

对称重陀螺的非线性稳定性及分叉¹⁾

朱如曾

(中国科学院力学研究所)

摘要 本文在 Movchan 意义下给出对称重陀螺在完全耗散力作用下永久转动的非线性稳定准则。所涉及的某些平衡态是非孤立的。给出了 Movchan 意义下渐近稳定区的主要子域,并详细地讨论了分叉现象。

关键词 重陀螺,非线性稳定性,分叉,耗散力。

一、引言

早在十九世纪七十年代,汤姆逊和泰勒首先指出了耗散力对陀螺系统稳定性的重要意义。后来契塔耶夫根据李亚普诺夫的稳定理论,对线性情况建立了耗散力作用下陀螺系统的稳定准则(KTC定理)^[1,2]。近年来,陀螺系统的研究向两个方向发展。其一是随着空间技术的发展,提出了空间飞行器姿态的稳定与控制问题,陀螺系统的稳定性研究便与当代工程技术紧密地结合起来^[3,4]。另一方面是稳定性的理论研究,从线性稳定性研究向非线性稳定性发展,研究大扰动下的渐近行为及分叉现象^[5,6]。文[6]讨论了自由陀螺体永久转动的稳定性及分叉。文[5]则将陀螺系统的KTC定理推广到非线性情况。

文[5]和KTC定理针对孤立平衡态的局部稳定性。本文主要在 Movchan 意义^[7]下讨论对称重陀螺在完全耗散力作用下的非线性稳定问题,其中斜转态是非孤立的。本文还将讨论 Movchan 意义下的渐近稳定区以及有关的分叉现象。

二、动力系统的确定

考虑质量为 M , 重心与固定点 O 相距为 l ($l > 0$) 的轴对称陀螺在均匀重力场 (g) 及耗散力作用下的运动。陀螺关于对称轴的转动惯量为 C , 关于 O 点的其余两个转动惯量都为 A 。

首先引进原点重合于 O 的三个基本坐标系:

(1) 固定坐标系 $\{0, \xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ 。 ξ_3 轴竖直向上,坐标单位基矢为 i_1^0, i_2^0, i_3^0 。

(2) 旋转坐标系 $\{0, x_1, x_2, x_3\}$ 。 x_3 轴和 ξ_3 轴重合且同向,此系相对于坐标系(1)以角速度 $\Omega = (0, 0, \Omega)$ 旋转。 Ω 的选取依据是陀螺的支承措施使得当陀螺以角速度 Ω 相对于坐标系(1)旋转时,耗散力矩为零。坐标单位基矢为 i_1, i_2 和 i_3 。

(3) 固连坐标系 $\{0, x'_1, x'_2, x'_3\}$ 。此系与刚体固连,陀螺对称轴取为 x'_3 轴, x'_3 轴的取

1) 国家自然科学基金资助项目。

本文于1987年9月11日收到,1989年6月22日收到修改稿。

向使得陀螺重心坐标为 $(0, 0, l)$ 。

在运动过程中,坐标系(3)相对于坐标系(2)的取向角用 Cardan 角 (α, β, γ) 来描写^[8]。假想的 Cardan 架的外环的轴与 x_1 轴重合, α 为外环绕 x_1 轴相对于标架(2)之转角, β 为内环绕其轴相对于外环之转角, γ 为陀螺绕 x_3' 轴相对于内环之转角。当

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

时,内环的轴与 x_2 轴重合, x_1 轴与 x_1' 轴, x_2 轴与 x_2' 轴, x_3 轴与 x_3' 轴重合并同向。

若用 α_{ij} 表示轴 x_i 与 x_j' 之间的夹角,并记 $G_{ij} = \cos \alpha_{ij}$, 则以 G_{ij} 为元的矩阵 G 为

$$G = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

向量的坐标 $\{x_i\}$ 与 $\{x_i'\}$ 之间的变换关系为

$$x_i = \sum_j G_{ij} x_j'$$

刚体关于 O 点的转动惯量张量 J 与 J' 之间的变换关系为

$$J = G J' G^{-1} = G \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} G^{-1} \\ = \begin{bmatrix} A + (C - A) \sin^2 \beta & (A - C) \sin \alpha \sin \beta \cos \beta & (C - A) \cos \alpha \cos \beta \sin \beta \\ (A - C) \sin \alpha \sin \beta \cos \beta & A + (C - A) \sin^2 \alpha \sin^2 \beta & (A - C) \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta \\ (C - A) \cos \alpha \cos \beta \sin \beta & (A - C) \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta & A + (C - A) \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

用 ω 表示陀螺相对于坐标系(2)的角速度,则 cardan 角的运动方程是^[8]

$$\dot{\alpha} = \omega_1 - \tan \beta (\omega_3 \cos \alpha - \omega_2 \sin \alpha) \quad (2.3)$$

$$\dot{\beta} = \omega_3 \sin \alpha + \omega_2 \cos \alpha \quad (2.4)$$

$$\dot{\gamma} = \sec \beta \cdot (\omega_3 \cos \alpha - \omega_2 \sin \alpha) \quad (2.5)$$

在坐标系(2)中,陀螺的运动方程为

$$\frac{d}{dt} (\omega \cdot J) + \left\{ \Omega \times [\omega \cdot J] + \Omega \cdot \frac{d}{dt} J \right\} = Mgl (\sin \alpha \cos \beta, \sin \beta, 0) \\ - \Omega^2 (C - A) (\cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \beta, \cos \alpha \cos \beta \sin \beta, 0) + \mu \quad (2.6)$$

式中 μ 是耗散力矩,它是 $\alpha, \beta, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ 的充分光滑的非线性函数 $\mu(\alpha, \beta, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ 并且

$$\mu(\alpha, \beta, 0, 0, 0) = 0 \quad (2.7)$$

假定耗散力是完全的,即 $\mu \cdot \omega$ 关于 ω^2 负定。

(2.6) 式可化为

$$\frac{d}{dt} \omega = \left[Mgl (\sin \alpha \cos \beta, \sin \beta, 0) - \Omega^2 (C - A) (\cos \alpha \sin \alpha \cos^2 \beta, \cos \alpha \cos \beta \sin \beta, 0) \right. \\ \left. + \mu - \Omega \times (\omega \cdot J) - (\Omega + \omega) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} J \cdot \dot{\alpha} + \beta \frac{\partial}{\partial \beta} J \right) \right] J^{-1} \quad (2.8)$$

从(2.2)易知, J^{-1} 就是在 J 的表示式(2.2)中将 A 和 C 分别换成 $1/A$ 和 $1/C$ 的结

果,即

$$J^{-1} = J(A^{-1}, C^{-1}, \alpha, \beta) \quad (2.9)$$

将 (2.4), (2.3) 和 (2.9) 代入 (2.8), 立即可见, 除

$$\beta = \frac{\pi}{2} + n\pi,$$

(其中, n 为任意整数) 的小邻域集 $\{\Delta_n\}$ 外, (2.4), (2.3) 和 (2.8) 的右边有对 $\alpha, \beta, \omega_1, \omega_2$ 和 ω_3 的各级连续偏导数, 并且是有界的, 故只要初始 β_0 在 $U\Delta_n$ 之外, 当 $\beta(t)$ 尚未进入 $U\Delta_n$ 之前, 解一定是存在、唯一、连续, 并且关于初值及时间 t 一并连续, 即关于 $(\alpha_0, \beta_0, \omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}, t)$ 连续.

(α, β) 决定 x' 轴在坐标系 (2) 中的取向. 如果 α' 及 β' 与 α 及 β 差 2π 的整数倍, 或者 $\alpha' = \alpha + \pi$, 同时 $\beta' = \pi - \beta$, 则 (α', β') 与 (α, β) 表示 x' 轴的同一取向, 从而表示单位球面 S 上的同一个点. 如果我们对 (α, β) 加上限制条件

$$-\pi < \alpha \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2},$$

则 S 中的点 q 便与 (α, β) 一一对应. 满足限制条件的 (α, β) 我们用 $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 来表示. 现在定义 S 中两点 $q_1 = (\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1)$ 和 $q_2 = (\bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2)$ 之间的距离 $\rho_2(q_1, q_2)$ 为球面 S 上联接该两点的测地线之长度与半径之比. 由球面三角公式得

$$\rho_2 = \cos^{-1}[\sin \bar{\beta}_1 \sin \bar{\beta}_2 + \cos \bar{\beta}_1 \cos \bar{\beta}_2 \cos(\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2)] \quad (2.10)$$

当然也可写为

$$\rho_2 = \cos^{-1}[\sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] \quad (2.11)$$

易知 ρ_2 满足度量三公理, 所以 $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ 空间构成度量空间 (S, ρ_2) .

现在在集 $\mathcal{A} = SXW = \{\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \omega\}$ 中定义两点 $p_1(\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \omega_1)$ 与 $p_2(\bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2, \omega_2)$ 之间的距离 $\rho(p_1, p_2)$

$$\rho(p_1, p_2) = \sqrt{\rho_2^2 + \left(\frac{\omega_1}{Q} - \frac{\omega_2}{Q}\right)^2} \quad (2.12)$$

显然, $\mathcal{A}$ 也成为度量空间, 记为 $(\mathcal{A}, \rho)$.

与集合 $\{\Delta_n\}$ 对应, $(\mathcal{A}, \rho)$ 中存在区域 $\delta \subset \mathcal{A}$

$$\delta = \{p | p \ni U\Delta_n\} \quad (2.13)$$

由 (2.11) 和 (2.12) 可证

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho(p_1, p_2) = 0 \quad (2.14)$$

$$\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$$

$$\beta_2 \rightarrow \beta_1$$

$$\omega_2 \rightarrow \omega_1$$

以及当固定 p_1 时,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\omega_2 - \omega_1) = 0 \quad (2.15)$$

并且如果适当选取 α_2 和 β_2 的值, 一定使得

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} (\alpha_2 - \alpha_1) = \lim_{\rho \rightarrow 0} (\beta_2 - \beta_1) = 0 \quad (2.16)$$

既然已知 (2.4)、(2.3) 和 (2.8) 的解 (α, β, ω) 在 β 进入 $U\Delta_n$ 之前, 关于 $(\alpha_0, \beta_0, \omega_0, t)$ 一并连续, 结合 (2.14)–(2.16) 式便知, 解 $p(p_0, t)$ 在 $(\mathcal{A}, \rho)$ 中一定在进入 δ 之前关于 (p_0, t) 一并连续。

现在讨论 p 在区域 δ 中的情形。设 $\mathcal{A}$ 中足够小的区域 Σ 满足

$$\mathcal{A} \supset \Sigma \supset \delta \quad (2.17)$$

在 Σ 内, 采用刚体的尤拉角描写其方位, 并取 x_3 轴为第 3 轴。因为 Σ 取得足够小, 所以在 Σ 中, θ 处处不为零。故尤拉角运动方程和刚体动力学方程处处无奇点, 因而与上文类似可证 $p(p_0, t)$ 在 Σ 中关于 (p_0, t) 一并连续。于是 $p(p_0, t)$ 在 $(\mathcal{A}, \rho)$ 中关于 (p_0, t) 一并连续。

显然有解的半群性及

$$p(p_0, 0) = p_0$$

此外, 在 $\mathcal{A} - \delta$ 及 Σ 中相点速度的有界性保证 t 在正方向的无限可延伸性, 所以, 陀螺的运动在 $(\mathcal{A}, \rho)$ 中决定了一个动力系统 $(0 \leq t < \infty)$ 。

三、李亚普诺夫函数的选取

用 ω 点乘 (2.6), 并利用 (2.3) 和 (2.4), 化简即得

$$\frac{d}{dt} V(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \omega) = \frac{d}{dt} V(\alpha, \beta, \omega) = \mu \cdot \omega \quad (3.1)$$

式中

$$V(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \omega) = T(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \omega) + L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \quad (3.2)$$

$$T(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \omega) = T(\alpha, \beta, \omega) = \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{J}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \cdot \omega$$

$$L(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = L(\alpha, \beta) = \frac{Q^2}{2} (C - A)(1 - \cos^2 \bar{\alpha} \cos^2 \bar{\beta}) + Mgl(\cos \bar{\alpha} \cos \bar{\beta} - 1) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{J}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \mathbf{J}(\alpha, \beta)$$

这里 T 为扰动动能, L 为扰动位能, $\mu \cdot \omega$ 为耗散功率。导出 (3.1) 式时利用了 (2.3) 式, 此式当 $\beta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ 时是奇点, 因此 (3.1) 式不适用。但是容易看出, 只要采用上面已用的方法来处理 Σ 中的方程, 就极易证明 (3.1) 式在 $(\mathcal{A}, \rho)$ 中处处成立。

(3.1) 式及 $\mu \cdot \omega$ 关于 ω^2 的负定性, 并不表示 $\frac{dV}{dt}$ 在 $(\mathcal{A}, \rho)$ 中负定, 而只表示 $\frac{dV}{dt}$ 在 $(\mathcal{A}, \rho)$ 中常负

$$\frac{d}{dt} V(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \omega) = \frac{d}{dt} V(\alpha, \beta, \omega) \leq 0 \quad (3.4)$$

此外, $V(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \omega)$ 在 $(\mathcal{A}, \rho)$ 中显然连续, 故 $V(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \omega)$ 可作为动力系统的李雅普诺夫函数^[9]。

四、永久转动集及极限原理

定义集合

$$E = \{p | \dot{V}(p) = 0, p \in (\mathcal{A}, \rho)\}$$

E 中最大的不变集 M . 就是满足 $\dot{V}(p) = 0$, 即 $\omega = 0$ 的运动轨道的全体, 也就是永久转动集. 将 $\omega = 0$ 代入 (2.3) 和 (2.4) 得出

$$\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0 \quad (4.1)$$

将 $\omega = 0$ 和 (4.1) 代入 (2.8) 得

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta [Mgl - Q^2(C - A) \cos \alpha \cos \beta] = 0 \\ \sin \beta [Mgl - Q^2(C - A) \cos \alpha \cos \beta] = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

解此方程组, 得如下三类永久转动, 其中 θ_0 表示陀螺对称轴与竖直方向的夹角:

(1) 单元素静止点集 $N_1 = \{p_1 | p_1 = (0, 0, 0)\}$. 在 p_1 态中, $\theta_0 = 0$, 以 O 点为基准的重心高度为 $h = l$.

(2) 单元素静止点集 $N_2 = \{p_2 | p_2 = (0, 0, \pi)\}$. 在 p_2 态中, $\theta_0 = \pi$, $h = -l$.

(3) 如果

$$|Mgl/Q^2(C - A)| < 1 \quad (4.3)$$

则不变集为非孤立的静止点的集合 N_3

$$N_3 = \{p_3 | \cos \alpha_0 \cos \beta_0 = Mgl/Q^2(C - A), \omega = 0, p_3 \in (\mathcal{A}, \rho)\} \quad (4.4)$$

显然, p_1 态中重心位于定点的正上方 l 处, p_2 态中重心位于 O 的正下方 l 处, p_3 中 x'_3 轴与 x_3 轴有一夹角 θ_0

$$\cos \theta_0 = \cos \alpha_0 \cos \beta_0 = Mgl/Q^2(C - A) \quad (4.5)$$

于是

$$M_0 = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \quad (4.6)$$

若在坐标系 (1) 中观察, M_0 中各态均以角速度 $(0, 0, Q)$ 绕 ξ_3 轴作永久转动.

由于重对称陀螺的运动 $p(p_0, t)$ 构成 $(\mathcal{A}, \rho)$ 空间的动力系统, 并存在导数常负的连续的李亚普诺夫函数 V , 并且其轨道显然有界, 故可利用不变性原理^[9]得如下的极限引理.

引理 1 (极限引理) 对完全耗散的定点轴对称重陀螺的任意初态 $p_0 \in (\mathcal{A}, \rho)$ 必存在与 p_0 有关的某实数 c , 使当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有

$$V(p(p_0, t)) \rightarrow c \leq V(p_0) \quad (4.7)$$

$$p(p_0, t) \rightarrow M_0 \cap V^{-1}(c) \quad (4.8)$$

而 V_0 的定义是

$$V^{-1}(c) = \{p | p \in \mathcal{A}, V(p) = c\} \quad (4.9)$$

五、永久转动的非线性局部稳定性

在坐标系 (2) 中观察, 永久转动态即静止点.

定理 1 对完全耗散的轴对称定点刚体陀螺, 如果 p_1 (或 p_2) 态满足

$$Q^2(C - A) > Mgh \quad (5.1)$$

则 p_1 (或 p_2) 态在李雅普诺夫意义下是渐近稳定的.

证明 对 p_1 态, 将李氏函数 $V(p)$ 和距离 $\rho(p, p_1)$ 在 p_1 处展开得

$$V = \frac{1}{2} [Q^2(C - A) - Mgh](\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) + \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{J} \cdot \omega + \dots \quad (5.2)$$

$$\rho(p, p_1) = \sqrt{\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 + \omega^2/Q^2} + \dots \quad (5.3)$$

由 (5.1)、(5.2) 和 (5.3) 得出, 存在 p_1 的某一邻域 $\mathcal{D}$, 在其中成立

$$V(p) \geq \frac{1}{4} \rho^2(p, p_1) \cdot \min[Q^2(C - A) - Mgh, Q^2 A, Q^2 C]$$

此即 $V(p)$ 在 $\mathcal{D}$ 中正定. 李氏函数的定义, p_1 态的孤立性以及 $V(p)$ 的正定性满足了巴尔巴欣-克拉索夫斯基定理的条件^[10], 故 p_1 渐近稳定.

对 p_2 态, $h = -l$. 在 p_2 态附近定义新的李氏函数 $\tilde{V}$, 并展开 $\tilde{V}$ 和 ρ 得

$$\begin{aligned} \tilde{V} = V + 2Mgl = & \frac{1}{2} [Q^2(C - A) - Mgh][\bar{\beta}^2 + (\bar{\alpha} \pm \pi)^2] \\ & + \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{J} \cdot \omega + \dots \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\rho(p, p_2) = \sqrt{\bar{\beta}^2 + (\bar{\alpha} \pm \pi)^2 + (\omega/Q)^2} + \dots \quad (5.5)$$

在上两式中, 当 $\bar{\alpha} \sim \pi$ 时, 取负号; 当 $\bar{\alpha} \sim -\pi$ 时, 取正号. (5.1)、(5.4) 和 (5.5) 表明, 在 p_2 的某一邻域中, $\tilde{V}(p)$ 正定. 其余论证与 p_1 态相同.

定理 2 轴对称定点刚体陀螺, 具有完全耗散, 且 p_1 (或 p_2) 态满足

$$Q^2(C - A) < Mgh \quad (5.6)$$

则 p_1 (或 p_2) 态以 (ρ, θ) (或 $(\rho, |\theta - \pi|)$) 为尺度不稳定.

证明 对 p_1 态, (5.2)、(5.3) 和 (5.6) 表明, 在 $(\mathcal{A}, \rho)$ 中, p_1 的任意近处都能找到使 V 取负值的点 p_0 , 因此引理 1 中的 c 必为负数. 由于 $V(p_1) = 0$, 故 $p_1 \in V^{-1}(c)$. 因此 (4.8) 式表明 $\theta \rightarrow \pi$ 或 θ_0 , 即 p_1 态以 (ρ, θ) 为尺度不稳定. 同样可证 p_2 态不稳定.

利用 (3.3) 式和文 [5] 的定理也可以证得定理 1, 若耗散力的线性部分也是完全的, 则由 KTC 定理可得线性稳定和不稳定条件 (5.1) 和 (5.6). 然后根据非临界性可知定理 1 和 2 必成立.

定理 3 具有完全耗散的轴对称定点刚体陀螺, 如果 (4.3) 满足, 并且

$$C < A \quad (5.7)$$

则 p_3 态以 Movchan 尺度 (ρ, ρ') (即初扰动以 ρ 为尺度, 稳定性以 ρ' 为尺度) 而渐近稳定. 此处

$$\rho' = \sqrt{(\theta - \theta_0)^2 + \omega^2} \quad (5.8)$$

证明

$$\text{令 } \tilde{V}(p) = V(p) - \frac{Q^2}{2}(C - A) + Mgl - (Mgl)^2/2Q^2(C - A) \quad (5.9)$$

在 p_3 态附近展开得

$$\tilde{V}(p) = \frac{1}{2} Q^2(C - A) \left[\frac{(Mgl)^2}{Q^4(C - A)^2} - 1 \right] (\theta - \theta_0)^2 + \frac{1}{2} \omega \cdot \mathbf{J} \cdot \omega + \dots \quad (5.10)$$

显然, 条件 (4.3) 和 (5.7) 保证 p_3 态存在某 ρ' 邻域 $\{p | 0 < \rho' < \delta\}$, 其中, $\tilde{V}$ 以 ρ' 为尺

度正定. 从 (3.4) 得 $\frac{d\tilde{V}}{dt} \leq 0$, $\tilde{V}$ 又显然以 ρ 为尺度连续, 故可应用 Movchan 的定理 5^[7] 得 p_3 态以 (ρ, ρ') 为尺度稳定. 又由于 N_3 中所有的 p_3 态其 θ_0 均相等, 且显然存在 N_3 的以 ρ' 为尺度的某邻域 σ , 它与 M_0 不相交. 利用引理 1 即可知 p_3 态以 (ρ, ρ') 为尺度渐近稳定.

定理 4 具有完全耗散的轴对称定点刚体陀螺, 如果 (4.3) 式成立, 并且

$$C > A \quad (5.11)$$

则 p_3 态以 $(\rho, |\theta - \theta_0|)$ 为尺度不稳定, 且当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$\theta \rightarrow 0 \text{ (或 } \pi) \quad (5.12)$$

证明 (4.3) 和 (5.11) 使 (5.10) 右边 $(\theta - \theta_0)^2$ 项的系数为负, 故在 (ρ, ρ) 中, p_3 态的任意小邻域内总可找到 p_0 , 使

$$\tilde{V}(p_0) < 0 \quad (5.13)$$

此外, 引理 1 成立, 于是我们有 (4.7)、(4.8) 和 (4.9). 考虑到 $\tilde{V}$ 的定义 (5.9), 于是得

$$\tilde{V}(p_0, t) \rightarrow c' \leq \tilde{V}(p_0) < 0 \quad (5.14)$$

$$p(p_0, t) \rightarrow M_0 \cap \tilde{V}^{-1}(c') \quad (5.15)$$

对任意 $p_3 \in N_3$, (4.4) 和 (5.9) 给出

$$\tilde{V}(p_3) = 0$$

此式与 (5.14) 相结合给出

$$N_3 \cap \tilde{V}^{-1}(c') = \emptyset$$

此式与 (5.15) 结合给出

$$p(p_0, t) \rightarrow (N_1 \cup N_2) \cap \tilde{V}^{-1}(c')$$

于是得 (5.12) 式. 因此 p_3 以 $(\rho, |\theta - \theta_0|)$ 为尺度不稳定.

六、分叉及大尺度的渐近行为

定理 1—4 所表示的 p_1 、 p_2 和 p_3 态的稳定性质示于图 1 ($C > A$) 和图 2 ($C < A$) 中.

在图 1(1) 中, 当

$$\Omega < \Omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{|C-A|}}$$

时, p_1 支不稳定, p_2 支稳定. 在 $\Omega = \Omega_0$ 处, p_1 支开始分叉出不稳定的 p_3 支, p_1 支本身则变为稳定. p_2 支则不出现分叉, 仍保持稳定. $\Omega < \Omega_0$ 的位能曲线示意于图 1(2); $\Omega > \Omega_0$ 的位能曲线示意于图 1(3).

在图 2(1) 中, 当 $\Omega < \Omega_0$ 时, p_1 支不稳定而 p_2 支稳定. 在 $\Omega = \Omega_0$ 处, p_2 支开始变为不稳定, 并分叉出稳定的 p_3 支. 随着 Ω 的增大, p_1 支一直保持稳定. $\Omega < \Omega_0$ 及 $\Omega > \Omega_0$ 的位能曲线分别示于图 2(2) 和图 2(3) 中.

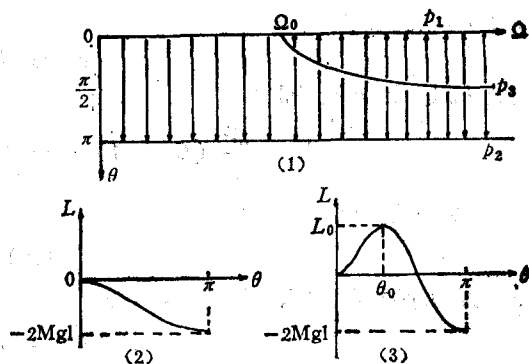


图 1

下面讨论渐近稳定区。

定理 5 对完全耗散的轴对称定点重陀螺, 如果

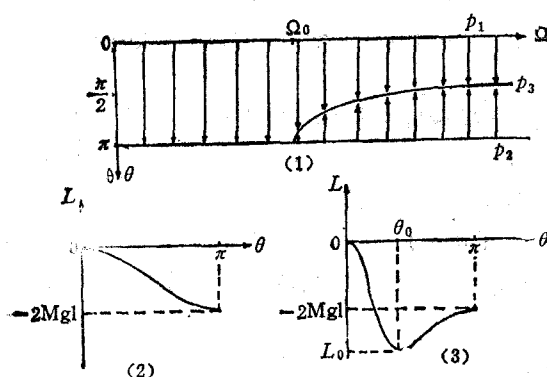


图 2

$$\Omega < \Omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{|C-A|}} \quad (6.1)$$

并且初始态 p_0 满足条件

$$V(p_0) < 0 \quad (6.2)$$

则在空间 (∞, ρ) 中, 当 $t \rightarrow \infty$ 时

$$p(p_0, t) \rightarrow p_1 \quad (6.3)$$

证明由引理 1, (4.7) 和 (4.8) 成立。

(6.2) 使得 $c < 0$, 然而 (3.2) 和 (3.3)

及 p_1 的定义给出 $V(p_1) = 0$, 所以

$$V^{-1}(c) \ni p_1 \quad (6.4)$$

(6.1) 给出

$$N_3 = \text{空集} \quad (6.5)$$

(6.4)、(6.5) 和 (4.6) 给出

$$M_0 \cap V^{-1}(c) = N_2$$

此式与 (4.8) 结合给出 (6.3) 式。证毕。

类似可证如下的定理 6 和定理 7:

定理 6 对具有完全耗散的轴对称定点重陀螺, 如果

$$C > A, \quad (6.6)$$

$$\Omega > \Omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{|C-A|}} \quad (6.7)$$

并且初态满足

$$V(p_0) < L_0 \quad (6.8)$$

$$\theta(p_0) < \theta_0 \quad (6.9)$$

则当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$p(p_0, t) \rightarrow p_1 \quad (6.10)$$

此处 L_0 是 $V(p_3)$, 即

$$L_0 = \frac{\Omega^2}{2} (C - A) - Mgl + (Mgl)^2 / 2\Omega^2 (C - A) \quad (6.11)$$

如果 (6.9) 改为

$$\theta(p_0) > \theta_0 \quad (6.12)$$

并且其余条件都满足, 则

$$p(p_0, t) \rightarrow p_2 \quad (6.13)$$

定理 7 对具有完全耗散的轴对称定点重陀螺, 如果

$$C < A \quad (6.14)$$

$$\Omega > \Omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{|C-A|}} \quad (6.15)$$

并且初态满足

$$V(p_0) < -2Mgl \quad (6.16)$$

则当 $t \rightarrow \infty$ 时,

$$p(p_0, t) \rightarrow N_3 \quad (6.17)$$

参 考 文 献

- [1] 契塔耶夫, Н. Г., 运动稳定性, 科学出版社, (1959).
- [2] Меркин, Д. Р., Гироскопические Системы (1956).
- [3] Bracewell, R. N. and Garriott, O. K., *Rotation of Artificial Earth Satellites*, Nature, 82 4638, Sept. 20, (1958) 760—762.
- [4] 卡普兰, М. Н., 空间飞行器动力学和控制, 科学出版社 (1981).
- [5] 张光枢, 中国科学 A 辑, 12(1987).
- [6] 刘延柱, 全国首届运动稳定性与振动学术会议 (1986) 论文集.
- [7] Movchan, A. A., *Appl. Math. Mech.*, N. Y., 23 (1959) 686.
- [8] Magnus, K., 陀螺理论与应用, 国防工业出版社 (1983).
- [9] Lasalle, J. P., *The Stability of Dynamical Systems*, 19.
- [10] Hahn, V., *Stability of Motion*.
- [11] 秦元勋等, 运动稳定性理论及其应用, 科学出版社 (1981).

NONLINEAR STABILITY AND BIFURCATIONS OF AXISYMMETRIC HEAVY GYROSCOPE

Zhu Ruzeng

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract In this paper, the nonlinear stability criteria in the sense of Movchan for the permanent rotations of axisymmetric heavy gyroscopes in the presence of perfect dissipative force are given. The main subdomains of the regions of asymptotic stability are given and the bifurcation phenomena are discussed in detail.

Key words heavy gyroscope, nonlinear stability, bifurcation, dissipative force