

对一类强非线性系统的分析

王振东

(天津大学力学系)

程友良

(华北电力学院基础部)

提要 本文研究了一类强非线性系统。首先对系统在相平面上的全局结构进行定性分析,得到了系统参数的分叉值。然后研究了摄动方法在定性分析中的应用。

关键词 强非线性系统,定性分析,摄动法

1. 引言

自从 Van der Pol 在 1926 年研究了振荡器方程

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} \quad (\varepsilon > 0) \quad (1)$$

在相平面上存在稳定的极限环以后,由于其在生产实际中的应用背景,人们已研究更广泛的二阶非线性方程

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \quad (2)$$

的极限环问题^[4],但都假定 $g(x)$ 需满足

$$xg(x) > 0 \quad \text{当 } x \neq 0 \quad (3)$$

甚至^[5]

$$g(-x) = -g(x) \quad (4)$$

[1]首先研究无阻尼时含有 x 偶次幂强非线性项的问题,即令

$$g(x) = mx + \alpha x^2 \quad (5)$$

其中 $m = \pm 1$, α 是非小参数的常数。此时 $g(x)$ 已不满足条件(3),(4)。[1]用时间变换法求出了问题的渐近近似式,得到系统仍有周期解。

本文研究含有 x 偶次幂强非线性项的有阻尼系统(6),首先对系统进行定性分析,得知当 $\varepsilon \approx 0$ 且为小参数 ($0 < \varepsilon \ll 1$) 时系统已无周期解, $\varepsilon = 0$ 是系统的分叉值;接着用[3]中提出的摄动法进行研究,讨论了此摄动法在定性分析中的应用。

2. 定性分析

我们先从定性角度来分析含有 x 偶次幂强非线性项的有阻尼系统

$$\ddot{x} + x + x^2 = -\varepsilon(1 - x^2)\dot{x} \quad (6)$$

其中 ε 是小参数, $0 < \varepsilon \ll 1$ 。此系统等价于二维自治系统

本文于 1989 年 4 月 5 日收到, 1989 年 11 月 23 日收到修改稿。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y = P(x, y) \\ \dot{y} &= -x - x^2 - \varepsilon(1 - x^2)y = Q(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

它有两个平衡点: 稳定焦点 $(0,0)$ 和鞍点 $(-1,0)$.

对于系统(6),若去掉阻尼项,则有

$$\ddot{x} + x + x^2 = 0 \quad (8)$$

它可由(5)令 $m=1, \alpha=1$ 得到. 先对(8)作定性分析, 定义势函数 $V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$, 不难看出 $V(x)$ 在 $x=-1$ 达到极大值, 极大值为 $1/6$; 在 $x=0$ 达到极小值, 极小值为 0 ; 其他处均无极值(见图 1). 由能量平衡法知 $(0,0)$ 是(8)的中心, $(-1,0)$ 是(8)的鞍点, 并且过鞍点的分界线是

$$F_{1/6}(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6} \quad (9)$$

它与 x 轴正向的交点是 $(\frac{1}{2}, 0)$, 分界线内的轨线都是围绕中心 $(0,0)$ 的闭曲线, 这与[1]中结果相符. 而初值应满足条件

$$0 < x(0) \leq \frac{1}{2} \quad \text{或} \quad -1 \leq x(0) < 0 \quad (10)$$

这是[1]所没明确指出的.

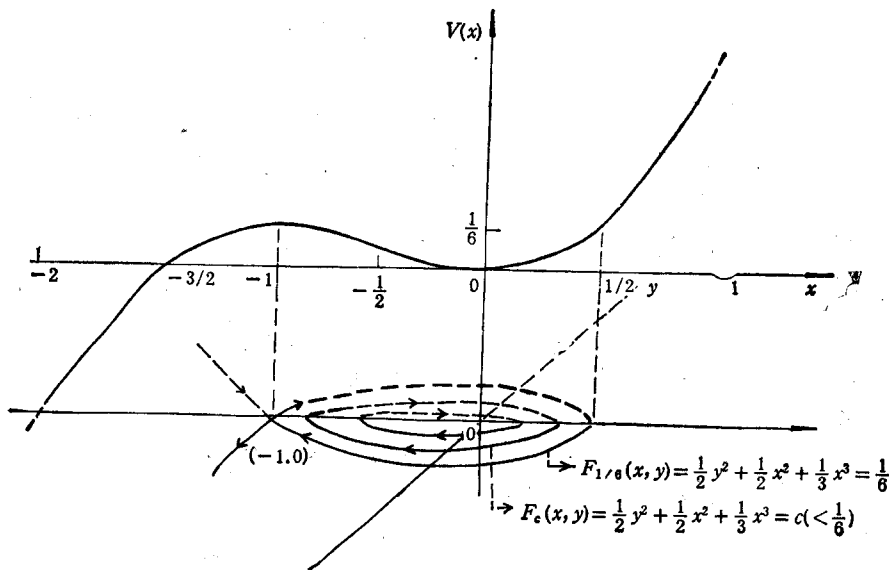


图 1

用反证法可证明系统(6)无周期解. 设系统(6)有周期解, 则其对应的闭轨必包含焦点 $(0,0)$, 而不包含鞍点 $(-1,0)$. 又因

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -\varepsilon(1 - x^2) \quad (11)$$

由 Bendixon 判断, 此周期解对应的闭轨还必须与直线 $x = \pm 1$ 相交. 但由于此闭轨不能

包含鞍点,且轨线在经过直线 $x = -1$ 上半平面部分时,其方向都是水平向右;在经过直线 $x = -1$ 下半平面部分时,其方向都是水平向左。所以此周期解对应的闭轨只可能在鞍点 $(-1, 0)$ 与 $x = -1$ 相切,且必与 $x = 1$ 相交(由 Bendixon 定理,见图 2); 或此周期解对应的闭轨不与 $x = -1$ 相交,但必与 $x = 1$ 相交(见图 3)。总之,闭轨必与直线

$x = 1$ 相交。令

$$F_c(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 = c \quad (12)$$

由于周期解对应的闭轨及曲线(12)都包围 $(c \leq \frac{1}{6})$ 或半包围 $(c > \frac{1}{6})$ 平衡点 $(0, 0)$, 所以总可选取适当的 c , 使 $F_c(x, y)$ 与闭轨有两个交点(见图 2、3)。由于在系统(7)上有

$$\frac{dF_c(x, y)}{dt} = -\varepsilon(1 - x^2)y^2 \quad (13)$$

当 $|x| < 1$ 时, $\frac{dF_c}{dt} < 0$, 这说明(7)的轨线在区域 $|x| < 1$ 内与曲线(12)相交时,都是自外向内(若曲线(12)不是闭的,则将包围平衡点的一边叫做“内”)。特别,在交点处周期解对应的闭轨走向都是自外向内的(对曲线(12)而言)。然而对于同一条轨线这是不可能的。所以(6)无周期解。

所以得出结论: 系统(6)当 $\varepsilon = 0$ 时有周期解,而当 $\varepsilon \neq 0$ 且为小参数时没有周期解, $\varepsilon = 0$ 是系统(6)的分叉值。

3. 摄动法在定性分析中的应用

现在用文[3]提出的摄动法来证明系统(6)当初条件满足

$$-1 < x(0) = b < 0 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (14)$$

时的解都不是周期解。

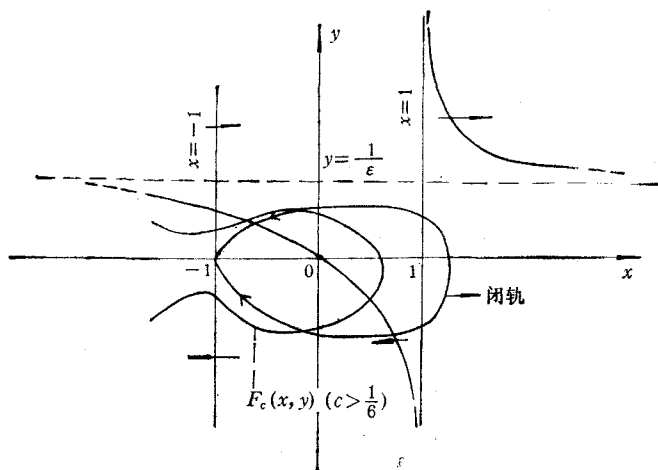


图 2

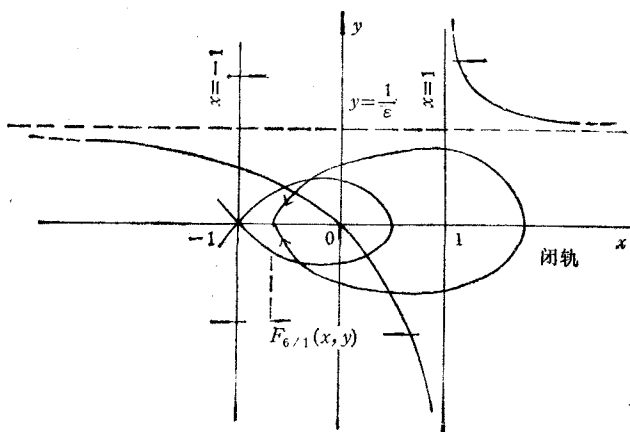


图 3

事实上, $\varepsilon = 0$ 时式(6)变成

$$\ddot{x}_0 + x_0 + x_0^2 = 0 \quad (15)$$

可以验证(15)满足初条件(14)的周期解是:

$$x_0 = b + a \operatorname{Sn}^2(\phi/m) \quad \phi = \frac{k}{\pi} \varphi \quad (16)$$

而

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= B_0(a) \quad B_0'(a) = -\left(\frac{\pi}{k}\right)^2 \frac{a}{bm} \\ m &= \frac{-2a}{3+6b+2a} = \frac{a^2}{3(b+b^2)} \end{aligned} \quad (17)$$

式中 $\operatorname{Sn}(\phi/m)$ 是参数为 m 的 Jacobi 椭圆正弦函数, $K = K(m)$ 是第一类完全椭圆积分, a 是振幅, 只受初值 b 限制,

$$a = \frac{1}{4} \left\{ -3(1+2b) + \sqrt{9-12b-12b^2} \right\}$$

用反证法, 设 $\varepsilon \neq 0$ 时, 系统(6)仍有满足初条件(14)的周期解。根据解的解析依赖于参数定理, 这样的解可设为

$$x(a, \varphi) = x_0(a, \varphi) + \varepsilon x_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 x_2(a, \varphi) + \dots \quad (18)$$

式中 $x_i(a, \varphi) (i = 0, 1, 2, \dots)$ 是 φ 的常周期函数。不失一般性, 设该周期为 2π , 而 a 和 φ 满足^[3]

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots \\ \frac{d\varphi}{dt} &= B_0(a) + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

容易得到 $x_0(a, \varphi)$ 满足

$$B_0'(a)x_{0\varphi\varphi} + x_0 + x_0^2 = 0 \quad (20)$$

$$x_0(a, 0) = b \quad x_{0\varphi}(a, 0) = 0 \quad (21)$$

当(17)成立时, (20)满足初条件(21)的解就是(16)。而 $x_1(a, \varphi)$ 满足

$$\begin{aligned} B_0'(a) \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + (1+x_0)x_1 &= -2B_0(a)A_1(a) \frac{\partial^2 x_0}{\partial a \partial \varphi} - 2B_0(a)B_1(a) \frac{\partial^2 x_0}{\partial \varphi^2} \\ &\quad - B_0'(a)A_1(a) \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} - (1-x_0^2)B_0(a) \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (22)$$

$$x_1(a, 0) = 0 \quad x_{1\varphi}(a, 0) = -\frac{A_1(a)}{B_0(a)} b'(a) \quad (23)$$

利用方程的可解条件, 可求出其解为

$$\begin{aligned} x_1(a, \varphi) &= -\frac{A_1(a)}{B_0(a)} \varphi x_{0a} - \frac{1}{2} \frac{B_0'(a)}{B_0^2(a)} A_1(a) \varphi^2 x_{0\varphi} - \frac{B_1(a)}{B_0(a)} \varphi x_{0\varphi} \\ &\quad - \frac{x_{0\varphi} I_2(a, \varphi)}{W B_0^2(a)} + \frac{1}{W B_0^2(a)} \left(x_{0a} + \frac{B_0'(a)}{B_0(a)} \varphi x_{0\varphi} \right) I_1(a, \varphi) \end{aligned} \quad (24)$$

式中 $I_i(a, \varphi) = -\int_0^\varphi x_1^{(i)}(1-x_0^2)B_0(a)x_{0\varphi}d\varphi (i=1, 2)$ $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}$ 是对应(22)的齐次方程

的两个线性无关解

$$x_1^{(1)} = x_{0p} \quad x_1^{(2)} = x_{0a} + \frac{B_0'}{B_0} \rho x_{0p} \quad (25)$$

利用椭圆函数的运算性质可求得

$$A_1(a) = -\frac{M(a)}{2B_0(a)KW}, \quad B_1(a) = 0, \quad W = -2ab'(a) \left(\frac{K}{\pi}\right)^2 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} M(a) = & \left[2b^2 + 2b^3 - \frac{2}{3}b^4 - \frac{2}{3}b^5 - \frac{2a}{m} \left(-2b - 3b^2 + \frac{4}{3}b^3 + \frac{5}{3}b^4 \right) \right. \\ & + \frac{2a^2(2+m)}{3m^2} \left(1 + 3b - 2b^2 - \frac{10}{3}b^3 \right) - \frac{a^3(16+6m+8m^2)}{15m^3} \\ & \times \left(-1 + \frac{4}{3}b + \frac{10}{3}b^2 \right) - \frac{(1+5b)a^4}{315m^4} (96 + 32m + 34m^2 + 48m^3) \\ & - \frac{a^5}{2835m^5} (768 + 240m + 234m^2 + 264m^3 + 384m^4) \Big] K \\ & - \left[\frac{2a}{m} \left(2b + 3b^2 - \frac{4}{3}b^3 - \frac{5}{3}b^4 \right) + \frac{4a^2(1+m)}{3m^2} \left(1 + 3b - 2b^2 \right. \right. \\ & - \left. \frac{10}{3}b^3 \right) - \frac{a^3(16+14m+16m^2)}{15m^3} \left(-1 + \frac{4}{3}b + \frac{10}{3}b^2 \right) \\ & - \frac{a^4(1+5b)}{315m^4} (96 + 80m + 80m^2 + 96m^3) - \frac{a^5}{2835m^5} (768 + 624m \\ & \left. \left. + 594m^2 + 624m^3 + 768m^4) \right] E \end{aligned} \quad (27)$$

显然, $A_1(a)$ 有无零根当且仅当 $M(a)$ 有无零根。如存在 $a_1 \in (0, 1.5)$ 使得 $M(a_1) = 0$, 那么该系统有周期解, 而 a_1 是该周期解的振幅。将 a_1 代入(16)和(24), 再代入(18)就得到周期解的二阶渐近近似式。若对任何 $a \in (0, 1.5)$, $M(a) \neq 0$ 恒成立, 则该系统无周期解。具体对(27)式而言, $M(a)$ 是一复杂的函数式, 要想解析地证明其无零点或求出其零点几乎不可能, 只能用离散的数值方法研究。因为 $M(a)$ 是连续函数, 所以只要步长取得使绝对误差在允许的范围, 从应用数学角度来说, 结果还是不错的。图 4 是取步长为 0.01 时画出的曲线 $M(a)$ ($a \in (0, 1.5)$), 图 5 是曲线 $M(a)$ ($a \in (0, 0.1)$) 放大后的情

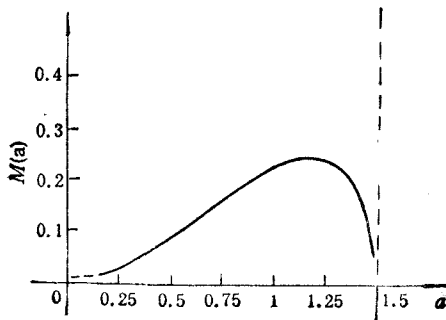


图 4

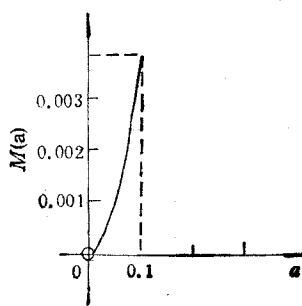


图 5

形。从这两个图可知当 $a \in (0, 1.5)$ 时, $M(a) \neq 0$, 因此 $A_1(a) \neq 0$ 。但另一方面, 由假设 $\varepsilon \neq 0$ 时系统(6)有满足初条件(14)的周期解, 所以至少存在某个 $a_1 \in (0, 1.5)$, 使 $A_1(a_1) = 0$ 。这与以上的分析矛盾, 从而说明系统(6)满足初条件(14)的解都不是周期解, 与定性分析的结论一致。

参 考 文 献

- [1] Burton, T. D., Hamdan, M. N., *J. Sound and vibration*, 87,4(1983), 543—554.
- [2] 王联, 王慕秋, 非线性常微分方程的定性分析, 哈工大出版社, (1987).
- [3] 戴世强, 中国科学(A 辑), 1(1986), 34—40.
- [4] 叶彦谦, 极限环论, 上海科技出版社(1984)
- [5] G. 桑森, R. 康蒂, 非线性微分方程, 科学出版社, (1983)
- [6] Burton, T. D., *Int. J. Nonlinear Mechanics*, 17, 1(1982), 7—19
- [7] 徐兆, 力学学报, 17(1985), 266—271
- [8] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Wash., USGPO (1964)

ANALYSIS ON A KIND OF STRONG NONLINEAR SYSTEM

Wang Zhendong

(Tianjin University)

Cheng Youliang

(Huabei Institute of Electric Power)

Abstract In this paper, a kind of strong nonlinear system is investigated, which can be treated as extension of the system of T. D. Burton and M. N. Hamdan. At first, the qualitative behaviour of the system is analysed. The bifurcation value of this system is obtained. Then the Dai Shiqiang's perturbation method is applied to analyse the qualitative behaviour of this system.

Key words strong nonlinear system qualitative analysis perturbation method