 1$, $R(t \rightarrow \infty) = 0$, 其物理意义为: 当外应力未作用时材料总是安全可靠的, 而当外应力大于某个临界值时, 经无限长的延时作用, 材料总要发生断裂, 不再安全可靠。

将 (13A)、(13B) 代入 (15) 式, 得应力可靠性的表达式

$$R(\sigma) \simeq \exp \left\{ -MV \sqrt{\frac{2}{\pi^3 \eta^2 v_0 t L^2 \exp \left(- \frac{v - 2\alpha_V \sigma}{kT} \right)}} \right. \\ \times \frac{G_{1c} E}{(1 - \mu^2) L} \int_0^\sigma \frac{1}{\sigma^3 \exp \left(\frac{\alpha_V \sigma}{kT} \right)} \\ \left. \times \exp \left\{ - \frac{\left[\frac{G_{1c} E}{\pi (1 - \mu^2) \sigma^2} - C_0 - v_0 t L \exp \left(- \frac{v - \alpha_V \sigma}{kT} \right) \right]^2}{2 \eta^2 v_0 t L^2 \exp \left(- \frac{v - 2\alpha_V \sigma}{kT} \right)} \right\} d\sigma \right\} \quad (17A)$$

$$\begin{aligned}
 R(\sigma) \simeq & \exp \left\{ -MV \sqrt{\frac{2}{\pi^3 \eta^2 v_0 t \exp\left(-\frac{v}{kT}\right)}} \right. \\
 & \times \frac{G_{1c} E}{(1-\mu^2)L} \int_0^\sigma \frac{1}{\sigma^3 \exp\left(-\frac{\alpha_A G_{1c} E}{\pi(1-\mu^2)kT\sigma}\right)} \\
 & \times \exp \left\{ -\left[\frac{kT}{\alpha_A \sigma L} \left[\exp\left(-\frac{\alpha_A C_0 \sigma}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_A G_{1c} E}{\pi(1-\mu^2)kT\sigma}\right) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - v_0 t \exp\left(-\frac{v}{kT}\right) \right]^2 / 2\eta^2 v_0 t \exp\left(-\frac{v}{kT}\right) \right] \right\} d\sigma \right\} \quad (17B)
 \end{aligned}$$

将 (14A)、(14B) 式代入 (16) 式, 得时间可靠性的表达式为

$$\begin{aligned}
 R(t) \simeq & \exp \left\{ -MV \sqrt{\frac{v_0 \exp\left(-\frac{v}{kT}\right)}{2\pi^2 \eta^2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right. \\
 & \times \exp \left\{ -\left[\frac{G_{1c} E}{\pi(1-\mu^2)\sigma^2} - C_0 - v_0 t L \exp\left(-\frac{v - \alpha_v \sigma}{kT}\right) \right]^2 \right. \\
 & \left. \left. \left. \frac{2\eta^2 v_0 t L^2 \exp\left(-\frac{v - 2\alpha_v \sigma}{kT}\right)}{2\eta^2 v_0 t L^2 \exp\left(-\frac{v - 2\alpha_v \sigma}{kT}\right)} \right] \right\} d\tau \right\} \quad (18A)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R(t) \simeq & \exp \left\{ -MV \sqrt{\frac{v_0 \exp\left(-\frac{v}{kT}\right)}{2\pi^2 \eta^2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \right. \\
 & \times \exp \left\{ -\left[\frac{kT}{\alpha_A \sigma L} \left[\exp\left(-\frac{\alpha_A C_0 \sigma}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_A G_{1c} E}{\pi(1-\mu^2)kT\sigma}\right) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - v_0 t \exp\left(-\frac{v}{kT}\right) \right]^2 / 2\eta^2 v_0 t \exp\left(-\frac{v}{kT}\right) \right] \right\} d\tau \right\} \quad (18B)
 \end{aligned}$$

与断裂几率相似, 可靠性 $R(\sigma)$ 和 $R(t)$ 亦是随外应力 σ 、温度 T 、时间 t 及材料特征量 U 、 $\alpha_A(\alpha_v)$ 、 G_{1c} 、 E 及体积 V 等变化的。

为了给出可靠性的解析表达式, 需将 (17A)–(18B) 作进一步近似化简。

我们先求 (17A)、(17B) 的近似式, 由 (9A)(9B) 式得

$$\int_0^\sigma P(\sigma, t) d\sigma \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-x^2) dx \simeq \frac{1}{\theta x^{1/2}} \quad (19)$$

其中

$$x = \frac{\phi(\sigma) - At}{\sqrt{2Q_t}}, \quad \phi(\sigma) = \int_{c_0}^{\sigma} \frac{dC}{\beta} \quad (20)$$

(19) 式后一近似成立的条件是 $x \geq 2.5$, 其中 $\theta = 2 \times 10^{-4}$ 。

将 (19)(20) 代入 (17A)、(17B) 式, 得应力可靠性的近似表达式为

$$R(\sigma) \simeq \exp \left\{ -\frac{MV}{\theta} \left[\frac{\sqrt{2\eta^2\nu_0 t} \pi(1-\mu^2)L\sigma^2 \exp\left(\frac{\alpha_V\sigma - \frac{\nu}{2}}{kT}\right)}{G_{1c}E} \right]^6 \right\} \quad (21A)$$

$$R(\sigma) \simeq \exp \left\{ -\frac{MV}{\theta} \left[\frac{\sqrt{2\eta^2\nu_0 t} \alpha_A L \sigma \exp\left(\frac{\alpha_A C_0 \sigma - \frac{\nu}{2}}{kT}\right)}{kT} \right]^6 \right\} \quad (21B)$$

显然, 此近似式仍满足物理要求 $R(\sigma=0)=1$ 和 $R(\sigma \rightarrow \infty)=0$

现再求 (18A)、(18B) 的近似式. 由 (10A)、(10B) 式得

$$\begin{aligned} \int_0^t P(t, \sigma) dt &= \frac{A}{\sqrt{2\pi Q}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left\{ -\frac{[\Phi(\sigma) - At]^2}{2Qt} \right\} dt \\ &\simeq \frac{A\phi(\sigma)}{\sqrt{\pi} Q} \int_x^\infty \frac{1}{x^2} \exp(-x^2) dx \end{aligned} \quad (22)$$

其中 x 见 (20) 式. 当 $x \geq 3$ 时, 得

$$\int_x^\infty \frac{1}{x^2} \exp(-x^2) dx \simeq \frac{1}{\theta_1 x^{30}} \quad (23)$$

其中 $\theta_1 = 10^{-10}$. 将 (22)(23) 式代入 (18A)、(18B), 则得时间可靠性的近似表达式为

$$\begin{aligned} R(t) &\simeq \exp \left\{ -\frac{MVG_{1c}E}{\pi^{3/2}\eta^2\theta_1(1-\mu^2)L\sigma^2} \exp\left(-\frac{\alpha_V\sigma}{kT}\right) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\sqrt{2\eta^2\nu_0 t} \pi(1-\mu^2)L\sigma^2 \exp\left(\frac{\alpha_V\sigma - \frac{\nu}{2}}{kT}\right)}{G_{1c}E} \right\}^{30} \end{aligned} \quad (24A)$$

$$\begin{aligned} R(t) &\simeq \exp \left\{ -\frac{MVkT}{\sqrt{\pi} \eta^2\theta_1\alpha_A\sigma L} \exp\left(-\frac{\alpha_A C_0\sigma}{kT}\right) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{2\eta^2\nu_0 t \alpha_A L \sigma \exp\left(\frac{\alpha_A C_0\sigma - \frac{\nu}{2}}{kT}\right)}{kT} \right\}^{30} \end{aligned} \quad (24B)$$

利用后面的平均断裂寿命 τ 的 (32)、(33A)、(33B) 式, 则时间可靠性 (24A)、(24B) 式可写成

$$R(t) \simeq \exp \left\{ -\left[\Gamma\left(\frac{16}{15}\right) \frac{t}{\tau} \right]^{15} \right\} \quad (25)$$

其中 Γ 为 Tamma 函数.

这样, 时间可靠性 $R(t)$ 仅由其延时应力作用的时间 t 及材料平均断裂寿命 τ 的比值即 t/τ 决定, t/τ 愈大, $R(t)$ 愈小. 至此, 若我们将 t/τ 看成是损伤率, 则可抛开微观机理而将热激活断裂过程笼统地看成是一种损伤过程, 损伤率愈大, 时间可靠性愈小.

应该指出,关于热激活断裂的可靠性问题,迄今实验资料甚少,因而本文所得的结果,只能看成是一种理论预言。

六、断裂寿命分布

由于微观结构(包括成分和缺陷)的不均匀性及热涨落的动态性,即使实际材料的宏观成分、工艺条件、几何形状和尺寸相同,每个试样都有自己的断裂强度(当断裂寿命相同时)和断裂寿命(当断裂强度相同时),它们是互不相同的,遵守着确定的统计分布规律。强度统计分布函数 $w_I(\sigma)d\sigma$ 和寿命统计分布函数 $w_I(t)dt$ 就是描述这种统计分布规律的。

由(11)式得断裂强度的统计分布函数为

$$w_I(\sigma)d\sigma = \frac{\partial P_I(\sigma)}{\partial \sigma} d\sigma \simeq M_1 \exp \left[-M_1 \int_0^\sigma P(\sigma, t) d\sigma \right] P(\sigma, t) d\sigma \quad (26)$$

它表示材料经延时效力作用 t 时于应力 σ 和 $\sigma + d\sigma$ 间发生断裂的几率。显然, $w_I(\sigma)d\sigma$ 满足归一化条件 $\int_0^\infty w_I(\sigma)d\sigma = 1$ 。

由(12)式得断裂寿命的统计分布函数为

$$w_I(t)dt = \frac{\partial P_I(t)}{\partial t} dt \simeq M_1 \exp \left[-M_1 \int_0^t P(t, \sigma) dt \right] P(t, \sigma) dt \quad (27)$$

它表示材料在延时效力 σ 作用下于 t 和 $t + dt$ 时间间隔内发生断裂的几率。显然, $w_I(t)dt$ 满足归一化条件。

将(9A)、(9B)代入(26)式,则得断裂强度统计分布函数的表达式为

$$\begin{aligned} w_I(\sigma)d\sigma &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi^3 \eta^2 \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}} \cdot \frac{MVG_{1c}E}{(1-\mu^2)\sigma^3 L \exp\left(\frac{\alpha_V \sigma}{kT}\right)} \\ &\times \exp \left\{ -MV \sqrt{\frac{2}{\pi^3 \eta^2 \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}} \right. \\ &\quad \cdot \frac{G_{1c}E}{(1-\mu^2)L} \int_0^\sigma \frac{1}{\sigma^3 \exp\left(\frac{\alpha_V \sigma}{kT}\right)} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{\left[\frac{G_{1c}E}{\pi(1-\mu^2)\sigma^2} - C_0 - \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu - \alpha_V \sigma}{kT}\right) \right]^2}{2\eta^2 \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu - 2\alpha_V \sigma}{kT}\right)} \right\} d\sigma \Bigg\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{\left[\frac{G_{1c}E}{\pi(1-\mu^2)\sigma^2} - C_0 - \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu - \alpha_V \sigma}{kT}\right) \right]^2}{2\eta^2 \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu - 2\alpha_V \sigma}{kT}\right)} \right\} d\sigma \quad (28A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_f(\sigma) d\sigma \simeq & \sqrt{\frac{2}{\pi^3 \eta^2 \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}} \cdot \frac{MVG_{1c}E}{(1-\mu^2)L\sigma^3 \exp\left(\frac{\alpha_A G_{1c}E}{\pi(1-\mu^2)kT\sigma}\right)} \\
& \times \exp\left\{-MV \sqrt{\frac{2}{\pi^3 \eta^2 \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}} \cdot \frac{G_{1c}E}{(1-\mu^2)L}\right. \\
& \times \int_0^\sigma \frac{1}{\sigma^3 \exp\left(\frac{\alpha_A G_{1c}E}{\pi(1-\mu^2)kT\sigma}\right)} \\
& \times \exp\left\{-\left[\frac{kT}{\alpha_A \sigma L} \left[\exp\left(-\frac{\alpha_A C_0 \sigma}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_A G_{1c}E}{\pi(1-\mu^2)kT\sigma}\right)\right]\right.\right. \\
& \left.\left.- \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)\right]^2 / 2\eta^2 \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)\right\} d\sigma\bigg\} \\
& \times \exp\left\{-\left[\frac{kT}{\alpha_A \sigma L} \left[\exp\left(-\frac{\alpha_A C_0 \sigma}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_A G_{1c}E}{\pi(1-\mu^2)kT\sigma}\right)\right]\right.\right. \\
& \left.\left.- \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)\right]^2 / 2\eta^2 \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)\right\} d\sigma \quad (28B)
\end{aligned}$$

将 (10A) (10B) 式代入 (27) 式, 则得断裂寿命统计分布函数的表达式为

$$\begin{aligned}
w_f(t) dt \simeq & MV \sqrt{\frac{\nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}{2\pi^2 \eta^2 t}} \exp\left\{-MV \sqrt{\frac{\nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}{2\pi^2 \eta^2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}}\right. \\
& \times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{1c}E}{\pi(1-\mu^2)\sigma^2} - C_0 - \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu - \alpha_V \sigma}{kT}\right)\right]^2}{2\eta^2 \nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu - 2\alpha_V \sigma}{kT}\right)}\right\} dt\bigg\} \\
& \times \exp\left\{-\frac{\left[\frac{G_{1c}E}{\pi(1-\mu^2)\sigma^2} - C_0 - \nu_0 t L \exp\left(-\frac{\nu - \alpha_V \sigma}{kT}\right)\right]^2}{2\eta^2 \nu_0 t L^2 \exp\left(-\frac{\nu - 2\alpha_V \sigma}{kT}\right)}\right\} dt \quad (29A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_f(t) dt \simeq & MV \sqrt{\frac{\nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}{2\pi^2 \eta^2 t}} \exp\left\{-MV \sqrt{\frac{\nu_0 \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)}{2\pi^2 \eta^2}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t}}\right. \\
& \times \exp\left\{-\left[\frac{kT}{\alpha_A \sigma L} \left[\exp\left(-\frac{\alpha_A C_0 \sigma}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha_A G_{1c}E}{\pi(1-\mu^2)kT\sigma}\right)\right]\right.\right. \\
& \left.\left.- \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)\right]^2 / 2\eta^2 \nu_0 t \exp\left(-\frac{\nu}{kT}\right)\right\} dt\bigg\}
\end{aligned}$$

$$\times \exp \left\{ - \left[\frac{kT}{\alpha_A \gamma L} \left[\exp \left(- \frac{\alpha_A C_0 \sigma}{kT} \right) - \exp \left(- \frac{\alpha_A G_{1c} E}{\pi (1 - \mu^2) kT \sigma} \right) \right] - \nu_0 t \exp \left(- \frac{\nu}{kT} \right) \right]^2 / 2 \eta^2 \nu_0 t \exp \left(- \frac{\nu}{kT} \right) \right\} dt \quad (29B)$$

由 (28A)—(29B) 可见, 强度和寿命的统计分布函数同样是随应力 σ 、温度 T 、时间 t 及材料特征量 U 、 $\alpha_V(\alpha_A)$ 、 G_{1c} 、 E 及体积 V 等决定的。

利用可靠性近似(25)式, 材料热激活断裂寿命的统计分布函数可进一步近似简化为

$$w_f(t) dt \simeq 15 \left[\frac{\Gamma \left(\frac{16}{15} \right)}{\tau} \right]^{15} t^{14} \exp \left\{ - \left[\Gamma \left(\frac{16}{15} \right) \frac{t}{\tau} \right]^{15} \right\} dt \quad (30)$$

这正是 Weibull 统计分布, 即热激活断裂寿命近似地遵守 Weibull 统计规律。应该指出, 人们已熟知疲劳寿命的统计分布规律, 但热激活断裂寿命到底遵守什么样的统计分布规律, 除个别理论结果指出应遵守 Weibull 统计规律^[6], 迄今尚无实验研究。因而本文的结果是否正确, 有待今后的实验检验。

七、平均断裂寿命

如上所述, 实际材料试样的断裂寿命是遵守确定的统计分布规律的, 因而只有大量试样系综的断裂寿命的平均值才能精确反应实际材料的断裂特性。设 τ 为试样系综的平均寿命, 则有

$$\tau = \int_0^\infty t w_f(t) dt = \int_0^\infty R(t) dt \quad (31)$$

将 (24A) (24B) 式代入(31)式并进行适当的数学变换, 则得

$$\tau \simeq \tau_0 \exp \left(\frac{U - \gamma \sigma}{kT} \right) \quad (32)$$

其中 $\tau_0 = 1/\nu_0$ 为原子在固体中的本征振动周期, $\gamma \sigma$ 的表达式为

$$\gamma \sigma \simeq \alpha_V \sigma + kT \ln \left[\frac{2\eta^2}{3} \left(\frac{\pi(1 - \mu^2)\sigma^2 L}{G_{1c} E} \right)^2 \left(\frac{MV}{\pi^2 \eta^2 \theta_1} \right)^{1/15} \right] \quad (33A)$$

$$\gamma \sigma \simeq \alpha_A C_0 \sigma + kT \ln \left[\frac{2\eta^2}{3} \left(\frac{\alpha_A \gamma L}{kT} \right)^2 \left(\frac{MV}{\pi^2 \eta^2 \theta_1} \right)^{1/15} \right] \quad (33B)$$

断裂寿命公式(32)式正是众所周知的 Жукров 经验公式^[1,2], 只不过这儿 τ 是平均断裂寿命, 它是本文从原子键断裂机理出发经过微裂纹长大的非平衡统计过程而得到的结果。

由 (33A)、(33B) 可知, γ 是材料特征量 $\alpha_V(\alpha_A)$ 、 G_{1c} 、 E 的函数, 是结构敏感量, 而且 γ 具有微弱的尺寸效应, 随试样体积 V 的增大而极缓慢地增大。

上面所有这些理论结果都与实验结果定性地相符的^[1,2]。这儿需着重指出的是, 象本文这样从理论上较严格地导出断裂寿命的 Жукров 经验公式并包含着上述广泛结果的,

迄今尚属首次。至于其随各物理量的变化函数形式在多大程度上是正确的,有待进一步的实验验证。

八、结 语

本文从微裂纹按原子键断裂机理随机长大导致材料热激活断裂这一基本思路出发,从理论上统一导出了微裂纹分布函数、断裂几率、可靠性、断裂寿命分布函数,平均断裂寿命等,所有这些结果都以同一组物理参量表示。

与现有其他延时断裂理论相比,本文有两个显著特点:

1. 从理论框架来看,突出了微裂纹动力学,统计性以及原子键机理与宏观特性相结合之间的有机联系。

2. 从具体结果来说,本文不仅统一导出了现有热激活断裂的所有主要规律,而且给出了一些新结果和预言。

当然,由于断裂过程甚为复杂,本理论中不少近似尚有待改进,有些结果亦有待今后的实验检验。

参 考 文 献

- [1] Регель, А. И. ИДР. Кинетическая Природа Прочности твердых тел, М. "наука" (1974).
- [2] Zhurkov, S. N., *Int. J. Fracture*, 26(1984), 295.
- [3] Krausz, A. S. and Krausz, K., *Fracture kinetics of Crack Growth*, Kluwer Academic, Publishers (1988).
- [4] Xing, X. S., *Engng. Fracture Mech.*, 24(1986), 45; 26(1987), 393; 32(1989), 935.
- [5] 邢修三, 中国科学 A, 29(1986), 501; 8(1986), 840.
- [6] Petrov, V. A. and Orlov, A. N., *Int. J. Fracture*, 11(1975), 881; 12(1976), 231.

STATISTICAL THEORY OF THERMALLY ACTIVATED FRACTURE

Xing Xiusan

(Department of Applied Physics, Beijing Institute of Technology, P. O. Box 327 Beijing, 100081, China)

Krausz, A. S.

*(Department of Mechanical Engineering, University of Ottawa, 770 King Edward Ave.,
Ottawa, Ontario K1N 6N5, Canada)*

Abstract A nonequilibrium statistical theory of thermally activated fracture connecting atomic bond mechanism with the microscopic properties has been constructed. The stochastic growth equation of microcrack is given. The microcrack distribution function, fracture probability, reliability, fracture life distribution function and average fracture life have been derived in a unified theory.

Key words Thermally activated fracture, stochastic growth equation of microcrack, distribution function, average fracture life