

# 圆 Couette 流混沌现象的实验研究

孙永达 柴路 刘书声

(天津大学物理系)

**摘要** 本文用流动显示和激光散射功率谱观测了圆 Couette 流中的混沌现象,发现有两条导致弱湍流激发的道路:一条是从准周期运动到混沌,另一条是阵发混沌。对于这两条道路在诸转变阈值上的巨大差别,作者用弱非线性作用局域有效的新观点给出物理解释。

**关键词** 功率谱,分岔、混沌、湍流

近二十年来,湍流激发的机理受到日益广泛深入地研究。理论工作自从 Ruell-Takens<sup>[1]</sup> 把湍流与奇怪吸引子联系起来之后蓬勃发展,许多新的非线性动力学模型(如映射、点格自动机)和新的通向湍流的道路(如倍周期分岔、准周期——混沌、阵发混沌)被提出来。实验探索则将60年代迅猛发展起来的激光检测和计算机数据采集处理技术综合应用于观测,成为理论研究的检验和向导。

70年代以来, H. L. Swinney 领导的美国非线性动力学研究中心对圆 Couette 流不稳定性做了较系统的实验研究<sup>[2]</sup>。他们的兴趣在于发现新现象,而对其产生的物理机制却很少涉及。为了检验理论预言可能存在的新的通向湍流的道路,并探讨其发生的物理机制。我们首次在国内第一套圆 Couette 流实验系统<sup>[3]</sup>进行了观测。这里报告的是利用流动显示和激光散射功率谱观测的结果,以及对转变阈值差异的物理解释。

## 1. 引言

描写流体运动速度场  $\mathbf{V}$  的 Navier-Stokes 方程

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V}$$

是一个非线性(表现在  $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$  项)、有耗散(表现在  $\nu \nabla^2 \mathbf{V}$  项),因而不可逆的时间演化方程。原则上说,只要适当地给定初值和边界条件,其解似乎应当是完全确定的。然而,一个基本的实验事实是,在一定的条件下,流动会出现一种混乱的需用统计规律描述的湍流状态。由确定论动力学系统时间演化过程中出现的这种非周期行为,我们称之为混沌现象。

我们所研究的圆 Couette 流模型系两个独立旋转的同心圆筒,如图1所示。 $\Omega_i$ 、 $\Omega_o$ 、 $a$ 、 $b$  分别为内外筒转动角速度和半径; $d = b - a$  是两筒间隙宽度; $L$  是两筒间液体高度;内外筒

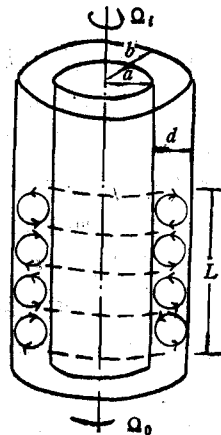


图1 圆 Couette 模型示意图

本文于1988年4月27日收到来稿,于1988年9月9日收到修改稿。

的雷诺数  $R_i$ 、 $R_o$  是该模型的两个重要控制参数, 定义为:

$$R_i = \frac{\Omega_i a d}{\nu} \quad R_o = \frac{\Omega_o b d}{\nu}$$

式中  $\nu$  是液体的运动粘滞系数。

对圆 Couette 模型, 在很低的雷诺数下, Navier-Stokes 方程有唯一的解析解:

$$V_r = V_z = 0 \quad V_\theta = Ar + B/r \quad \partial \rho / \partial r = \rho V^2 / r$$

$$A = -\Omega_i(\eta^2 - \mu)/(1 - \eta^2) \quad B = \Omega_i a^2(1 - \mu)/(1 - \eta^2)$$

$$\mu = \Omega_o / \Omega_i \quad \eta = a/b$$

该解对应于圆周方向上的层流, 即圆 Couette 流。流体速度在两筒间半径为  $r_m$  处等于零,

$$r_m = a[(1 - \mu)/(\eta^2 - \mu)]^{1/2}$$

当雷诺数逐渐增大, 流动状态超出 Navier-Stokes 方程的解析范围, 实验观测便成为理论研究的向导。目前, 计算机模拟只能给出少数略微复杂的流动状态<sup>[4]</sup>。

## 2. 实验装置及方法

实验中所用的圆 Couette 流装置如图 2 所示。

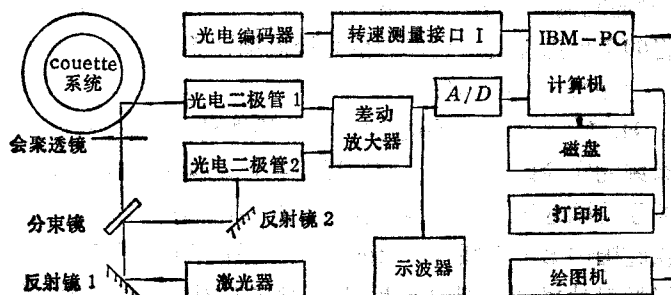


图 2 圆 Couette 流实验系统框图

该实验装置由以下三部分组成:

1) 圆 Couette 模型及其转速控制系统。同心内外筒分别用黄铜煮黑和灯工玻璃精密加工成型 ( $a = 53.53 \pm 0.01 \text{ mm}$ ,  $b = 60.40 \pm 0.01 \text{ mm}$ ,  $\eta = 0.886$ , 液体高度与宽度之比  $\Gamma = L/d = 45$ )。内外筒分别用两台直流力矩伺服马达, 经减速器, 通过同步齿形带驱动, 独立地同向或反向转动。

2) 激光散射检测系统。氩离子激光器 488nm 光束经分束镜一分为二, 一束经透镜聚焦射入流体, 被流场中显示微粒散射的光由光电二极管 1 接收; 另一束作为参考光经反射镜 2 进入光电二极管 2。两路光电信号经差动放大, 通过 A/D 转换送入 IBM-PC 微机处理。

3) 转速与实时数据采集处理系统。微机控制下的数据采集处理系统在采集散射光强的同时还要通过转速测量接口同步采集内外筒的实时转速。数据处理主要是从记录下来的散射光强时间序列估算功率谱密度, 文[5]证明其分布特征同激光多普勒测速所得相同。

周期运动在功率谱中对应着谐波尖峰,混沌的特征是谱中出现较强的噪声背景和宽带。因此功率谱成为我们研究圆 Couette 流分岔与混沌现象的重要方法。为了得到较好的功率谱,我们选用了 Hanning 窗和平均周期图法<sup>[6]</sup>。

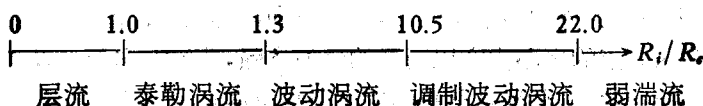
流动显示是在工作液(水)中加入体积比为 2.5% 的白色显示液(Kalliroscope AQ1000)实现的。其中显示物实际上是  $30 \times 5 \times 0.06 \mu\text{m}$  的悬浮微片,它们随流线排列变化,散射光强的变化反映了流动状态的变化。

由于作为研究过程控制参数的雷诺数与液体的运动粘度反比,而运动粘度受温度影响很大,因此实验中需将液体温度控制在  $22 \pm 0.5^\circ\text{C}$ 。

### 3. 实验结果

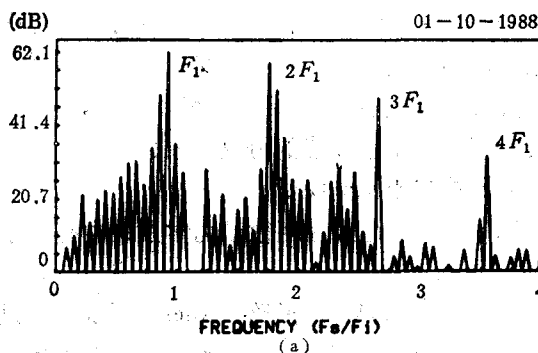
一般而言,圆 Couette 流的流动状态并不能由参数组  $(R_i, R_o, \eta, \Gamma)$  唯一确定,因为在同一参数下,流动状态敏感地依赖其演化过程。在我们选定的条件下  $(\eta = 0.886, \Gamma = 45)$ ,令转速从零逐渐增大,每改变一次转速,要待流动稳定之后再开始拍照,采集数据,实际上近乎准静态时间演化过程。

1)  $R_o = 0, R_i = 0 \sim 2500$ 。流动显示表明这种流动具有多个稳定状态。当  $R_i$  逐渐增大时,流动从层流依次经历时不变泰勒涡流、波动涡流、调制波动涡流,最后进入弱湍流—混沌(图版 I 照片 1a-d)。从层流到时不变泰勒涡流是流动的首次失稳分岔,临界雷诺数  $R_c = 110$ 。将  $R_i$  表示成相对雷诺数  $R_i/R_c$ , 上述分岔序列可表为:



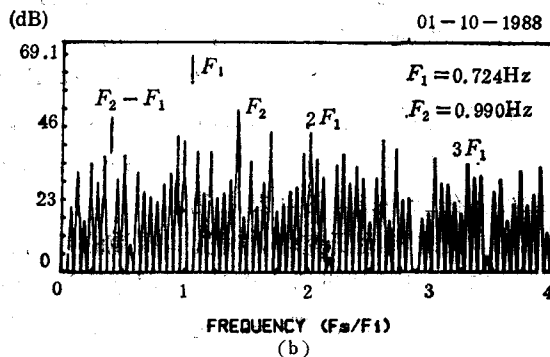
#### LOG POWER SPECTRUM DENSITY

$T_1 = 2.326 \quad R_1 = 997.8 \quad R_o = 0.0$



#### LOG POWER SPECTRUM DENSITY

$T_1 = 1436.8 \quad R_1 = 1496.0 \quad R_o = 0.0$



#### LOG POWER SPECTRUM DENSITY

$T_1 = 0.876 \quad R_1 = 2453.3 \quad R_o = 0.0$

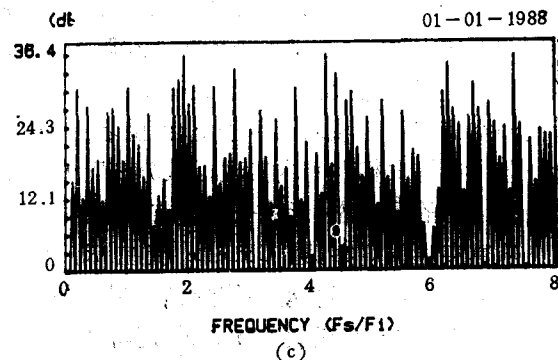


图3 功率谱 (a) 周期性的波动涡流; (b) 准周期性的调制波动涡流; (c) 非周期性的弱湍流。

激光散射功率谱也证实波动涡流是单周期的,从图 3(a)可见只有一个基频及其高次谐波;调制波动涡流是准周期的,频谱中出现两个不可约频率及其组合(图 3(b));当弱湍流激发时,功率谱中找不到特征尖峰,宽带噪声整体特征颇似白噪声(图 3(c)).

2)  $R_0 = -958$ ,  $R_i = 530 \sim 540$ . 实验观测到另一类失稳分岔序列. 先是从层流转变成单向螺旋流,然后呈交叉螺旋流,最后发展成阵发湍斑和螺旋湍斑(图版 I 照片 2a-d). 该分岔序列对初始扰动极为敏感,状态变化只需极小的激发,在极小的参数空间即可呈现极为丰富多彩的分岔现象.

#### 4. 混沌产生机制探讨

Eckmann 指出,在耗散动力学系统中有三条通向湍流的道路在理论和实验上比较成功<sup>[7]</sup>:

1) Ruelle-Takens 道路. Ruelle 等证明,只要有三次分岔就能产生混沌,即由不动点→极限环→二维环面→奇怪吸引子. 对流体而言,即准周期运动可以直接失稳进入湍流.

2) 倍周期分岔道路. Feigenbaum 证明,若干周期为  $P$  的非线性系统可以从固定点经 Hopf 分岔进入周期  $P$  状态,然后经历一系列叉状分岔,在每个临界点周期加倍而进入混沌. 该序列是:  $P \rightarrow 2P \rightarrow 2^2P \rightarrow \dots \rightarrow 2^n P \rightarrow$  混沌.

3) 阵发混沌道路. Pomeau 等证明,阵发混沌发生于切分岔点之前,表现在时间行为上是层流被湍流的暂短激发所中断,时而周期,时而混乱,随机地在两者之间跳跃. 他们指出存在三种类型的阵发混沌.

在本文的实验研究中,对流体混沌的判别主要是以功率谱为基础的. 如果谱中出现宽带噪声,即认为流动进入混沌态(弱湍流). 从这个意义上说来,第一类 ( $R_0 = 0$ ) 失稳分岔序列确属 Ruelle-Takens 道路,第二类 ( $R_0 = -958$ ) 失稳分岔序列颇似阵发混沌道路.

那么,这两类混沌是如何产生的? 为什么其激发阈值间隔相差如此悬殊呢?

就第一类分岔序列而言,从相空间考察,调制波动涡流的两个不可约频率张成一个二维环面 (torus),流动向混沌转变势必突破环面. 突破的途径有种种可能. 但在圆 Couette 流具体条件下,要充分考虑到非线性运动与粘性耗散的相互作用. 后者趋于使运动收缩到相空间有限区域的吸引子上;而前者总是使运动轨道局部失稳,沿某一方向呈指数分离. 怎样在有限相空间内实现指数分离呢? 出路就是运动轨迹无穷次地折迭起来,导致非周期运动的混沌态,形成一种具有分数维的奇怪吸引子来.

从真实空间观察,圆 Couette 流在  $R_0 = 0$  条件下,上述非线性作用主要影响泰勒涡域内流动状态,使其波动幅值受到调制. 按通常方式将 Navier-Stokes 方程中的非线性项  $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$  和粘性耗散项  $\nu \nabla^2 \mathbf{V}$  用特征尺度  $U, l$  分别表示成  $U^2/l$  和  $\nu U/l^2$ , 就不难看出其比值  $Ul/\nu$  恰为雷诺数, 故雷诺数表示非线性作用与粘滞耗散作用之比. 在小雷诺数下,非线性作用很小,流场的支配力是粘滞力和流体惯性离心力 ( $\rho V^2/r$ ). 正是二者相互作用首先在上下边界处引出泰勒涡环,然后推向中心流域. 雷诺数增大,非线性作用增强,但造成泰勒涡环流的离心力亦以同样的量级增强,非线性作用难以冲破泰勒涡环的束缚,只能在环内流域生效,而且这种影响要改变整个泰勒涡环流的运动状态,必需积累

起足够的能量。因此,第一类失稳分岔序列存在若干较宽的激发阈值间隔。

在做上述考虑时应当注意到  $R_0 = 0$  时外边界不可突破也是泰勒涡环始终存在的关键。试想外边界不是“硬”的而是“软”的,该是何景象呢? 显然,只要非线性作用在局部打开缺口,就会冲垮泰勒环的束缚,破坏粘滞力、离心力和规整固壁造成的整体稳定结构,开辟通向湍流的新途径。在两筒反向旋转条件下,恰恰存在一条“软”边界  $r_m$ , 以  $r_m$  为半径的无形筒面将流场一分为二: 其内侧相当于一个外筒不动内筒旋转的流动; 其外侧相当于一个内筒不动外筒旋转的稳定流动。二者构成环形剪切流。只要内流场的流动不越过界面,外流场就是规则的层流; 一旦内流场受到扰动,流动冲过界面,我们就见到第二类失稳分岔序列。显然这种激发无需很多能量,故其阈值间隔很小。

本实验得到何乃文、王惠棣、周荣裕、王克起等同志的帮助,在此一并致谢。作者之一刘书声感谢国家教委科学基金对本项目的支持。

### 参 考 文 献

- [1] D. Ruelle and F. Takens, *Commun. Math. Phys.*, **20** (1971) 167.
- [2] C. D. Andereck, S. S. Liu and H. L. Swinney, *J. Fluid Mech.*, **164** (1986) 155.
- [3] 孙永达, 硕士学位论文, 天津大学研究生院, (1987).
- [4] W. F. Langford, R. Tagg, E. Kostelich, H. L. Swinney and M. Golubitsky, *Phys. Fluids*, **31** (1988) 776.
- [5] M. Gorman, L. A. Reith and H. L. Swinney, *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **357** (1980) 652.
- [6] 集体编译, 数字信号处理程序库, 清华大学出版社 (1982).
- [7] J. P. Eckmann, *Rev. Modern Phys.*, **53** (1981) 643.

## EXPERIMENTAL STUDY OF CHAOTIC PHENOMENA IN A CIRCULAR COUETTE FLOW SYSTEM

Sun Yongda Chai Lu Liu Shusheng

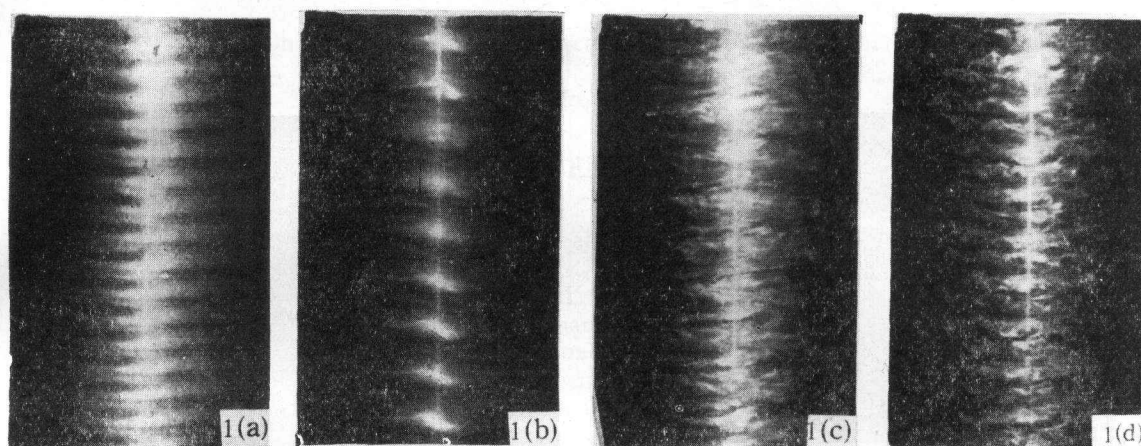
(Department of Physics, Tianjin University)

**Abstract** In this paper, we observed and measured the chaotic phenomena in a circular Couette flow system by means of flow visualizations and Laser light scattered power spectra.

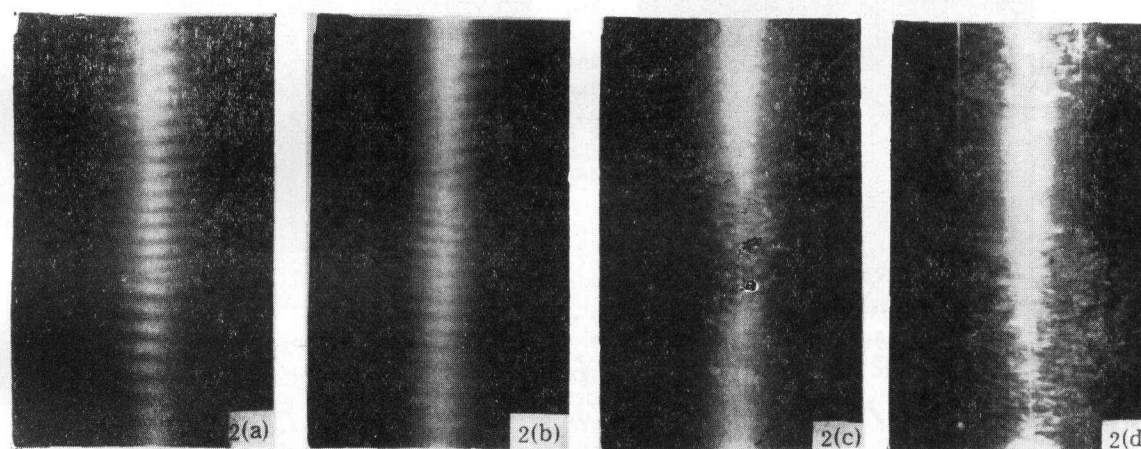
Two routes to turbulence have been found: the first one via from quasiperiodic motion to chaos, the second one via intermittency.

A new idea that the weak nonlinear interaction may locally have an effect on Taylor vortices is introduced in explanation of the great difference in transition threshold values between the above two routes.

**Key words** power spectrum, bifurcation, chaos, turbulence



照片 1 外筒静止内筒旋转时的流动显示  
*a.* 时不变的泰勒涡环流； *b.* 波动涡流； *c.* 调制的波动涡流； *d.* 弱湍流。



照片 2 内外筒反向旋转时的流动显示  
*a.* 单交叉螺旋流； *b.* 多交叉螺旋流； *c.* 阵发湍斑； *d.* 螺旋湍斑。