

结构随机激励的响应灵敏度分析

姚昌仁 麻永平
(北京理工大学)

提要 本文建立了有色噪声随机激励的响应协方差矩阵方程, 推导了响应灵敏度的计算式, 给出了进行灵敏度计算的方法, 并作了实例计算。

关键词 灵敏度, 均方响应, 随机振动, 随机激励

一、引言

工程设计中往往需要控制结构的动态响应量, 使之不超过规定的限度。当所设计的结构不满足要求时, 就应当修改原设计方案。所以设计时要作响应灵敏度分析, 要研究结构变化量与动态特性变化量之间的关系, 了解各设计参数对动态性能指标的影响程度, 确定怎样分配或增减结构的质量、刚度或阻尼才能最有效地改善结构的动态性能。响应灵敏度与结构所受的激励有关, 简谐激励和脉冲激励的响应灵敏度已有分析方法^[1,2], 但对有色噪声的随机激励的灵敏度还没有人研究过。本文先用谱分解定理设计出一动态滤波器, 使有色噪声随机激励的系统扩阶而得到一个新的扩阶系统, 它的激励是白噪声随机函数; 再由新扩阶系统的响应协方差方程建立原来系统的响应协方差方程, 并导出响应的灵敏度公式; 用 Riccati 方程稳定解的方法求灵敏度方程的解; 最后作实例计算, 验证方法的有效性。本文的方法适于计算功率谱为有理函数的有色噪声激励的系统响应灵敏度, 充分考虑了响应灵敏度分析所要求的精度与计算效率的要求。

二、有色噪声随机激励的响应协方差方程

设机械系统振动时的状态方程为

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 f \quad (1)$$

式中

$$z = (y \dot{y})^T$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$B_1 = (0 \ M^{-1})^T$$

式中 M 、 K 、 C 分别为系统的质量、刚度和阻尼矩阵; y 为位移矢量; f 为有色噪声的激励函数; 0 和 I 为零矩阵和单位矩阵。由于方程的激励是有色噪声的随机函数, 直接由这一

本文为梅凤翔编委推荐, 于 1989 年 12 月 23 日收到。

方程求系统的响应协方差很困难。所以设计一个新的系统再求其协方差, 新系统的激励是白噪声的随机函数。

我们利用谱分解理论设计一个动态滤波器, 使原系统扩阶而得到一新的扩阶系统, 它的激励为白噪声随机函数。扩阶系统模型如图 1 所示。由于扩阶系统中的滤波器是根据原系统的有色噪声随机激励来设计的, 同时扩阶系统模型是一个开环系统, 所以它的响应均方值包含了原系统的响应协方差。

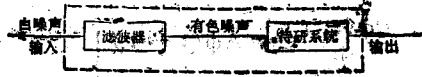


图 1 扩阶系统模型

所设计的动态滤波器的方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{II}x + B_{II}u \\ x_I = C_{II}x \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$A_{II} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_m & -\alpha_{m-1} & \cdots & -\alpha_1 & 0 \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (m \text{ 为扩阶系统的阶数}) \quad (4)$$

$$B_{II} = (0 \ 0 \ \cdots \ 1)^T_{m \times 1}$$

$$C_{II} = (\beta_m \ \beta_{m-1} \ \cdots \ \beta_1)_{1 \times m}$$

u 为白噪声随机激励, 它的功率谱为 D_u , α_m 及 β_m 由已知的有色噪声谱分解得到的传递函数 $G(i\omega)$ 求得。

如果系统的有色噪声激励的功率谱密度为有理函数 $\phi(\omega)$, 是已知的。利用谱分解定理, 可将 $\phi(\omega)$ 分解为两个有理函数 $G(i\omega)$ 与 $G(-i\omega)$ 之积, 即

$$\phi(\omega) = G(i\omega)G(-i\omega) \quad (5)$$

而传递函数的一般表达式可以写成,

$$G(i\omega) = G(s) = \frac{\beta_1 s^{m-1} + \beta_2 s^{m-2} + \cdots + \beta_{m-1} s + \beta_m}{s^m + \alpha_1 s^{m-1} + \cdots + \alpha_{m-1} s + \alpha_m} \quad (6)$$

因而, 图 1 所示的扩阶系统的数学方程为

$$\begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_I & B_I C_{II} \\ 0 & A_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ x \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ B_{II} \end{Bmatrix} u \quad (7)$$

令

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} A_I & B_I C_{II} \\ 0 & A_{II} \end{bmatrix} \\ B = (0 \ B_{II})^T \\ Z = (z \ x)^T \end{cases} \quad (8)$$

则式(7)变为

$$\dot{Z} = AZ + BN \quad (9)$$

这就是新设计的白噪声随机激励系统的状态方程。由微分方程解的理论可知

$$Z = \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B u(\tau) d\tau \quad (10)$$

式中 $\phi(t, \tau)$ 为状态转移矩阵。对非时变系统

$$\phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$$

所以

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi(t, \tau)}{\partial t} &= A \phi(t, \tau) \\ \phi(t, \tau) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

响应协方差矩阵方程为

$$\begin{aligned} P &= E[Z(t)Z^T(t)] \\ &= E \left[\int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B u(\tau) d\tau \int_{t_0}^t u(\lambda) B^T \phi^T(t, \lambda) d\lambda \right] \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B E[u(\tau)u^T(\lambda)] B^T \phi^T(t, \lambda) d\lambda d\tau \end{aligned}$$

激励的相关函数为

$$E[u(t)u^T(\lambda)] = D_0 \delta(\lambda)$$

式中 $\delta(\lambda)$ 为 δ 函数。将此式代入,得

$$P = \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B D_0 B^T \phi^T(t, \tau) d\tau$$

对上式求一阶导数,并利用式(9)及稳态响应系统的 $\dot{P} = 0$, 得

$$AP + PA^T = -BD_0B^T \quad (12)$$

这就是有色噪声随机激励系统的响应协方差矩阵方程,式中

$$P = E \begin{bmatrix} zz^T & zx^T \\ xz^T & xx^T \end{bmatrix}$$

P 中含有原系统的位移和速度响应的协方差,即

$$P_{d\dot{x}} = E[z z^T] = C_{d\dot{x}}^T P C_{d\dot{x}} \quad (13)$$

式中

$$C_{d\dot{x}} = (I \ 0)_{n \times 2n}^T \quad (14)$$

系统的均方加速度响应为

$$P_s = E[\ddot{y} \ddot{y}^T] = C_s^T E[\dot{Z} \dot{Z}^T] C_s$$

其中

$$C_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(1n+m) \times (2n+m)} \quad (15)$$

I_n 为 $n \times n$ 阶单位矩阵。将式(9)代入,得

$$P_s = C_s^T A P A^T C_s \quad (16)$$

三、稳态均方响应的灵敏度表达式

应用一阶摄动法由式(12)求响应灵敏度的计算公式。假设设计参数 m 、 c 、 k 的变化量 Δm 、 Δc 、 Δk 引起系统矩阵 A 的变化量为 ΔA , 响应变化量的协方差为 ΔP , 并用下标“0”表示结构参数未修改时的量, 则有

$$\begin{aligned} A_0 P_0 + P_0 A_0^T &= -B_0 D_0 B_0^T \\ (A_0 + \Delta A)(P_0 + \Delta P) + (P_0 + \Delta P)(A_0^T + \Delta A^T) \\ &= -(B_0 + \Delta B)D_0(B_0^T + \Delta B^T) \end{aligned}$$

整理并略去二阶小量, 得

$$A_0 \Delta P + \Delta P A_0^T = A_{ef} \quad (17)$$

$$A_{ef} = -(\Delta A P_0 + P_0 \Delta A^T) - (\Delta B D_0 B_0^T + B_0 D_0 \Delta B^T)$$

若修改参数仅为 k 及 c , 不修改质量 m 时, $\Delta B = 0$, 故

$$A_{ef} = -(\Delta A P_0 + P_0 \Delta A^T)$$

式(17)就是系统受有色噪声随机激励时响应协方差的灵敏度表达式。我们通常所需要的均方位移响应的灵敏度为

$$\Delta P_d = C_d^T \Delta P C_d \quad (18)$$

$$C_d = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2n+m) \times (2n+m)} \quad (19)$$

均方加速度响应的灵敏度为

$$\Delta P_a = C_a^T A_0 \Delta P A_0^T C_a \quad (20)$$

四、响应灵敏度方程的解

式(17)与 Riccati 方程^[3]相类似, 可以用 Riccati 方程的解法求解方程(17)。

首先用 A_0 及 A_{ef} 构造矩阵

$$H = \begin{bmatrix} A_0^T & 0 \\ A_{ef} & -A_0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

可以证明, 只要保证此矩阵的特征值无纯虚根, 用 Riccati 解法就有效。

其次求 H 的特征向量。设 A_0^T 及 A_{ef} 的特征向量矩阵分别为 ϕ_0 及 ϕ_{ef} , 而 A_0^T 及 A_{ef} 的某一特征向量分别为 x_{0i} 及 x_{efi} , A_0 的特征值为 λ_{0i} , 所以有

$$\begin{aligned} H(x_{0i} \ x_{efi})^T &= \lambda_{0i}(x_{0i} \ x_{efi})^T \\ x_{efi} &= (\lambda_{0i} I + A_0)^{-1} A_{ef} x_{0i} \\ (i &= 1, 2, \dots, 2n, 2n+1, \dots, 2n+m) \end{aligned} \quad (22)$$

因而 A_{ef} 的特征向量矩阵为

$$\phi_{ef} = [x_{efi}] \quad (23)$$

最后求得响应协方差的灵敏度矩阵方程, 即

$$\Delta P = \phi_{ef} \phi_0^{-1} \quad (24)$$

由式(24)可知, 只要知道了 A_{ef} 及结构修改之前的特征向量矩阵 ϕ_0 , 就可得到响应灵

敏度的矩阵。

在推导方程(17)时,我们假设系统矩阵 A 的变化量 ΔA 是小量才能略去二阶量。所以应用这种方法时,每次的修改量 Δk , Δm , Δc 要小,否则计算精度较低。从实际计算结果看,每次修改量不大于原参数的 15% 精度较满意。如果修改量大时,可先通过特征对灵敏度的计算,修改原来系统的特征对,再用新的修改后的特征对代入式(24)中计算响应灵敏度。这样作的好处是,既不限修改量的大小,又避免增加太多的工作量,但能保证分析结果有较高精度。

本文提出的灵敏度分析方法,由于利用矩阵的特征向量进行均方响应计算和灵敏度分析,减少了不必要计算的特征向量子块;充分运用矩阵分块特性,降低了矩阵的阶数;采用原系统的特征向量计算灵敏度,避免了特征向量的反复计算,因而有较高的计算速度。

五、计算实例

例 1 图 2 所示系统的状态方程中的 M 、 C 、 K

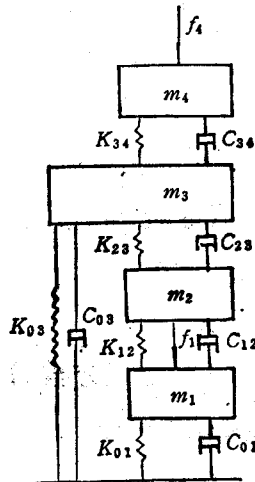


图 2 计算模型

分别为

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & m_3 & \\ & & & m_4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{01} + c_{12} & -c_{12} & 0 & 0 \\ -c_{12} & c_{23} + c_{12} & -c_{23} & 0 \\ 0 & -c_{23} & c_{03} + c_{34} + c_{23} & c_{34} \\ 0 & 0 & -c_{34} & c_{34} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{01} + k_{12} & -k_{12} & 0 & 0 \\ -k_{12} & k_{23} + k_{12} & -k_{23} & 0 \\ 0 & -k_{23} & k_{23} + k_{34} + k_{03} & -k_{34} \\ 0 & 0 & -k_{34} & k_{34} \end{bmatrix}$$

f_1 及 f_4 为作用在质量 m_1 及 m_4 上的随机激励力,其功率谱密度函数为

$$\phi_1(\omega) = 30 \frac{4 + 9\omega^2}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$$

$$\phi_2(\omega) = 60 \frac{25 + 36\omega^2}{\omega^4 + 26\omega^2 + 25}$$

原系统的结构参数为

$$m_1 = 2.00 \text{ kg} \quad c_{01} = 100 \text{ Ns/m} \quad k_{01} = 4000 \text{ N/m}$$

$$m_2 = 4.00 \text{ kg} \quad c_{12} = 300 \text{ Ns/m} \quad k_{12} = 6000 \text{ N/m}$$

$$m_3 = 3.00 \text{ kg} \quad c_{23} = 50 \text{ Ns/m} \quad k_{23} = 10000 \text{ N/m}$$

$$m_4 = 4.00 \text{ kg} \quad c_{34} = 80 \text{ Ns/m} \quad k_{34} = 10000 \text{ N/m}$$

$$c_{03} = 100 \text{ Ns/m} \quad k_{03} = 7000 \text{ N/m}$$

计算结果

由式(6)得传递函数

$$G_1(i\omega) = G_1(s) = \frac{-3s - 2}{s^2 + 3s + 2}$$

$$G_2(i\omega) = G_2(s) = \frac{-6s - 5}{s^2 + 6s + 5}$$

动态滤波器的参数矩阵为

$$A_{1m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad A_{2m} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B_{1m} = (0 \ 1)^T \quad B_{2m} = (0 \ 1)^T$$

$$C_{1m} = (-2 \ -3) \quad C_{2m} = (-5 \ -6)$$

将灵敏度计算的有关公式编成专门的计算机程序,并输入有关参数,可得到没有修改时系统的均方加速度响应值:

$$E[\ddot{x}_1^2] = 3.16 \times 10^{-1} \text{ m/s}^2 \quad E[\ddot{x}_2^2] = 2.44 \times 10^{-1} \text{ m/s}^2$$

$$E[\ddot{x}_3^2] = 1.96 \times 10^{-1} \text{ m/s}^2 \quad E[\ddot{x}_4^2] = 3.96 \text{ m/s}^2$$

各质量修改后相应的均方加速度响应的变化量列于下表。表中 $\Delta m_1 \sim \Delta m_4$ 为质量 $m_1 \sim m_4$ 的修改量; $\Delta E[\ddot{x}_1^2] \sim \Delta E[\ddot{x}_4^2]$ 为各点的均方加速度变化量;理论差是用新的质量代入后直接求的响应与原系统响应的差值,表 1 中数据均为相对未修改系统对应参数的相对值。

从表 1 中可看出:(1) 理论差与灵敏度分析值非常相近,说明计算精度较高;(2) $\Delta E[\ddot{x}_1^2]$ 对 Δm 的灵敏度是不一样的。改变 Δm_1 , 对 m_1 点的响应最灵敏;改变 Δm_2 对 m_2 点的响应最灵敏;修改 Δm_4 对 m_3 点的响应最灵敏。(3) 修改量 Δm 增加,响应量的变化 $\Delta E[\ddot{x}_1^2]$ 也增加,但不是正比关系。可用灵敏度计算结果作为动力修改的依据。

例 2 已知导弹—拖车系统的动力学模型(图 3)及有关参数,系统的运动用式(1)来描述,激励为有色噪声的随机路面输入。试计算响应灵敏度。

计算结果见图 4。曲线 I——导弹均方加速度响应相对悬挂刚度系数的灵敏度, $\Delta E[\ddot{x}_1^2]$ 为导弹均方加速度的增量, Δk 为悬挂系统刚度的增量; II——车体均方加速度相对悬挂系统刚度的灵敏度, $\Delta E[\ddot{x}_2^2]$ 为车体均方加速度的增量。

表 1

单位: %

修改变量		$\Delta E[\dot{x}_1^2]$		$\Delta E[\dot{x}_2^2]$		$\Delta E[\dot{x}_3^2]$		$\Delta E[\dot{x}_4^2]$	
		灵敏度	理论差	灵敏度	理论差	灵敏度	理论差	灵敏度	理论差
Δm_1	1	-0.560	-0.542	-0.0910	-0.0916	-0.0368	-0.0372	-0.00293	-0.00293
	10	-6.60	-4.99	-0.830	-0.914	-0.337	-0.378	-0.0270	-0.0298
Δm_2	1	-0.0940	-0.0940	-0.100	-0.0940	-0.0790	-0.0797	-0.00778	-0.00780
	10	-0.900	-0.920	-1.49	-0.917	-0.750	-0.783	-0.0740	-0.0782
Δm_3	1	0.00210	0.00215	0.00980	0.00980	0.00430	0.00429	-0.00909	-0.00915
	10	0.0198	0.0207	0.0920	0.0967	0.0420	0.0425	-0.0855	-0.0917
Δm_4	1	-0.206	-0.206	-0.480	-0.480	-0.580	-0.579	-0.540	-0.535
	10	-1.97	-1.97	-4.50	-4.59	-5.60	-5.54	-5.30	-5.12

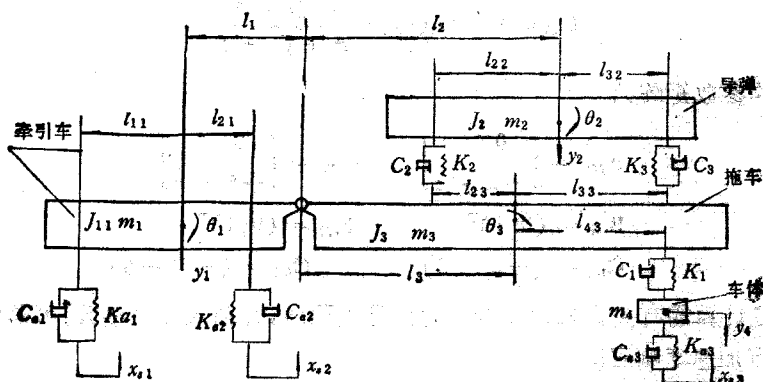


图3 导弹-拖车系统

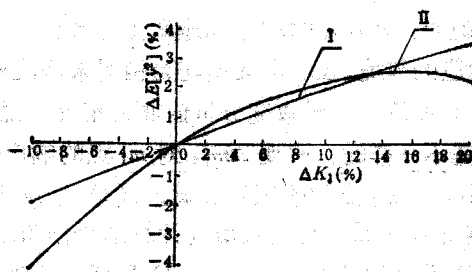


图4 响应灵敏度曲线

从图中可以看出： $\Delta E[y_1^2]$ 与 $\Delta E[y_2^2]$ 对 ΔK_1 的灵敏度是不同的。增加 ΔK_1 对 $\Delta E[y_1^2]$ 不灵敏，对 $\Delta E[y_2^2]$ 灵敏。减小 ΔK_1 对 $\Delta E[y_1^2]$ 的影响要大一些。

参 考 文 献

- [1] 林家浩, 结构动力优化中的灵敏度分析, 振动与冲击, 1(1985).
- [2] Chen J. C. and Wade, P. E., Matrix Perturbation for Structural Dynamic Analysis, *AIAA J.*, 15, 8 (Aug. 1977).
- [3] Gersh, W., Mean Responses in Structural Systems, *J. Acoust. Soc. Am.* 48, 1 (1970).
- [4] 安德森, B. D. O., 莫尔, J. B., 线性最优控制, 科学出版社(1982).

THE RESPONSE SENSIVITY ANALYSIS FOR STRUCTURAL SYSTEMS IN RANDOM EXCITATION

Yao Changren, Ma Yongping

(Beijing Institute of Technology)

Abstract The response covariance matrix equation in non-white noise power spectrum random excitation has been developed. The calculation method of response sensitivity is given. An example calculation is worked out for a missile—trailax system.

Key words sensitivity, mean square response, random excitation, random vibration