

平面湍流混合层的准相似性理论

周培源 黄永念
(北京大学)

孟庆国
(吉林大学)

摘要 本文应用周培源^[1-3]的理论,给出了不可压缩平面湍流混合层的一级近似解。我们考虑连续性方程,平均运动方程和二阶脉动速度关联方程,忽略二阶脉动速度关联方程中的三阶关联项,并引进自模拟假设,得到了和实验符合的平均速度,二阶脉动速度关联项和湍流微尺度等的理论计算结果。

关键词 准相似性,自模拟,湍流微尺度,二阶关联。

一、引言

流体的基本运动方程是 Navier-Stokes 方程。但是,由于湍流运动的复杂性和方程的非线性,使得直接用 Navier-Stokes 方程来处理湍流问题是极为困难的。Reynolds 通过对 Navier-Stokes 方程取平均而得到平均运动方程,但这一方程是不封闭的,即方程中出现了 Reynolds 应力项作为未知项。解决平均运动方程的不封闭性问题,最初通常是按照 Boussinesq 首先提出的假定: 引进一个湍流粘性系数,给出一个 Reynolds 应力项与平均速度梯度之间的一个关系式。后来,为了确定这个湍流粘性系数,Prandtl, Von Karman 和 Taylor 等分别提出了动量转移和涡量转移的混合长理论。

在三十年代末期,周培源首先提出用湍流脉动速度方程作为处理湍流问题的出发点,并给出了二阶和三阶脉动速度关联方程^[4],文章[1]进一步发展了这一工作。

由于湍流脉动方程是非线性的,因而从湍流脉动方程导出的二阶和二阶以上的脉动速度的关联方程也是不封闭的,即方程中出现了更高一阶的脉动速度关联项作为未知项。对此封闭性问题的处理方法,周培源首先提出了截断方法^[5],即将关联方程中出现的高阶关联项略去。文章[3]进一步提出了奇阶截断和逐级逼近迭代的封闭方法。这一方法的基本思想是: 逐级在偶数阶关联方程中截去高一阶的奇阶关联项,从而得到一组封闭方程;再进行级与级之间的数值迭代,以提高结果的精度。另外,这些关联方程中还出现了脉动压力梯度和脉动速度的关联项以及湍流耗散项,文章[1]也给出了对它们的处理方法。

本文采用奇阶截断和逐级逼近迭代方法处理不可压平面湍流混合层问题。在一级近似下,忽略二阶关联方程中的三阶关联项,并运用文章[2]给出的准相似性条件。我们假定在平面湍流混合层的流动后期,流动具有自模拟性。对方程组的求解采用迭代方法,并将计算结果同实验^[6,7]作了比较。

本文于1988年11月4日收到,1989年5月25日收到修改稿。

二、湍流的运动方程及准相似性条件

连续性方程和平均运动方程为:

$$U_{i,i} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U^j U_{j,i} = -\frac{1}{\rho} \bar{p}_{,i} + \frac{1}{\rho} \tau_{i,i}^j + \gamma \nabla^2 U_i \quad (2.2)$$

其中

$$\tau_i^j = -\rho \overline{w_i w_j} \quad (2.3)$$

为 Reynolds 应力项, U_i 为平均速度, w_i 为脉动速度, $\bar{p}$ 为压力的平均项, γ 为运动学粘性系数.

由文章[1], 我们引进二阶关联方程:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial t} - \frac{1}{\rho} (U_{i,j} \tau_k^j + U_{k,j} \tau_i^j) - \frac{1}{\rho} U^j \tau_{ik,j} + (\overline{w^j w_i w_k})_{,j} \\ = -\frac{1}{\rho} (\bar{\omega}_{,i} w_k + \bar{\omega}_{,k} w_i) - \frac{1}{\rho} \nabla^2 \tau_{ik} - 2\gamma g^{mn} \overline{w_{i,m} w_{k,n}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中, $\bar{\omega}$ 为压力的脉动项.

首先采用奇阶截断方法. 即忽略二阶关联方程(2.4)中的三阶关联项 $(\overline{w^j w_i w_k})_{,j}$. 另外, 在大雷诺数的条件下, 进一步忽略粘性项: $-\frac{\gamma}{\rho} \nabla^2 \tau_{ik}$.

根据文章[1][2], (2.4)式的脉动压力梯度和脉动速度的关联项有下列简化

$$-\frac{1}{\rho} (\bar{\omega}_{,i} w_k + \bar{\omega}_{,k} w_i) = -a_{mik}^n U_n^m - a_{mik}^{np} U_{,np}^n - b_{ik} \quad (2.5)$$

其中

$$a_{mik}^n = \frac{1}{2\pi} \iiint [(\overline{w'^n w_i})'_{,mk} + (\overline{w'^n w_k})'_{,mi}] \frac{1}{\gamma} dv' \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} a_{mik}^{np} = \frac{1}{2\pi} \iiint \left\{ (\overline{w'^n w_i})'_{,m} \delta_k^p + (\overline{w'^n w_k})'_{,m} \delta_i^p \right. \\ \left. + \xi^p [(\overline{w'^n w_i})'_{,mk} + (\overline{w'^n w_k})'_{,mi}] \right\} \frac{1}{\gamma} dv' \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$b_{ik} = \frac{1}{4\pi} \iiint [(\overline{w'^m w'^n w_i})'_{,mnk} + (\overline{w'^m w'^n w_k})'_{,mni}] \frac{1}{\gamma} dv' \quad (2.8)$$

另外,

$$a_{mik}^n = q^2 a'_{mik}, \quad a_{mik}^{np} = q^2 \lambda a'^{np}_{mik}, \quad b_{ik} = \frac{q^2}{\lambda} b'_{ik} \quad (2.9)$$

其中, $q^2 = \overline{w^j w_j}$ 为二倍的湍动能; λ 为湍流微尺度; a'_{mik} , a'^{np}_{mik} , b'_{ik} 均为待定参数.

湍流耗散项可表为^[1]

$$-2\gamma g^{mn} \overline{w_{i,m} w_{k,n}} = \frac{2\gamma}{3\lambda^2} (k-5) q^2 g_{ik} - \frac{2\gamma k}{\lambda^2} \overline{w_i w_k}, \quad (2.10)$$

其中, k 为无量纲常量.

于是, 我们得到简化后的二阶关联方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{w_i w_k}}{\partial t} + (\overline{U_{i,j} w_k w_j} + \overline{U_{k,i} w_i w_j}) + U^j (\overline{w_i w_k})_{,j} = - a'_{m i k} q^2 U_{,m}^m \\ - a'_{m i k} q^2 \lambda U_{,m}^m - b'_{ik} \frac{q^3}{\lambda} + \frac{2\gamma}{3\lambda^2} (k-5) q^2 g_{ik} - \frac{2\gamma k}{\lambda^2} \overline{w_i w_k} \end{aligned} \quad (2.11)$$

另外, 基于均匀各向同性湍流的准相似性条件^[1], 周培源将其推广到一般剪切湍流场中^[2], 形式如下

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\gamma} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + U^j \lambda_{,j} \right) = \frac{1}{R_0} \left\{ R_1^2 - \left[R_1 + \frac{k_1}{\gamma} \lambda^2 (g^{kl} U^l_{,k} U_{i,l})^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k_2}{\gamma} \lambda^3 (g^{ij} g^{kl} g^{mn} Q_{ik,m} Q_{jl,n})^{\frac{1}{2}} \right]^2 + 2R_0 \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

其中 $R_1 = q\lambda/\gamma$ 为湍流雷诺数; $Q_{ik} = U_{i,k} - U_{k,i}$; k_1, k_2, R_0 和 R_1 均为无量纲常量。

三、平面湍流混合层理论

我们将湍流二阶关联方程(2.11)和准相似性条件(2.12)应用于平面湍流混合层问题, 且仅考虑已达到充分发展了的流动区域。此时, 我们认为主流动定常。

1. 平面湍流混合层的基本方程

记 U_0 为均匀来流速度; U, V, W 和 w_1, w_2, w_3 分别为坐标 x, y, z 方向的平均速度和脉动速度。

对于我们的三维平面流动, $W = 0, \overline{w_1 w_3} = 0, \overline{w_2 w_3} = 0$ 。由于混合层限制在狭窄的区域内, 故 $|U| \gg |V|, \left| \frac{\partial}{\partial y} \right| \gg \left| \frac{\partial}{\partial x} \right|$ 。于是由(2.1), (2.2), (2.3)和(2.11)各式, 我们得到下列方程

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (3.1.1)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial \overline{w_1 w_2}}{\partial y} \quad (3.1.2)$$

$$\begin{aligned} U \frac{\partial \overline{w_1^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{w_1^2}}{\partial y} + 2\overline{w_1 w_2} \frac{\partial U}{\partial y} = - a'_{111} q^2 \frac{\partial U}{\partial y} - a'_{112} q^2 \lambda \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ - b'_{11} \frac{q^3}{\lambda} + \frac{2\gamma}{3\lambda^2} (k-5) q^2 - \frac{2\gamma k}{\lambda^2} \overline{w_1^2} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} U \frac{\partial \overline{w_1 w_2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{w_1 w_2}}{\partial y} + \overline{w_2^2} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{w_1 w_2} \frac{\partial V}{\partial y} = - a'_{112} q^2 \frac{\partial U}{\partial y} \\ - a'_{122} q^2 \lambda \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - b'_{12} \frac{q^3}{\lambda} - \frac{2\gamma k}{\lambda^2} \overline{w_1 w_2} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

$$U \frac{\partial \overline{w_2^2}}{\partial x} + V \frac{\partial \overline{w_2^2}}{\partial y} + 2\overline{w_2^2} \frac{\partial V}{\partial y} = - a'_{122} q^2 \frac{\partial U}{\partial y} - a'_{222} q^2 \lambda \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$-b'_{22} \frac{q^3}{\lambda} + \frac{2\gamma}{3\lambda^2} (k-5)q^2 - \frac{2\gamma k}{\lambda^2} \bar{w}_2^2 \quad (3.1.5)$$

$$U \frac{\partial \bar{w}_3^2}{\partial x} + V \frac{\partial \bar{w}_3^2}{\partial y} = -a'_{133} q^2 \frac{\partial U}{\partial y} - a'_{133} q^2 \lambda \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - b'_{33} \frac{q^3}{\lambda} + \frac{2\gamma}{3\lambda^2} (k-5)q^2 - \frac{2\gamma k}{\lambda^2} \bar{w}_3^2 \quad (3.1.6)$$

将(3.1.3), (3.1.5), (3.1.6)三式相加, 并略去高阶小量, 得到 $q^2 (= \bar{w}_1^2 + \bar{w}_2^2 + \bar{w}_3^2)$ 所满足的微分方程

$$U \frac{\partial q^2}{\partial x} + V \frac{\partial q^2}{\partial y} + 2\bar{w}_1 \bar{w}_2 \frac{\partial U}{\partial y} = -a_1 q^2 \frac{\partial U}{\partial y} - a_2 q^2 \lambda \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - b_1 \frac{q}{\lambda} - \frac{10\gamma}{\lambda^2} q^2 \quad (3.1.7)$$

其中, $a_1 = a'_{111} + a'_{122} + a'_{133}$; $a_2 = a'_{111} + a'_{122} + a'_{133}$; $b_1 = b'_{11} + b'_{22} + b'_{33}$.

对于准相似性条件(2.12), 由于在均匀各向同性湍流的情况下, R_0 很小[2], 我们可以忽略它的作用。于是简化后的准相似性条件如下

$$R_1 = R_0 + \frac{k_1}{\gamma} \lambda^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| + \frac{k_2}{\gamma} \lambda^3 \left| \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right| \quad (3.1.8)$$

2. 平面湍流混合层的自模拟方程

我们假定在平面湍流混合层的充分发展了的流动区域内存在自模拟解。

取无量纲自变量为

$$\eta = (y - y_{\frac{1}{2}m})/x \quad (3.2.1)$$

这里 $y_{\frac{1}{2}m}$ 为主流速度 U 等于 $\frac{1}{2} U_0$ 时的 y 坐标。实验^[7]表明, $y_{\frac{1}{2}m}$ 是 x 的线性函数, 于是

我们设

$$y_{\frac{1}{2}m} = \beta x \quad (3.2.2)$$

由流函数 ϕ 与平均速度 U 和 V 的下列关系

$$U = \partial\phi/\partial y, \quad V = -\partial\phi/\partial x \quad (3.2.3)$$

我们引进 ϕ 的无量纲表示

$$\phi = U_0 x F(\eta) \quad (3.2.4)$$

另外, 我们取

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 f(\eta), \quad V = U_0 g(\eta) \\ \bar{w}_1^2 &= U_0^2 f_{11}(\eta), \quad \bar{w}_1 \bar{w}_2 = U_0^2 f_{12}(\eta) \\ \bar{w}_2^2 &= U_0^2 f_{22}(\eta), \quad \bar{w}_2 \bar{w}_3 = U_0^2 f_{23}(\eta) \\ q^2 &= U_0^2 I^2(\eta), \quad I^2 = f_{11} + f_{22} + f_{33} \\ \lambda &= x J(\eta), \quad \eta = (y - \beta x)/x \end{aligned} \right\} \quad (3.2.5)$$

记一撇为对 η 的导数。由(3.2.3), (3.1.1), (3.1.2)各式得

$$f = F, \quad g = (\eta + \beta)F' - F \quad (3.2.6)$$

$$(\eta + \beta)f' - g' = 0 \quad (3.2.7)$$

$$f'_{12} = FF'' \quad (3.2.8)$$

由(3.1.3)–(3.1.8)各式得

$$\begin{aligned} -Ff'_{11} = & -2F''f_{12} - a'_{111}I^2F'' - a'_{111}I^2JF''' - b'_{11}\frac{I^3}{J} \\ & + \frac{2(k-5)}{3J^2R_x}I^2 - \frac{2k}{J^2R_x}f_{11} \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$\begin{aligned} -Ff'_{12} = & -F''f_{22} - (\eta + \beta)F''f_{12} - a'_{112}I^2F'' - a'_{112}I^2JF''' - b'_{12}\frac{I^3}{J} \\ & - \frac{2k}{J^2R_x}f_{12} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

$$\begin{aligned} -Ff'_{22} = & -2(\eta + \beta)F''f_{22} - a'_{122}I^2F'' - a'_{122}I^2JF''' - b'_{22}\frac{I^3}{J} \\ & + \frac{2(k-5)}{3J^2R_x}I^2 - \frac{2k}{J^2R_x}f_{22} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

$$\begin{aligned} -Ff'_{33} = & -a'_{133}I^2F'' - a'_{133}I^2JF''' - b'_{33}\frac{I^3}{J} \\ & + \frac{2(k-5)}{3J^2R_x}I^2 - \frac{2k}{J^2R_x}f_{33} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

$$-F(I^2)' = -2F''f_{12} - a_1I^2F'' - a_1I^2JF''' - b_1\frac{I^3}{J} - \frac{10}{J^2R_x}I^2 \quad (3.2.13)$$

$$I = \frac{R_l}{JR_x} + k_1J|F''| + k_2J^2|F'''| \quad (3.2.14)$$

其中, $R_x = U_0x/\nu$, 它是坐标 x 的线性函数。

从(3.2.9)–(3.2.14)式我们看到: 在对(3.1.3)–(3.1.8)式进行自模拟简化时, 二阶关联方程中的湍流耗散项和准相似性条件的含有 R_l 的项仍然与坐标 x 有关, 且随 x 的增大而成正比例地减小。我们认为: 在平面湍流混合层的充分发展了的区域, 湍流流动已充分衰减且 x 的值很大。作为一级近似, 在计算时我们忽略了这些与 x 有关的项。

3. 自模拟方程组的求解

我们在微型计算机 IBM PC/XT 上, 应用已给出的自模拟方程组(3.2.8)–(3.2.14), 对平面湍流混合层的流动进行求解。具体采用迭代求解方法。

首先引进 Boussinesq 假设, 即令

$$\overline{w_1 w_2} = -\tau_T \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.3.1)$$

其中, τ_T 为湍流粘性系数。

按照通常的自模拟求解方法, 令

$$R = U_0x/\nu_T = \text{const} \quad (3.3.2)$$

于是, 由(3.1.1), (3.1.2)和(3.2.5)式, 我们得到主流平均速度 f 所满足的方程

$$-f' \int_{-\infty}^{\eta} fd\eta = \frac{1}{R}f'' \quad (3.3.3)$$

取上式解的形式为

$$f(\eta) = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \left(\sqrt{\frac{2R}{\pi}} \eta \right) \right] \quad (3.3.4)$$

其中, 常数 R 满足下列关系式

$$\beta \sqrt{R} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \left(\log 2 - \frac{1}{2} \right) \quad (3.3.5)$$

我们取 $R = 200$, $\beta = 0.0396$. 图1给出了(3.3.4)式同实验^[6]的比较.

作为迭代的初始值, 我们由(3.3.4)和(3.2.6)的第一式确定 F 的分布, 再由(3.2.8)式确定 f_{12} 的分布.

首先用 Runge-Kutta 方法对(3.2.13)和(3.2.14)式联立求解, 以确定 I^2 和 J ; 其次, 分别由(3.2.9), (3.2.11)和(3.2.12)式确定 f_{11}, f_{22}, f_{33} 的值.

作为一次迭代, 或用(3.2.10)式进一步确定 f_{12} , 并同已知的 F 值作为迭代的初始值, 采用与上述相同的方法求解 I^2, J, f_{11}, f_{22} 和 f_{33} , 并由(3.2.10)式再次确定 f_{12} . 计算中只迭代一次. 图1—图9为理论计算结果, 并同实验^[6,7]作了比较. 我们看到两者符合的较好.

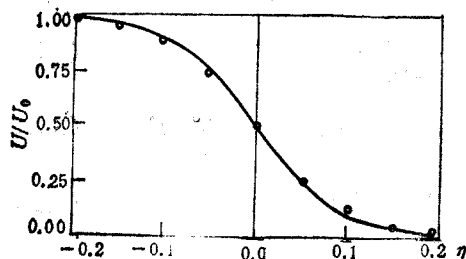


图1 ——理论; ○实验^[6]

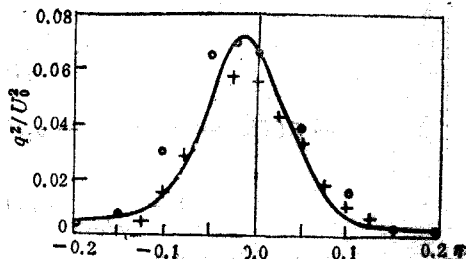


图2 ——理论; ○实验^[6]; +实验^[7]

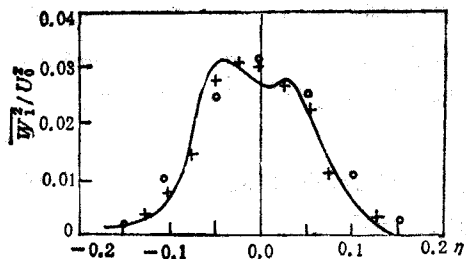


图3 ——理论; ○实验^[6]; +实验^[7]

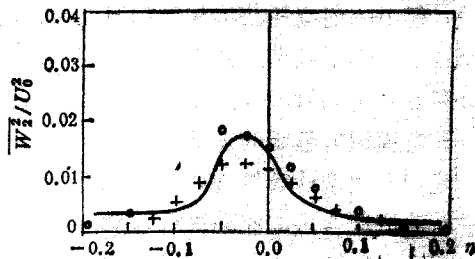


图4 ——理论; ○实验^[6]; +实验^[7]

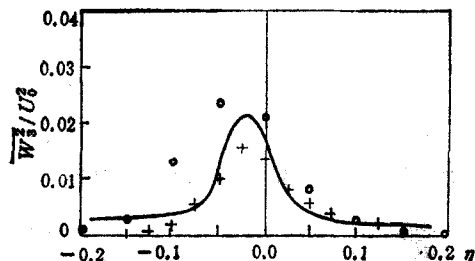


图5 ——理论; ○实验^[6]; +实验^[7]

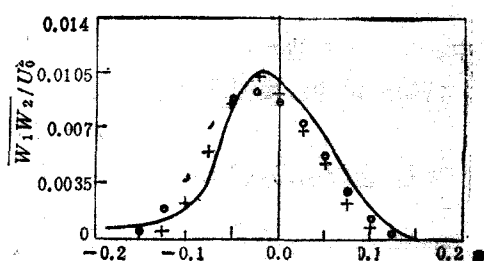


图6 ——理论; ○实验^[6]; +实验^[7]

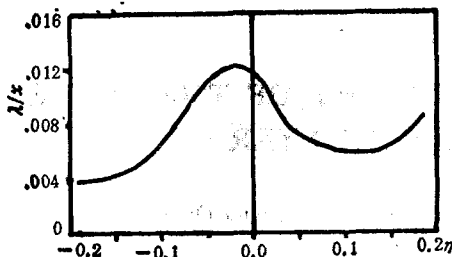


图 7 ——理论.

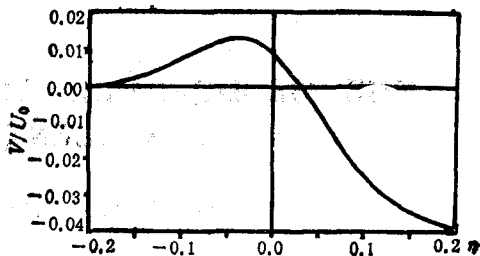


图 8 ——理论. 由(3.2.6)的第二式.

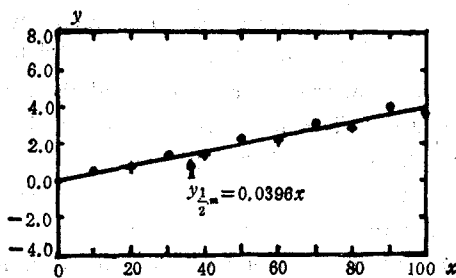


图 9 ——理论; ○实验[6]; +实验[7].

四、结 束 语

采用上述迭代求解方法进行理论计算,为了提高理论结果的精度,可增加迭代次数.

另外,可将(3.2.8)–(3.2.14)式七个方程联立求解,以确定 $F, I^2, J, f_{11}, f_{12}, f_{22}$ 和 f_{33} 七个变量. 但这样做比较烦琐,我们没有采用这种方法.

最后,本文只考虑了平均运动方程和二阶关联方程的一级近似解. 也可以用三阶和四阶关联方程进一步确定二级近似解,以得出三阶和四阶关联函数. 这些关联函数已有实验结果发表^[6].

参 考 文 献

- [1] Chou, P. Y., *Quart. of Appl. Math.*, 3(1945), 38–54.
- [2] Chou, P. Y., *Scientia Sinica (Series A)* 28, 4(1985), 405–421.
- [3] 周培源、陈十一, *中国科学 (A 辑)*, 4(1987), 369–380.
- [4] Chou, P. Y., *Chin. Journ. of Phys.*, 4(1940), 1–33.
- [5] Chou Peiyuan & Huang Yongnian, *Scientia Sinica*, 18(1975), 199–222.
- [6] Wygnanski, I. and Fiedler, H. E., *J. Fluid Mech.* 41, part 2(1970), 327–361
- [7] Patel, R. P., *JALAA*, 11, 1(1973), 67–71.

THE PSEUDO-SIMILARITY THEORY OF THE PLANE TURBULENT MIXING LAYER

Zhou Peiyuan Huang Yongnian
(*Peking University*)

Meng Qingguo
(*Jilin University*)

Abstract In this paper, the first approximation solutions of the incompressible plane turbulent mixing layer using the theories of Chou Peiyuan^{[1][2][3]} have been given. We consider the continuity equation, the mean motion equations and the equations of the double velocity correlations, and ignore the triple velocity correlations of the double velocity correlation equations. We introduce the hypothesis of the self-preservation, and have gotten the theoretical results of the mean velocities, the double velocity correlations and the turbulent micro-scale, etc. They are identical with the experimental results.

Key words pseudo-similarity, self-preservation, turbulent micro-scale, double velocity correlation