

超静定结构的安定分析

陈少忠 陆明万

(清华大学工程力学系)

摘要 本文建立理想弹塑性材料超静定结构安定分析的线性规划格式,论证上下限定理的规划格式满足规划论的对偶关系,从而统一了安定分析的上下限定理,使问题得到简化。

关键词 安定分析 线性规划 超静定结构

一、概述

应用安定定理对结构进行安定分析,人们进行各种尝试,取得一定成果。^[1-3]其中使用较多较有成效的方法是线性规划,这种方法可以格式化,便于计算机求解。但在以往应用中,安定分析的上下限定理都分开讨论,独立使用,这样求得结构安定的下限或上限解。本文在[3]的基础上,建立超静定结构安定分析上下限定理的线性规划格式,并论证它们满足规划论的对偶关系。

安定分析的基本定理:

下限定理(静力安定定理, Melan定理):

结构安定的充要条件是存在一个与时间无关的自平衡残余应力场 σ_{ij} ,使得 σ_{ij} 与载荷的弹性响应 σ_{ij} 之和是安全应力状态,即:

$$f(\sigma_{ij} + \sigma_{ij}) \leq K \quad (1)$$

f 为屈服函数, K 为常数。

上限定理(机动安定定理, Koiter定理):

结构不安定,如果存在一个容许的塑性应变率循环 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$,使得在载荷变化范围内,下式成立。

$$\int_T dt \left\{ \int_V f_i \dot{u}_i dV + \int_{S_\sigma} p_i \dot{u}_i dS \right\} > \int_T dt \int_V D(\dot{\epsilon}_{ij}^p) dV \quad (2)$$

其中 $D(\dot{\epsilon}_{ij}^p) = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p$ 称单位体积塑性耗散能。 \dot{u}_i 是 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ 对应的速度场,它们满足关系 $\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$ 和边界的速度条件时称为容许塑性应变率循环。 T 为加载周期, p_i 为面力, f_i 为体力。

结构安定,若存在常数 $\alpha > 1$,使得对任何容许塑性应变率循环 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$,在载荷变化范围内,下式成立:

本文于1988年5月5日收到,1988年10月收到修改稿。
本文由国家自然科学基金会资助。

$$\alpha \int_T dt \left\{ \int_V f_i \dot{u}_i dV + \int_{S\sigma} p_i \dot{u}_i ds \right\} \leq \int_T dt \int_V D(\dot{\epsilon}_i^p) dt \quad (3)$$

上下限定理的证明见文献〔4〕。

二、简 化

1. 载荷处理

设变化载荷 $p_i(x, t)$ ($i=1, 2, \dots, m$)

$$p_i(x, t) \in [p_i^-(x, t), p_i^+(x, t)] = [\mu_i^-, \mu_i^+] p_i^0(x, t) \quad (4)$$

$p_i^-(x, t), p_i^+(x, t)$ 为载荷变化上下限, μ_i^-, μ_i^+ 为载荷因子, $p_i^0(x, t)$ 为基准载荷. 则载荷区域表示为:

$$\Omega = \left\{ p = \sum_{i=1}^m \mu_i p_i^0(x, t), \mu_i \in [\mu_i^-, \mu_i^+] \right\} \quad (5)$$

在 Ω 内, 任一曲线构成一个加载路径. 从 Ω 内一点指向 Ω 顶点的直线称径向加载路径. 从某点起始的所有径向加载路径组成一组.

定理 1 设载荷区域 Ω 是凸的. 若沿着 Ω 全部边界曲线的一个循环加载过程, 结构安定. 那么在 Ω 内任何循环加载过程结构安定.

定理 2 设载荷区域 Ω 是凸的. 若对于包含了 Ω 的一组径向加载路径的一个循环加载过程, 结构安定. 那么在 Ω 内任何加载过程, 结构安定.

利用凸集和凸函数的性质定理易证〔6〕.

2. 屈服函数线性化

为优化方便, 采用线性化屈服函数, 非线性化的屈服函数则用若干屈服平面去近似屈服曲面, 这样屈服函数可表示成:

$$f = N^T Q \leq K \quad (6)$$

其中 N 为屈服平面法向矢量组成的 $r \times y$ 阶矩阵, Q 为广义应力 r 阶列矩阵, K 为 y 阶常数列矩阵, r 为广义应力空间维数, y 屈服平面个数.

三、下限定理的数学规划格式

根据屈服函数 (6), 下限定理可表示成:

$$N^T Q^E + N^T Q^R \leq K \quad (7)$$

Q^E, Q^R 为用广义应力表示的载荷弹性响应和残余应力.

对于超静定结构, 设冗余力矢量 ρ , 维数为超静定度数. 残余应力场假设为:

$$Q^R = R\rho \quad (8)$$

其中 R 为只与结构几何有关的矩阵, 表示单位冗余力 ρ 引起计算点处残余应力大小的转换关系. 用 (8) 表示的残余应力场满足自平衡, 与时间无关的条件.

(7) 式左边第一项与时间有关, 在载荷变化过程中不等式恒成立. 设基准载荷引起结构弹性响应 Q^e , 载荷因子 k , 则 $Q^E = kQ^e$. 令

$$M = \frac{\max}{t} (N^T Q^e) \quad (9)$$

将(8)、(9)代入(7)得:

$$kM + N^T R \rho \leq K \quad (10)$$

因此安定载荷因子化为线性规划问题:

$$\left. \begin{aligned} s &= \max k \\ s.t. \quad kM_i + N^T R_i \rho &\leq K \\ & \quad i=1, 2, \dots, n \\ k &> 0 \quad \rho \text{ 为自由变量} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

这即超静定结构安定下限定理的线性规划格式. n 为应力校核点个数, 校核点取所有局部广义应力极值点(包括结构端点, 广义应力值突变点, 广义应力值极值点).

四、上限定理的线性规划格式

上限定理用广义应力及广义应变表示为:

$$\alpha \int_T d t \int_V Q^{E^T} \dot{q}^P dV \leq \int_T d t \int_V D(\dot{q}^P) dV \quad (12)$$

\dot{q}^P 为广义塑性应变率. 根据流动法则

$$\dot{q}^P = \left(\frac{\partial f}{\partial Q} \right)^T \dot{\lambda} = N \dot{\lambda} \quad (13)$$

$\dot{\lambda}$ 为塑性流动因子.

对(12)式进行化简, 设 n 个可能出现的塑性铰.

$$\begin{aligned} \int_T d t \int_V D(\dot{q}^P) dV &= \sum_{i=1}^n \int_T Q_i^T \dot{q}_i^P dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_T Q_i^T N \dot{\lambda}_i dt = \sum_{i=1}^n \int_T K^T \dot{\lambda}_i dt \\ &= \sum_{i=1}^n K^T \lambda_i \end{aligned} \quad (14)_1$$

$$\begin{aligned} \int_T d t \int_V Q^{E^T} \dot{q}^P dV &= \sum_{i=1}^n \int_T k Q_i^{E^T} N \dot{\lambda}_i dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_T k M_i^T \dot{\lambda}_i dt = \sum_{i=1}^n k M_i^T \lambda_i \end{aligned} \quad (14)_2$$

将(14)代入(12), 上限定理表示为

$$\alpha k \sum_{i=1}^n M_i^T \lambda_i \leq \sum_{i=1}^n K^T \lambda_i \quad (15)$$

取临界状态 $\alpha = 1$, 则安定因子 s 为:

$$s = \max k = \min \frac{\sum_{i=1}^n K^T \lambda_i}{\lambda_i \sum_{i=1}^n M_i^T \lambda_i} \quad (16)$$

(16) 式等价于

$$\left. \begin{aligned} s &= \min \sum_{i=1}^n K^T \lambda_i \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n M_i^T \lambda_i &= 1 \\ \lambda_i &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

这即超静定结构安定上限定理的线性规划格式. 可能出现塑性铰的位置取为所有局部广义应力极值点位置.

五、上限和下限定理的关系

下限定理的规划格式 (11) 改写成标准格式. 引入 $\rho^+ \geq 0$, $\rho^- \geq 0$, 则自由变量 $\rho = \rho^+ - \rho^-$. (11) 成为

$$\left. \begin{aligned} s &= \max k \\ \text{s.t.} \quad [M_i N^T R_i - N^T R_i] \begin{Bmatrix} k \\ \rho^+ \\ \rho^- \end{Bmatrix} &\leq K \\ i &= 1, 2, \dots, n \\ k > 0 \quad \rho^+ &\geq 0 \quad \rho^- \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

根据规划论对偶原理. (18) 式的对偶为:

$$\left. \begin{aligned} s &= \min \sum_{i=1}^n K^T \tilde{\lambda}_i \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n M_i^T \tilde{\lambda}_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^n R_i^T N \tilde{\lambda}_i &= 0 \\ \tilde{\lambda}_i &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

对比 (17) 和 (19) 可以发现, 两式极其相似. 实际上, 在 (11)、(17) 中取应力校核点和可能出现塑铰位置相同, 则在 (17)、(19) 式中 n 相同, M_i , N , R_i , K 相同. 在 (17) 中 λ_i 为塑性流动因子, 因此 $q_i^p = N \lambda_i$ 是机动容许的. 故有

$$\sum_{i=1}^n Q_i^{PT} \dot{q}^P = 0 \quad (20)$$

即

$$\sum_{i=1}^n \rho^T R_i^T N \lambda_i = 0 \quad (21)$$

(21) 式对所有的 ρ 均成立, 所以有

$$\sum_{i=1}^n R_i^T N \lambda_i = 0 \quad (22)$$

由此说明, 由于 λ_i 是塑性流动因子, 使得 $\sum_{i=1}^n R_i^T N \lambda_i = 0$ 为恒等式. 相反, 若 $\sum_{i=1}^n R_i^T N \lambda_i = 0$ 则 $q_i^P = N \lambda_i$ 是机动容许的. 故 (17) 式可改写成:

$$\left. \begin{aligned} s &= \min \sum_{i=1}^n K^T \lambda_i \\ s. t. \sum_{i=1}^n M_i^T \lambda_i &= 1 \\ \sum_{i=1}^n R_i^T N \lambda_i &= 0 \\ \lambda_i &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

显然 (23) 与 (19) 式完全相同. 这证明了, 对超静定结构, 下限定理和上限定理的线性规划格式满足规划论的对偶关系. 它意味着由 (11) 式可得到一个不破坏屈服条件的载荷安定因子和残余应力场, 由 (17) 可求出一个相等的载荷安定因子和对应的机动场.

对于 (11)、(17) 的规划格式, 并不保证只有唯一可行解, 即残余应力场和机动速度场不一定唯一. 这是由于屈服条件线性化和不考虑加卸载路径等因素造成的.

结构破坏形式的判断. 交替塑性变形破坏在载荷循环内没有新的塑性应变产生, 即 $N \lambda = 0$. 累积塑性变形破坏有新的塑性应变产生, 即 $N \lambda \neq 0$. 这样, 根据 $N \lambda$ 的值可判断结构破坏形式. 对于累积塑性变形破坏, $N \lambda$ 的值对应于破坏机构.

(11)、(17) 的格式是建立在古典安定定理的基础上, 它只适用于理想弹塑性材料, 结构发生小变形的准静态加载过程. 当载荷不随时间变化时, 安定分析退化为极限分析, 因此可用极限分析结果间接检验所得规划格式的正确性.

六、算 例

为检验前面所得结论, 本文作了两个简单算例.

图 1 所示一次静不定梁.

为方便引入无量纲量:

$$m = \frac{M}{M_p} \quad \rho = \frac{Pl}{M_p} \quad p = \frac{Fl}{M_p}$$

M 为梁弯矩, M_p 为截面塑性极限弯矩, F 为2处支反力, 即冗余力. 根据前面公式求得结果如表一, 这结果与一般弹塑性分析结果完全一致.

表中第三项为极限分析结果.

图2所示为三次超静定框架.

取无量纲量 $h = \frac{Hl}{M_p}$ $v = \frac{Vl}{M_p}$ $m = \frac{M}{M_p}$

$\rho_m = \frac{M_r}{M_p}$ $\rho_h = \frac{H_r l}{M_p}$ $\rho_v = \frac{V_r l}{M_p}$

M_r, H_r, V_r 为冗余力, 截面的弯矩, 剪力, 轴力. 基准载荷变化范围

$k \in [-1, 1], v \in [0, 1]$

计算结果列于表二, 它与文[6]利用弹塑性分析所得解相同.

表中第四项为极限分析的结果.

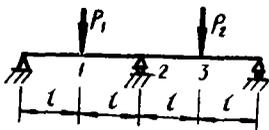


图 1

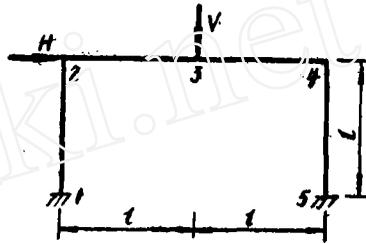


图 2

表 1

载荷因子	基准载荷变化范围		结构破坏形式	残余应力状态 ρ
	p_1	p_2		
2.0	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	交替塑性变形破坏	0.0
2.526	$[0, 1]$	$[0, 1]$		-0.054
3.0	1	1	同上	0.125

表 2

载荷因子	静定基取法	残余应力状态			破坏形式
		ρ_m	ρ_h	ρ_v	
2.759	1.5点处同时放松	-0.138	-0.207	0.0	交替塑性变形
2.759	5点处放松	-0.138	-0.207	0.0	交替塑性变形
2.759	3点处放松	0.069	0.207	0.0	交替塑性变形
3.0	1.5点处同时放松	-0.3	-0.4	-0.063	

参 考 文 献

- [1] E.A.Leickie, Shakedown Pressure for Flush Cylinder—sphere Shell Intersection, *J.Mech. Eng.Sci.*, 7 (1965), 367—371.
- [2] W.A.Macfarlane, G.E.Findly, A Simple Technique for Calculating Shakedown Loads in Pressure Vessels, *Proc.Instn.Mech.Eng.* 864 (1972), 45—52.
- [3] G.Maier, Shakedown Theory in Perfect Elasto—plasticity with Associated and Non—associated Flow Laws, *Mechanica*, 6 (1969), 250—260.
- [4] W.T.Koiter, General theorems for elastic—plastic solid, in *Progress in Solid Mechanics*, North-Holland (1960) .
- [5] J.A.Konig, M.K.Jeiber, On a New Method of Shakedown Analysis, *Bull.Ac.Pol.Sci., Ser.Sei. Techn.*, 26 (1978), 165—171.
- [6] B.G.Neal, *The plastic methods of structural analysis*, Chapman and Hall (1977) .

Shakedown Analysis of Statically Indeterminate Structure

Chen Shao—zhong Lu Mingwan

(Tsing Hua University)

Abstract A formulation of linear programming (LP) of shakedown analysis has been developed for statically indeterminate structure of perfect elastic—plastic material. It has been proved that the formulation of LP of Melan's theorem and Koiter's theorem satisfied the dual relation.

Key Word Shakedown Analysis, Linear Programming, Statically Indeterminate Structure