第 22 卷 第 1 期　　力 学 学 报　　Vol. 22, No. 1
1990 年 1 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Jan., 1990

Wilson 单元与广义杂交元的等价性

陈 万 吉
(大 连 理 工 大 学)

提要　本文用广义杂交法推出了 Wilson 单元及其修正模型，证明了 Wilson 不协调元与广义杂交元的等价性.

关键词　Wilson 不协调元，修正的 Wilson 元，广义杂交元，等价性.

一、前　言

Wilson 不协调元 Q_6 及其修正模型 Q_{M6}[1] 已经得到广泛地应用. 最近鹿晓阳、许焕然、刘玉文等又提出了一种新的修正模型 Q_{MM6} 单元[2]，并讨论了 Q_{MM6} 单元的合理性. 然而，Q_{MM6} 元的刚度矩阵刚好等同于陈万吉和张佑启用杂交法建立的广义杂交元 Q_{CS6}[3] 的结果.

做为一种非协调元的研究，通常是选择不协调的单元函数，为了得到收敛的结果和某些更好的单元特性，再对不协调单元函数做些必要的修正或约束.

对不协调元的研究还可以从其与杂交元的对应关系得到发展. 杂交法的特点就是放松了单元间的协调要求，在单元形状和节点参数相同的情况下，二类单元的对应关系常常是存在的. Fröier 等[4]和卞学镇[5]曾经对 Wilson 元与杂交应力元的对应性做过研究，但是，仅对矩形单元得到对应关系，因此，可以说这种重要的对应性只是在某种特殊情形下得到证实.

研究这种对应关系出现的局限性的原因在于，以单元应力和位移为变量的杂交应力元在一般情形下不容易建立单元应力与不协调元的应变的关系. 以单元应变、应力和位移为变量的广义杂交元增大了建立这种对应性的可能性.

二、Wilson 单元及其修正模型

为了便于等价性的证明，下面给出 Wilson 元的一些结果.

Wilson 元的单元函数为:

$$u = u_c + u_\lambda \tag{1}$$

其中，u_c: 用节点参数表示的协调部分，u_λ: 用单元内部参数表示的不协调部分.

$$u_c = \begin{Bmatrix} u_c \\ v_c \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \tag{2}$$

* 本文于 1989 年 3 月17日收到，1989年 9 月 3 日收到修改稿，为国家自然科学基金项目.

$$\mathbf{u}_\lambda = \begin{Bmatrix} u_\lambda \\ v_\lambda \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi^2 & 1-\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi^2 & 1-\eta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

由此可以求得单元应变为：

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathrm{B}_c, \mathrm{B}_\lambda] \begin{Bmatrix} \mathrm{q} \\ \lambda \end{Bmatrix} \tag{4}$$

其中，$\mathrm{q} = [u_1, v_1, \cdots u_4, v_4]^T$ 为节点位移参数，$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]^T$ 为内部参数，$\mathrm{B}_c\mathrm{q}$ 为协调单元函数对应的应变，$\mathrm{B}_\lambda\lambda$ 为不协调部分对应的应变。

计算等参元的应变，要用到等参变换式：

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{5}$$

其中，

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|}[J^*] = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \eta}, & -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial \eta}, & \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{7}$$

其中，坐标 x, y 的等参变换式为：

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)\begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \tag{8}$$

或

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta \\ y &= b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

而

$$a_1 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$a_2 = \frac{1}{4}(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4)$$

$$a_3 = \frac{1}{4}(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)$$

$$a_4 = \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$$

$$b_1 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

$$b_2 = \frac{1}{4}(-y_1 + y_2 + y_3 - y_4)$$

$$b_3 = \frac{1}{4}(-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)$$

$$b_4=\frac{1}{4}(y_1-y_2+y_3-y_4)$$

Q_6 元：由(2)—(7)式推出．

Q_{M5} 元：计算 B_λ 及其对应的应变能时，(6)和(7)式中取 $\xi=0, \eta=0$．

Q_{MM6} 元：(6)式中计算 $[J^*]$ 时，取 $\xi=0$，$\eta=0$． Q_{MM6} 元不协调单元函数对应的应变：

$$\varepsilon_\lambda=B_\lambda\cdot\lambda=\frac{2}{|J|}\begin{bmatrix}-b_3\xi, & b_2\eta, & 0, & 0\\ 0, & 0, & a_3\xi, & -a_2\eta\\ a_3\xi, & -a_2\eta, & -b_3\xi, & b_2\eta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{Bmatrix} \tag{10}$$

三、广义杂交元

按广义杂交法，根据泛函：

$$\pi_G=\iint_{A_e}\left[\frac{1}{2}\varepsilon^TA\varepsilon-\sigma^T(\varepsilon-D^Tu_c)-(D\sigma)^Tu_\lambda\right]dA \tag{11}$$

可推出与 Q_{MM6} 等价的单元．

π_G 中 $\varepsilon, \sigma, u_c, u_\lambda$ 分别为单元内的应变、应力、协调和不协调位移，A 为弹性常数矩阵，D 为平衡方程算子．

在单元内假定

$$\varepsilon=\frac{1}{|J|}\begin{bmatrix}1\ \xi\ \eta & & \\ & 1\ \xi\ \eta & \\ & & 1\ \xi\ \eta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_9\end{Bmatrix}=\frac{1}{|J|}N\alpha \tag{12}$$

$$\sigma=\begin{bmatrix}1\ \xi\eta^2\ \xi^2\eta & & \\ & 1\ \xi\eta^2\ \xi^2\eta & \\ & & 1\ \xi\eta^2\ \xi^2\eta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_9\end{Bmatrix}=P\beta \tag{13}$$

$$u_c=\begin{Bmatrix}u_c\\ v_c\end{Bmatrix}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\end{Bmatrix}=Fq \tag{14}$$

$$u_\lambda=\begin{Bmatrix}u_\lambda\\ v_\lambda\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}m_1 & m_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & m_1 & m_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{Bmatrix}=M\lambda \tag{15}$$

其中，$m_1=1.5-2.5\xi^2$，$m_2=1.5-2.5\eta^2$．

由 $\delta\pi_G=0$ 得：

$$\alpha=W^{-1}[C_1, -C_2]\begin{Bmatrix}q\\ \lambda\end{Bmatrix} \tag{16}$$

$$\varepsilon=\frac{1}{|J|}NW^{-1}[C_1, -C_2]\begin{Bmatrix}q\\ \lambda\end{Bmatrix}=[B_c, B_\lambda]\begin{Bmatrix}q\\ \lambda\end{Bmatrix} \tag{17}$$

单元刚度矩阵为由应变 ε 产生的应变能求得的单元刚度矩阵．其中，

$$W=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}P^{T}N\,d\xi d\eta$$

$$C_1=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}P^{T}(D^{T}F)|J|\,d\xi d\eta$$

$$C_2=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(D\sigma)^{T}M|J|\,d\xi d\eta$$

显然W为对角阵，很容易求得：

$$-W^{-1}C_2=\frac{2}{|J|}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\-b_3&0&0&0\\0&b_2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&a_3&0\\0&0&0&-a_2\\0&0&0&0\\a_3&0&-b_3&0\\0&-a_2&0&b_2\end{bmatrix}.$$

$$B_1=-\frac{N}{|J|}W^{-1}C_2=\frac{2}{|J|}\begin{bmatrix}-b_3\xi, & b_2\eta, & 0, & 0\\0, & 0, & a_3\xi, & -a_2\eta\\a_3\xi, & -a_2\eta, & -b_3\xi, & b_2\eta\end{bmatrix}. \tag{18}$$

与 Q_{MM6} 元的应变 ε_1 表示式(10)相同。

对于协调函数对应的应变，由位移法求得

$$\varepsilon_c=B_c q-\frac{1}{|J|}N\alpha_c \tag{19}$$

其中，N为 ξ,η 的线性函数，与(12)式的N相同，而 α_c 是由节点参数 q 及节点坐标参数组成的广义参数。由于(19)式的N与广义杂交元(12)式的N相同，因此，只要证明由广义杂交法求得的用节点位移参数 q 表示的应变参数 α 与(18)式 α_c 相同，即证明了两种单元的用节点参数表示的应变相同。

在泛函 π_G 中令 $u_1=0$ 得

$$\pi_G=\iint_{A_e}\left[\frac{1}{2}\varepsilon^{T}A\varepsilon-\sigma^{T}\varepsilon+\sigma^{T}(D^{T}u_q)\right]dA \tag{20}$$

其中，$D^{T}u_q=\varepsilon_c=\frac{1}{|J|}N\alpha_c$，由此可求得，

$$\begin{aligned}\pi_G&=\iint_{A_e}\left[\frac{1}{2}\varepsilon^{T}A\varepsilon-\sigma^{T}\varepsilon+\sigma^{T}\varepsilon_c\right]dA\\&=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\alpha^{T}\frac{1}{|J|}N^{T}AN\alpha-\beta^{T}P^{T}N\alpha+\beta^{T}P^{T}N\alpha_c\right)d\xi d\eta\\&=\frac{1}{2}\alpha^{T}H\alpha-\beta^{T}W\alpha+\beta^{T}W\alpha_c\end{aligned} \tag{21}$$

其中，$W=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}P^{T}N\,d\xi d\eta$ 且为对角矩阵。

由 $\frac{\delta\pi_G}{\delta\beta^T}=0$ 得

$$W\alpha = W\alpha_c \tag{22}$$

由于W为满秩对角阵，得 $\alpha=\alpha_c$. 由此证明了二种单元有相同的应变表达式，证明了两种单元的等价性.

对于矩形单元，这两种单元都退化为 Q_6 元，因此，Q_6 元只是在矩形单元时与广义杂交元等价. 显然按(12)式计算应力时两种单元是等价的. 如用 $W^T\beta=H\alpha$ 和(13)式计算应力，两种单元是不等价的，计算表明，它将使应力精度变差.

值得一提的是文[3]建立的 Q_{cs6} 元，按一个新的泛函对应力计算做了进一步的改进.

四、结 论

1. 本文首次用广义杂交法推出了 Wilson 元及其修正模型，建立了杂交元与非协调元之间强的对应关系.

2. 对修正的 Wilson 元 Q_{MM6} 增加了广义变分解积.

3. 按广义杂交法建立的 Q_{cs6} 元[3]对应力计算的改进，可以看成是对修正 Wilson 元的进一步修正.

4. 原修正的 Wilson 元 Q_{M6}，目前尚未得到对应的杂交模型.

参 考 文 献

[1] Wilson, E. L., Taylor, R. L., Doherty W. P., and Ghabouss, J., Incompatible displacement models, in Fenves S. J., et al. (eds), Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, Academic press, New York, 1973, 43—57.

[2] 鹿晓阳，许焕然，刘玉文，研究 Wilson 不协调元的两个新概念，科学通报，33，13(1988)，1037—1038.

[3] Chen Wanji (陈万吉), Cheung, Y. K., A new approach for the hybrid element method, *Int. j. numer. methods eng.*, 24, (1987), 1697—1709.

[4] Fröer, M., Nilsson L., and Samuelsson, A., The rectangular plane stress element by Turner, Pian and Wilson, *Int. j. numer. methods eng.*, 8, (1974), 433—437.

[5] 卞学鐄，关于非协调位移元与杂交应力元的对应性，应用数学与力学，6，(1982)，715—721.

ON THE EQUIVALENT OF THE WILSON ELEMENT WITH THE GENERALIZED HYBRID ELEMENT

Chen Wanji

(Dalian University of Technology)

Abstract In this paper eqivalent of the generalized hybrid element with the modified Wilson element, which is derived by the generalized hybrid method, is proved. The Wilson element in case of rectangular and the modified Wilson element Q_{MM6} can be regarded as a special generalized hybrid element.

Key words Wilson nonconforming element, modified Wilson element, generalized hybrid element, equivalent