

二自由度结构受迫非线性振动响应的数值计算

张森文 C. W. S. To¹⁾

(北京农业工程大学) (加拿大西安大略大学)

提要 本文研究了由飞机尾部简化而成的二自由度结构受迫非线性振动。由于对复杂的运动方程不作进一步简化,方程中含有强非线性耦合项,首先采用数字滤波技术对系统受确定性激励的响应进行了计算;然后在数字模拟计算的基础上用嫁接的 ITO 积分方法对系统受随机白噪音激励的响应进行了计算。结果表明, ITO 积分的综合嫁接方法有更高的计算效率,结果并表明系统的非线性耦合部分对响应有重大影响,是不能加以忽略的。本文的研究为多自由度非线性结构的响应计算提供了有用的思想和方法。

关键词 非线性随机振动,数字滤波技术, ITO 积分,数字模拟方法。

一、引言

本文研究的系统如图1所示,可看作是由飞机尾部简化而成的二自由度结构,在飞机着陆、起飞阶段,将受到非稳态的随机激励,在强度设计计算中必须考虑系统的非线性和模态相互作用产生的自激振动。这个模型被 Haddow 和 Barr^[1], Box 和 Roberts^[2] 等人研究过。在[1][2]中,模态相互作用,内共振及饱和等现象已经被讨论过。在那里方程被大大简化,从而可以使用摄动法和近似解析法。

本文所提供的研究有三点是值得注意的:

(1) 在运动方程的推导中,几乎考虑了全部非线性项而不作进一步简化;

(2) 为了处理方程的非线性部分,采用伪载荷(Pseudo-loading)技术,首先计算系统对确定性激励的响应,所用的方法是递归数字滤波技术(Recursive Digital Filtering Technique);

(3) 为了计算系统受随机激励的响应,在数字模拟方法的基础上,采用了与上述方法相综合的嫁接的 ITO's Calculus 方法,从而获得了与纯数字模拟方法相比较效率高得多的计算方法。

计算结果表明,系统在非线性和强耦合条件下的动力学行为,远比线性条件下复杂,

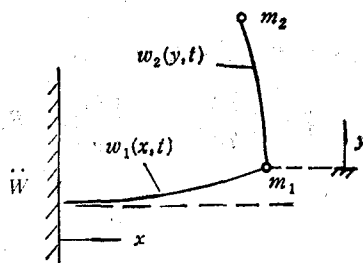


图1 系统模型及坐标系, $\ddot{w}$ 代表基座激励

1) Associate Professor of University of Western Ontario NSERS Research Fellow, Canada.

本文由编委黄克累同志推荐,于1988年4月7日收到,1989年12月8日收到修改稿。

本文提供了计算多自由度系统非线性振动响应的新思想和可供使用的方法。

二、系统的运动方程

图 1 系统中, $w_1(x, t)$, $w_2(y, t)$ 分别代表两个梁的挠度, 在只考虑 m_1, m_2 的惯性情形下, w_1, w_2 必须满足下列方程及边界条件

$$\partial^4 w_1 / \partial x^4 = 0 \quad 0 \leq x \leq l_1 \quad (1a)$$

$$\partial^4 w_2 / \partial y^4 = 0 \quad 0 \leq y \leq l_2 \quad (1b)$$

其中 l_1, l_2 分别为两梁长度, 并有边界条件:

$$w_1(0, t) = 0, \quad \partial w_1(0, t) / \partial x = 0 \quad (2a, b)$$

$$w_2(0, t) = 0, \quad \partial^2 w_2(l_2, t) / \partial y^2 = 0 \quad (2c, d)$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x}(l_1, t) = \frac{\partial w_2}{\partial y}(0, t), \quad (EI)_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(l_1, t) = (EI)_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}(0, t) \quad (2e, f)$$

在(2d)和(2f)中 m_1, m_2 的转动惯量被忽略。用多项式展开 w_1, w_2 可写作

$$w_1 = A_1(t)x^3 + B_1(t)x^2 + C_1(t)x + D_1(t) \quad (3a)$$

$$w_2 = A_2(t)y^3 + B_2(t)y^2 + C_2(t)y + D_2(t) \quad (3b)$$

将方程(3)代入(2)可得到

$$C_1 = D_1 = D_2 = 0 \quad (4a)$$

$$A_1 = -(EI)_1 / 3(EI)_2 \cdot (3A_2 l_1 + B_2) \quad (4b)$$

$$B_2 = (EI)_1 / (EI)_2 \cdot (3A_1 l_1 + B_1) \quad (4c)$$

$$C_2 = 3A_1 l_1^2 + 2B_1 l_1 \quad (4d)$$

因此系统由广义坐标 A_1, B_1 所完全描述。由拉格朗日方法可以得到系统的运动方程^[4]。

$$[M]\ddot{\underline{q}} + [K]\underline{q} + \ddot{W}[P]\underline{q} + [A]\ddot{\underline{q}} + [B]\begin{Bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_2^2 \end{Bmatrix} + [C]\begin{Bmatrix} q_1^3 \\ q_1^2 q_2 \\ q_1 q_2^2 \\ q_2^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

其中, $q_1 = A_1 l_1^3, q_2 = B_1 l_1^2$,

$$\ddot{\underline{q}} = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix}, \quad \underline{q}_1 = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}, \quad F_1 = -(m_1 + m_2)\ddot{W}, \quad F_2 = -a(m_1 + m_2)\ddot{W}$$

$$a = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2$$

且

$$[M] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} 2h_1 & h_2 \\ h_2 & 2h_2 \end{bmatrix}, \quad [P] = \begin{bmatrix} -2m_2 K_4 & -m_2 K_5 \\ -m_2 K_5 & -2m_2 K_6 \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \beta_{11} q_1^2 + \lambda_{11} q_1 q_2 + r_{11} q_1^2 + d_{11} q_1 + e_{11} q_2 & \beta_{12} q_1^2 + \lambda_{12} q_1 q_2 + r_{12} q_1^2 + d_{12} q_1 + e_{12} q_2 \\ \beta_{21} q_1^2 + \lambda_{21} q_1 q_2 + r_{21} q_1^2 + d_{21} q_1 + e_{21} q_2 & \beta_{22} q_1^2 + \lambda_{22} q_1 q_2 + r_{22} q_1^2 + d_{22} q_1 + e_{22} q_2 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} d_{13} q_1 + e_{13} q_2 + \alpha_{13} & d_{14} q_1 + e_{14} q_2 + \alpha_{14} & d_{15} q_1 + e_{15} q_2 + \alpha_{15} \\ d_{23} q_1 + e_{23} q_2 + \alpha_{23} & d_{24} q_1 + e_{24} q_2 + \alpha_{24} & d_{25} q_1 + e_{25} q_2 + \alpha_{25} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 16(n_1 + p_1) & 12(n_2 + p_2) & 8(n_3 + p_3) & 4(n_4 + p_4) \\ 4(n_2 + p_2) & 8(n_3 + p_3) & 12(n_4 + p_4) & 16(n_5 + p_5) \end{bmatrix}$$

各项系数 $\alpha_{ii}, \beta_{ii}, \gamma_{ii}, d_{ii}, e_{ii}, n_i, p_i$ 等见文献[4]。

由此可见,系统的方程含有强非线性复杂的耦合成分,只能采取数值计算的方法,在方程(5)中未加入阻尼项,在以后的计算中,阻尼被加上并粗略地考虑为比例阻尼。

三、系统对确定性激励的响应

本文使用了 C. W. S. To^[3] 发展的数字递归滤波技术对确定性激励的响应进行了计算:

对已经正则化的方程

$$\ddot{Q}_r + 2\zeta_r\omega_r\dot{Q}_r + \omega_r^2 Q_r = f_r \quad (6)$$

由文献[3]可以得到

$$Q_r(sT) = 2B_r(c)Q_r[(s-1)T] - E_r(2T)Q_r[(s-2)T] + Tf_r[(s-1)T]h_r(T) \quad (7)$$

$$\dot{Q}_r(sT) = 2B_r(c)\dot{Q}_r[(s-1)T] - E_r(2T)\dot{Q}_r[(s-2)T] + \frac{T}{2}\{f_r(sT) - 2\zeta_r\omega_r f_r[(s-1)T]h_r(T) - E(2T)f_r[(s-2)T]\} \quad (8)$$

$$\ddot{Q}_r(sT) = f_r(sT) - 2\zeta_r\omega_r\dot{Q}_r(sT) - \omega_r^2 Q_r(sT) \quad (9)$$

这里, T 为时间间隔, sT 为第 s 个离散时间步骤, $s = 0, 1, 2, \dots$ 而 $f_r(sT)$ 描述了第 s 步中系统所受激励, ω_r 为第 r 阶固有频率, 且有

$$B_r(c) = \exp(-\zeta_r\omega_r T) \cos \Omega_r T$$

$$E_r(2T) = \exp(-2\zeta_r\omega_r T)$$

$$h_r(T) = \frac{1}{\omega_r} \exp(-\zeta_r\omega_r T) \sin \Omega_r T, \quad \text{其中 } \Omega_r = \sqrt{1 - \zeta_r^2} \omega_r$$

为求得方程(5)的数值解, 用下列步骤计算:

1. 采用伪载荷技术 (Pseudo-loading 技术), 将方程(5)中左边的非线性部分移至等号右边, 作为伪载荷, 即

$$[M]\ddot{q} + [C]\dot{q} + [K]q + \dot{W}[P]q = \{F\} - \left([A]\ddot{q} + [B] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_1\dot{q}_2 \\ \dot{q}_2^2 \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} q_1^3 \\ q_1^2q_2 \\ q_1q_2^2 \\ q_2^3 \end{Bmatrix} \right) = \{F\} - \{F_{p,r}\} \quad (10)$$

这里 $\{F_{p,r}\}$ 即为伪载荷, 方程左边变成带参数激励的自由振动方程;

2. 将方程(10)正则化, 设 $[R]$ 为正则模态矩阵

$$\ddot{Q}_r + 2\zeta_r\omega_r\dot{Q}_r + \omega_r^2 Q_r + \omega_r^2 \dot{W} Q_r = [R]^T F_r - [R]^T F_{p,r} \quad (11)$$

3. 在每一时间步骤中, 利用方程(7), (8), (9)计算伪载荷并重新排列, 可以得到

$$\ddot{Q}_{1s} + 2\zeta_1\omega_1\dot{Q}_{1s} + (\omega_1^2 + \omega_{1g}\dot{W}_s)Q_{1s} = \text{cont}1_s, \quad (12)$$

$$\ddot{Q}_{2s} + 2\zeta_2\omega_2\dot{Q}_{2s} + (\omega_2^2 + \omega_{2g}\dot{W}_s)Q_{2s} = \text{cont}2_s, \quad (13)$$

其中, $\text{cont}1_s$, $\text{cont}2_s$ 为每一步骤的载荷, 它们与第 $s, (s-1), (s-2)$ 步的激励有关, 详见参考文献[4].

4. 再次使用公式(7), (8), 从(12), (13)中计算每一时间步骤中位移及速度响应 Q_s 及 $\dot{Q}_s$:

$$5. \text{再转换为物理坐标 } \begin{cases} q_1 \\ q_2 \end{cases} = [R] \begin{cases} Q_1 \\ Q_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{cases} = [R] \begin{cases} \dot{Q}_1 \\ \dot{Q}_2 \end{cases}$$

由具体计算参数 $m_1 = 0.232\text{kg}$, $m_2 = 0.224\text{kg}$, $l_1 = 0.253\text{m}$, $l_2 = 0.172\text{m}$, $(EI)_1 = 14.4\text{Nm}^2$, $(EI)_2 = 1.9\text{N} \cdot \text{m}^2$, $(ES)_1 = 1.728 \times 10^3\text{kN}$, $(ES)_2 = 2.28 \times 10^3\text{kN}$, 可以计算得到系统的固有频率为 $\omega_1 = 50.9\text{rad/sec}$, $\omega_2 = 99.27\text{rad/sec}$.

设支座激励为简谐的, 即 $\dot{W} = B_1 \cos \omega t$, ω 分别等于 ω_1 和 ω_2 , 可以计算得到系统对确定性激励的响应. 计算结果表明, 当激励频率为 ω_1 时, 非线性情形下位移响应 q_1, q_2 均比线性情形(相当于方程(10)中伪载荷部分为零)增大约 20%, 图 2 给出了 q_2 的结果.

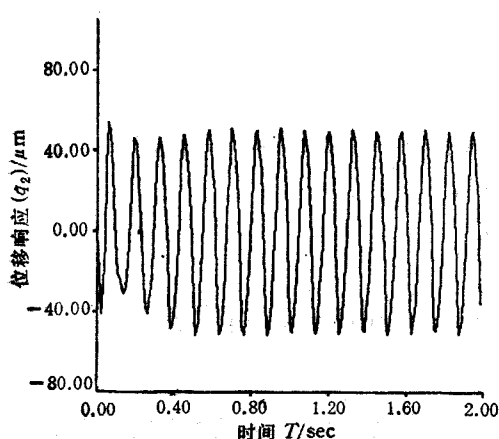


图 2(a) 非线性情形下位移响应(q_2)

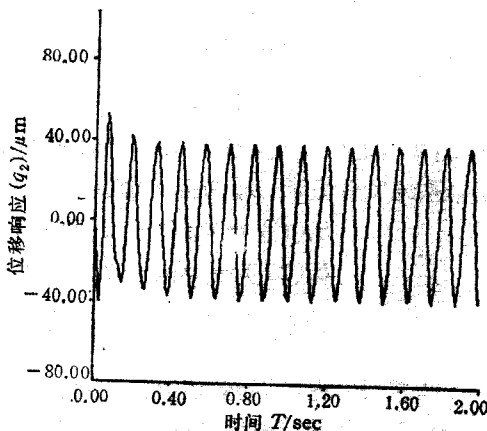


图 2(b) 线性情形下位移响应(q_2)

激励为 $E_p = 0.3 \cos(50.9t)$, $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.1$, $\Delta t = 0.01\text{sec}$.

四、系统对随机激励响应的计算

1. 基于数字递归滤波技术的数字模拟方法所得到的结果:

设支座振动为随机过程, 并假定 $\dot{W}$ 是白噪音或调制白噪音(modulated white noise), 则(12), (13)中 $\text{cont}1_s$ 和 $\text{cont}2_s$ 仍可看作是高斯宽带激励, 用 250 组(每组 1000 个)随机数(高斯分布, $\sigma=1.0$)模拟白噪音, 在每个时间步骤计算 $\text{cont}1_s$ 和 $\text{cont}2_s$, 然后用 4 阶 Runge-Kutta 法积分(12), (13), 最后再求 250 个样本的平均值, 可求得每一时刻的位移响应^[5].

2. 由 ITO's Calculus 的综合嫁接方法得到的结果:

根据 T. T. Soong^[6], 对熟知的 ITO 随机微分方程

$$d\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), t) + \mathbf{G}(\mathbf{z}(t), t)d\mathbf{B}(t) \quad (14)$$

其中 $d\mathbf{B}(t) = \mathbf{W}d\mathbf{r}$, $\mathbf{W}$ 为维纳过程矢量, 且有

$$E\{dB_i(t)dB_j(t)\} = 2D_{ij}dt$$

对二阶矩方程可以得到

$$\{\dot{\mathbf{N}}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{N}\} + \{\mathbf{C}\} \quad (15)$$

其中 $\{\mathbf{N}\}$ 为二阶矩列阵, 对二自由度系统可以参考文献[7]得到 $[\mathbf{A}]$, $\{\mathbf{C}\}$ 的具体展开式, 它们与系统参数和输入的激励 D_{ij} 有关。

为了将 ITO 积分方法用于本文所研究的二自由度结构受迫非线性振动响应的计算, 首先必须假定过程为各态历经的, 只用一组随机数用前述的数字模拟方法得到方程(12), (13)右端的 $\text{cont}1$, 和 $\text{cont}2$, 中各项系数(此时不采用多个样本平均的方法), 得到每一时间步骤中 cont_{ij} , ($i = 1, 2$), 然后用下列公式计算 D_{ij}

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \langle dB_i dB_j \rangle / dt = \frac{1}{2} \langle \text{cont}_{ij}, \text{cont}_{ij} \rangle \quad i, j = 1, 2 \quad (16)$$

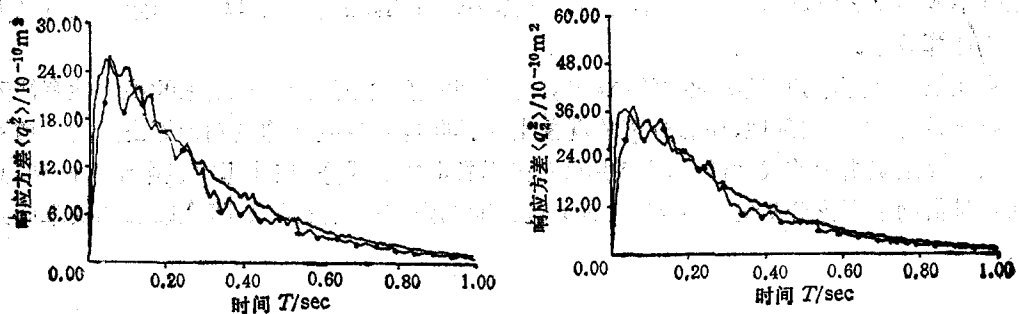


图 3 两种方法比较

◆◆ 基于递归数字滤波技术的数字模拟方法 — ITO 积分的综合嫁接方法
激励为调制白噪音 ($\sigma^2 = 0.6$), $\xi_1 = \xi_2 = 0.2$, $\Delta t = 0.01 \text{sec}$.

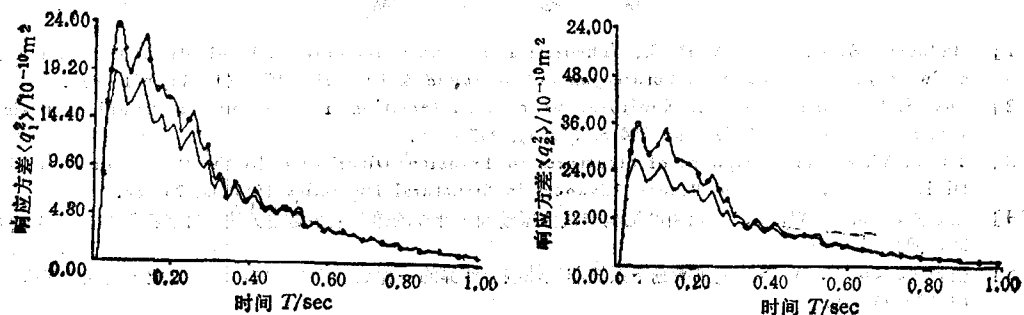


图 4 线性及非线性结果比较

◆◆ 非线性情形 — 线性情形

激励为调制白噪音 $\xi_1 = \xi_2 = 0.2$, $\Delta t = 0.01 \text{sec}$.

其中符号 $\langle \rangle$ 表示求集合平均。 $\langle \text{cont}^2 1, \rangle$, $\langle \text{cont}^2 2, \rangle$ 和 $\langle \text{cont}1, \text{cont}2, \rangle$ 的具体展开式, 参看文献[8]。在计算 D_{ij} 后用 4 阶 Runge-Kutta 法积分方程(15)即可得到响应的方差。

图 3 给出了应用本文的 ITO's Calculus 与数字模拟方法相结合的综合嫁接方法的计算结果,同时给出了用纯数字模拟方法计算的结果,输入的激励均为调制白噪音,两者具有很好的一致性,但前者具有高得多的计算效率,在 Prime 750 机上,纯数字模拟方法的 CPU 时间为 12m 39s,而用综合嫁接的 ITO 积分方法, CPU 时间为 3m 20s 减少了约三倍。

图 4 给出了用综合嫁接的 ITO 积分方法对线性和非线性情形下的计算结果,两者间有明显的差别,表明系统的非线性耦合部分对响应有重大影响。

五、结 语

对于二自由度结构非线性受迫振动响应的计算,由于对复杂的运动方程不作进一步简化而采用直接数值积分的方法,可以得到一些重要的结果。本文首先从分段线性化的基本思想出发,分割为多次时间步骤采用递归数字滤波技术,对确定性激励下的响应进行计算;又在此基础上分别用数字模拟方法和综合嫁接的 ITO 积分方法,计算了系统对随机激励的响应方差。所有这些计算均表明,系统的非线性耦合部分对响应有重大的影响,完全不能加以忽略,即便激励很小也罢。计算实践表明,综合嫁接 ITO 积分方法有高得多的计算效率。

在数值计算中,时间离散化的 Δt 值,即时间间隔大小的选择对结果的稳定性有严重的影响,不仅影响收敛性,还有分叉的现象出现。同时,对离散化的递归计算公式的数值稳定性以及系统由于非线性部分所产生的内在不稳定性区分,在计算实践中难于做到,必须同时借助于理论分析的定性方法,有关这方面的内容的研究结果,将在以后的文章中给出。

(本文的研究工作是第一作者在加拿大 Univ. of Western Ontario 工作期间完成,在此谨向给予研究工作以支持、帮助的该大学工程科学学院的其他教授表示谢忱。)

参 考 文 献

- [1] Haddow, A. G., Barr, A. D. S., Theoretical and Experimental Study of Modal Interaction in a Two-degree-of-freedom Structure *Journal of Sound & Vibration* 97, 3(1984), 451—473.
- [2] Box, S. L., Roberts, J. W., Nonlinear Vibration Interaction in Systems of Coupled Beams, *Journal of Sound & Vibration* 104 3, (1986), 497—520.
- [3] To, C. W. S., The Response of Structures to Transient Disturbances by the Mode-Cum-Recursive Digital Filtering Method Recent Advances in Structural Dynamics 1(1980), 73—88.
- [4] 张森文, To, C. W. S., 二自由度结构非线性振动响应计算的递归数字滤波方法, 北京农业工程大学学报, 1(1989).
- [5] 张森文, To, C. W. S., 随机激励下系统非线性响应计算的一种数字模拟方法, 北京农业工程大学学报, 3 (1988), 95—102.
- [6] Soong, T. T., Random Differential Equations in Science and Engineering Academic Press (1973).
- [7] Cumming, I. G., Derivation of the Moments of a Continuous Stochastic System. *International Journal of Control*, 5(1967), 85—90.
- [8] 张森文, To, C. W. S., 二自由度结构非线性随机振动响应计算的 ITO 积分综合方法, 北京农业工程大学学报, 2(1989).

THE NONLINEAR RESPONSES OF A FORCED TWO-DEGREE-OF-FREEDOM STRUCTURE

Zhang Senwen

(Beijing Agri. Engr. Univ.)

C. W. S. To

(Univ. of Western Ontario, Canada)

Abstract In this paper the nonlinear responses of a forced TDOF structure are investigated. There are some highly nonlinear and coupling terms in the motion equation of the system. Firstly, the responses of the system to deterministic excitation are calculated by the Recursive-digital-Filtering-Technique (RDFT). Then the responses of the system to random excitation are calculated by the Simulation Method based on RDFT and the Ito's Calculus-cum-Simulation-Method (ICSM).

The results show that the ICSM is more efficient and the nonlinear coupling terms have a significant influence on the responses of the system.

This study gives some useful and efficient computation methods for nonlinear response of MDOF structure.

Key words nonlinear random vibration, recursive-digital-filtering-technique, simulation method, ITO's calculus-cum-simulation-method.