

滑移线场应力的映射分析及其应用

彭炎荣

(湘潭大学)

提要 求解滑移线场应力对研究金属成形极为重要.利用映射分析方法求解滑移线场应力, 比按Hencky应力方程逐点计算, 不但直观清晰, 而且大为简化. 本文提出一种线性映射方法, 介绍了这种映射的基本原理、作图方法及实际应用, 并与W. Prager在极点轨迹基础上建立的摆线映射法进行了比较.

关键词 滑移线场 线性映射 摆线映射

滑移线法是求解塑性成形问题的重要方法, 但其应力求解过程极为繁琐, 不便于在工程实际中推广应用. 通过对滑移线场应力作几何映射, 建立图解分析方法, 不仅能简化应力求解过程, 避免按Hencky应力方程逐点计算之烦, 而且利用图形映射, 更能直观清晰地显示出滑移线场中各处的应力状态及其变化规律. 1953年, W. Prager在莫尔应力圆极点轨迹的基础上提出过一种映射方法, 即滑移线场在 $\sigma_x-\tau_{xy}$ 应力平面上的映射[1]. 这是一种摆线映射, 而摆线在作图技术上存在极大困难, 在实际应用中仍感不便. 本文提出另一种新的映射方法——线性映射法. 这是滑移线场在 $\frac{\sigma_m}{k}-\omega$ 坐标平面上的映射(σ_m 为平均正应力, k 为塑性变形时的最大剪应力, ω 为 x 轴到 α 族滑移线切线的转角). 这种映射图形由两族正交直线构成, 图形绘制容易, 使用也极为方便, 它为滑移线方法在生产实际中的广泛应用开辟了新的途径.

一、基本原理

下面结合平板镦压的实例, 介绍应力映射的基本原理. 图1a为板坯在完全粗糙的平砧间镦压时的滑移线场(设 $b/h=3.64$, 此时中心扇形场的张角为 45°). 图中的滑移线网络是按等角分度($\Delta\omega=5^\circ$)绘制的. 通过该网络对角节点联成的两组虚曲线中, 一组为等静水应力线(或称等 σ_m 线), 另一组为等 ω 线(或称等 τ_{xy} 线).

根据Hencky应力方程, 沿 α 族滑移线有

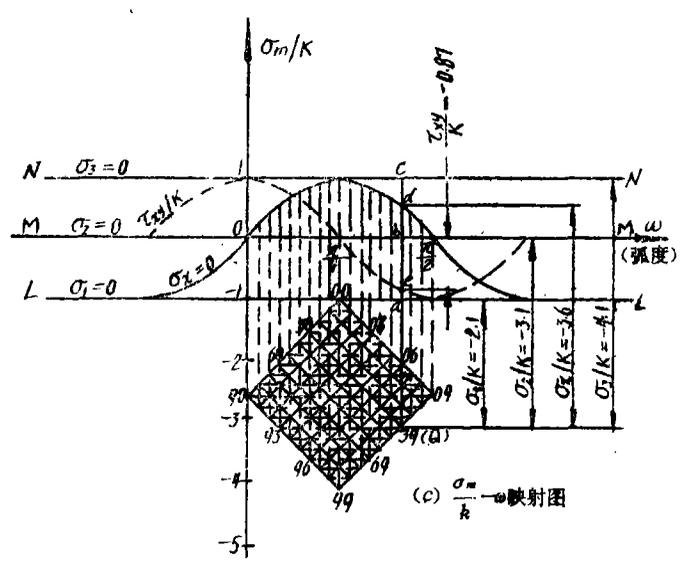
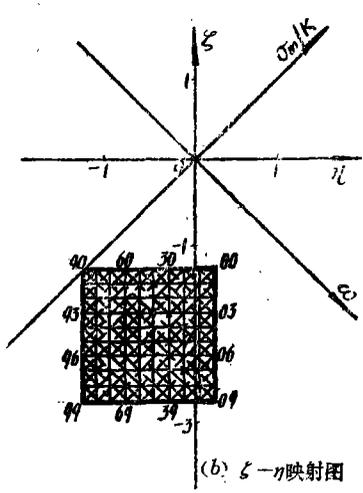
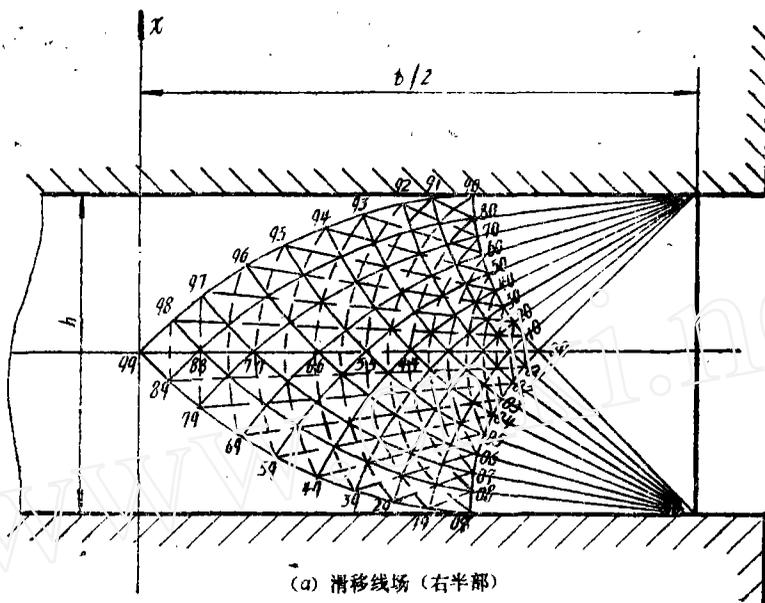
$$\frac{\sigma_m}{2k} - \omega = \xi \quad (\text{常数}) \quad (1)$$

沿 β 族滑移线有

$$\frac{\sigma_m}{2k} + \omega = \eta \quad (\text{常数}) \quad (2)$$

本文于1988年5月5日收到, 1988年10月11日收到修改稿.

据此, 在 η - ξ 坐标平面上, 两族滑移线可映射为分别平行于 ξ 轴和 η 轴的两族正交直线, 如图1b所示.



$$\begin{aligned} \xi_{00} &= \xi_{00} = -1.2854 \\ \eta_{00} &= \eta_{00} = 0.2854 \\ \xi_{00} &= \xi_{00} = -2.8562 \\ \eta_{00} &= \eta_{00} = -1.2854 \end{aligned}$$

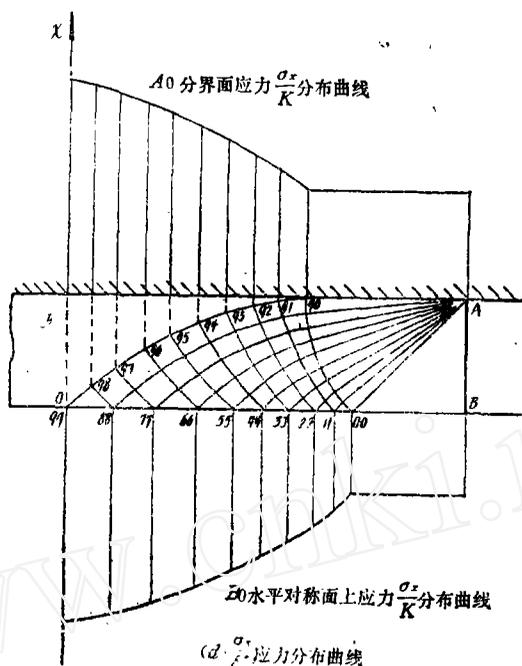


图1 板坯在平砧间挤压

对于滑移线场中任意一点, 由 (1) (2) 式可知

$$\frac{\sigma_m}{k} = \xi + \eta \quad (3)$$

$$\omega = \frac{1}{2} (\eta - \xi) \quad (4)$$

可见, 沿图1a中的等 $\frac{\sigma_m}{k}$ 线和等 ω 线, 分别有

$$\xi + \eta = \text{常数} \left(\frac{\sigma_m}{k} \right), \quad (5)$$

$$\eta - \xi = \text{常数} (2\omega) \quad (6)$$

因此, 利用(5)(6)两式, 可将等 $\frac{\sigma_m}{k}$ 线和等 ω 线映射为与 ξ 轴和 η 轴成 ($\pm 45^\circ$) 的两族相互正交的斜线, 如图1b中的虚线所示. 为了便于映射分析, 现将图1b的 η - ξ 平面变换为 $\frac{\sigma_m}{k}$ - ω 坐标平面, 为此, 应以 $\xi + \eta = 0$ 和 $\eta - \xi = 0$ 这两根通过坐标原点的正交斜线分别作为 ω 轴和 $\frac{\sigma_m}{k}$ 轴, 并将 η - ξ 平面逆时针转 45° , 如图1c所示. 应该指出, ω 轴的坐标刻度是以弧度为单位, 并且 ω 轴和 $\frac{\sigma_m}{k}$ 轴上的坐标刻度值必须保持1:2的比例关系, 这样才能保证这种线性映射的正交特性.

二、作图方法

图1c所示的 $\frac{\sigma_m}{k}$ - ω 图的绘制是十分简便的. 首先在滑移线场中选定 x 轴的方向 (为求

解变形力方便,最好是以变形力方向作为 x 轴向).然后根据图1a中 (oo) 点的应力边界条件 $(\sigma_m/k = -1, \omega_{oo} = \pi/4)$, 在图1c中找到对应点位 (oo) . 由该点作 $(\pm 45^\circ)$ 方向的两根斜线, 斜线端点 (09) 和 (90) 的位置, 分别由各自的横坐标 ω 值决定 $(\omega_{09} = \pi/2, \omega_{90} = 0)$. 再由点 (09) 和 (90) 分别作 $(\pm 45^\circ)$ 斜线交于点 (99) . 这时得到的矩形各边分别与图1a中相应的边界滑移线对应. 最后, 按照图1a中滑移线场等角分度的方式, 将矩形内部等分成相应的网格, 与图1a中的滑移线网络一一对应.

三、映射分析

$\frac{\sigma_m}{k}-\omega$ 图是金属塑性成形力学分析的有效工具, 利用 $\frac{\sigma_m}{k}-\omega$ 图可对滑移线场应力进行全面、系统的分析.

1. 将滑移线场按应力状态的性质分区

在 $\frac{\sigma_m}{k}-\omega$ 图中, 在 $\frac{\sigma_m}{k}$ 等于 -1 、 0 和 $+1$ 处分别作 LL 、 MM 和 NN 三条水平线, 如图1c所示. 这三条水平线将整个坐标平面分为四个区域. LL 线以下为三向受压区, LL 和 MM 线之间为两压一拉区, MM 和 NN 线之间为两拉一压区, NN 线以上为三向受拉区. 图1c中的映射图形位于 LL 线以下区域, 故图1a的整个滑移线场都是三向受压应力状态.

2. 确定任意一点的应力状态

因为 LL 线上 $\sigma_1 = 0$, MM 线上 $\sigma_2 = 0$, NN 线上 $\sigma_3 = 0$, 所以 LL 、 MM 和 NN 线分别为量取 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 的基线. 任意一点 Q 的三个主应力 σ_1/k 、 σ_2/k 和 σ_3/k , 也就是从该映射点 Q 分别到水平线 LL 、 MM 和 NN 的距离, 可以直接在图1c中量取. 例如点 (39) 的三个主应力:

$$\sigma_1/k = \bar{Q}a = -2.1, \quad \sigma_2/k = \bar{Q}b = -3.1, \quad \sigma_3/k = \bar{Q}c = -4.1.$$

从图1c还可直接量取该点的 σ_x/k , σ_y/k 和 τ_{xy}/k 值. 为此, 应作出 (2ω) 角的正弦曲线和余弦曲线, 分别如图1c中实曲线和虚曲线所示. 正弦曲线上 $\sigma_x = 0$, 故各映射点到正弦曲线的垂直距离 $\bar{Q}d$ 也就是该点的 σ_x/k 值. 而余弦曲线值 $\bar{b}e$ 则为该点的 τ_{xy}/k 值. 至于应力 σ_y , 可从下式求得

$$\frac{\sigma_y}{k} = \frac{\sigma_m}{k} + \sin 2\omega = \bar{Q}b + \bar{d}b$$

图1c中 (39) 的 $\sigma_x/k = \bar{Q}d = -3.6$, $\tau_{xy}/k = \bar{b}e = -0.866$, $\sigma_y/k = \bar{Q}b + \bar{d}b = -3.1 + 0.5 = -2.6$

3. 确定任意截面上的应力分布规律

例如, 为了确定图1a中刚塑性区分界线 $(90-99)$ 上应力 $\frac{\sigma_x}{k}$ 的分布规律, 首先在图1c中逐点量取 $(90-99)$ 线段上各节点到正弦曲线的垂直距离, 分别标记在图1d中相应分界线的对应节点处, 并联成光滑曲线, 这就是 σ_x/k 沿 $(90-99)$ 分界面上的分布曲线. 同理, 可作出水平对称面 $(00-99)$ 上应力 σ_x/k 的分布曲线, 如图1d所示.

4. 计算镦压变形力和单位塑流压力

设板坯长度为 L , 则镦压变形力 P 等于水平对称面上应力 σ_x 的合力, 即 $\frac{P}{k} = 2L \int_0^{\frac{b}{k}} \sigma_x$

dx . 式中的积分项其实就是该对称面上 σ_x/k 应力分布曲线图所包围的面积 F . 于是 $P=2LK \cdot F$. 本例中, $F=310.2\text{mm}$, 故 $P=620.4kL$, 或用单位长度上的变形力 $P/L=620.4k$ 表示.

单位塑流压力 $p = \frac{P}{bL} = \frac{620.4k}{2 \times 94} = 3.3k$ 或用 $\frac{p}{2k} = 1.65$ 表示.

5. 分析板坯尺寸(宽高比 b/h)对变形的影响

图1a是对 $b/h=3.64$ 的板坯而言的. 如果 b/h 值改变, 则滑移线场的形式及范围大小也随之改变, 其 $\sigma_m/k-\omega$ 映射图形当然也就不同. 图2a和图2b分别表示 b/h 值为1, 1.6, 3.64, 和6.6时滑移线场及其映射图形的变化情况. 根据不同的 b/h 值, 即可利用图2b的映射图形, 直接确定图2a中滑移线场应力的分布规律和计算锻压变形力.

四、应用实例

以复合挤压为例介绍映射分析方法的具体应用. 图3a为凹模侧壁光滑时稳定变形阶段的复合挤压滑移线场, 它由正挤场和反挤场两部分组成, 两部分均为有心扇形场, 而且几何形状相似, 受力情况相同, 映射图形重合.

因此, 只需研究其中一个即可.

按前述方法可作出正挤场刚塑性区分界线 cd_1 和 b_1c 上应力 σ_x/k 的分布曲线, 如图3所示. 复合挤压力 P 即图3中正挤场边界 cd_1 和反挤场边界 o_2b_2c 上应力 σ_x/k 的合力, 其数值为 $P=2KL \cdot F$. 式中, F 为这些边界上 σ_x/k 应力分布曲线图包围面积之和. 图3中, 反挤场边界 o_2b_2c 上的应力分布曲线并未绘出, 可以根据正、反挤压场的相似性, 借用正挤场边界 o_1b_1c 上的应力分布曲线, 因为二者的应力分布规律完全相同. 其应力分布曲线图所包围面积之比 f 等于正、反挤出口宽度 l_1 和 l_2 之比, 即 $f = \frac{l_2}{l_1}$. 本例中(图3), $l_1=13\text{mm}$, $l_2=6.5\text{mm}$, 故 $f = \frac{6.5}{13} = 0.5$. 而 cd_1 边界和 o_1b_1c 边界应力分布曲线图包围面积均为 $F' = 210.8\text{mm}$, 于是, 复合挤压力 $P = 2kL \cdot F = 2kL \cdot F'(1+f) = 2kL \times 210.8 \times 1.5 = 632.4kL$. 而挤压凸模的单位挤压力 $p = \frac{P}{2L(L_1-l_2)} = \frac{632.4kL}{2L(75-6.5)} = 4.62k$, 或者 $\frac{p}{2k} = 2.31$.

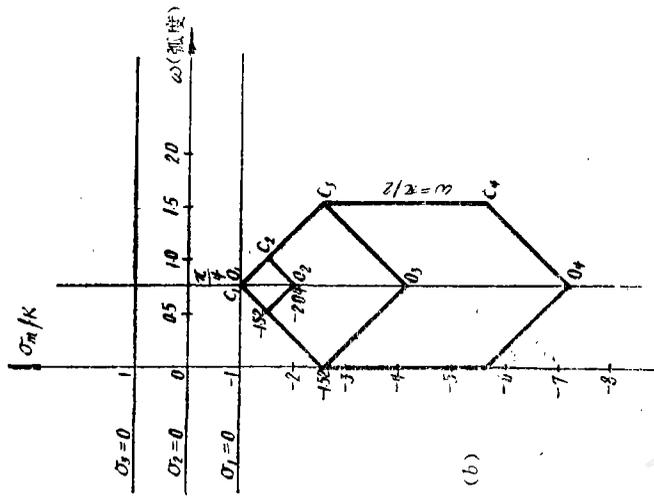
图3是当挤压凸模推进到 $H=58\text{mm}$ 时的情况. 若凸模继续推进, 则滑移线场及其映射图形将不断变化. 但已证实^{[2][3]}, 分流点 c 到中心轴线的距离 ρ 基本上不变. 于是, 根据正、反挤压场的相似关系可知, 决定分流点 c 位置的两个尺寸参数为

$$\rho = L_1 \left(\frac{l_1}{l_1 + l_2} \right) \quad (7)$$

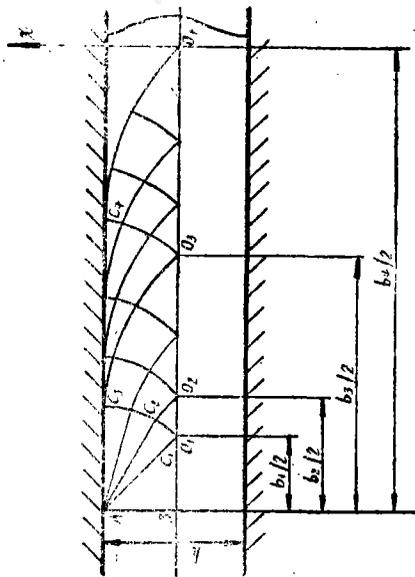
$$h_1 = H \cdot \left(\frac{l_1}{l_1 + l_2} \right) \quad (8)$$

由(7)(8)式可见, 挤压过程中, 分流点 c 的变动轨迹为平行于中心轴线的竖直线, 而且随着模具尺寸 L_1 、 l_1 和 l_2 (即正、反挤部分的变形程度)的不同, ρ 值也就不同.

复合挤压变形过程与凹模侧壁的摩擦条件有密切关系. 对于凹模侧壁完全粗糙(摩擦力 $\tau=k$)时的复合挤压滑移线场可以得到. 如果将反挤出口处的中心线当作光滑凹模的侧壁, 或者说, 只要将粗糙凹模的 $(L'_1 - \frac{l'_2}{2})$ 当作光滑凹模的 L_1 , 将 $\frac{l'_2}{2}$ 当作光滑凹模的 l_2 , 这样就可以把侧壁完全粗糙的凹模当作侧壁光滑的凹模来计算. 本例中, 尺寸 $H=58\text{mm}$, $h_1=46.4\text{mm}$, $\rho=57.4\text{mm}$, $\omega_c=23^\circ$, 用映射方法求得的单位挤压力 $\frac{p}{2k}=2.42$, 比光滑凹模



(b)



(a) $\frac{b_1}{h} = 1, \frac{b_2}{h} = 1.6, \frac{b_3}{h} = 3.64, \frac{b_4}{h} = 6.6$

图2 各种 b/h 值时的滑移线场及映射图形

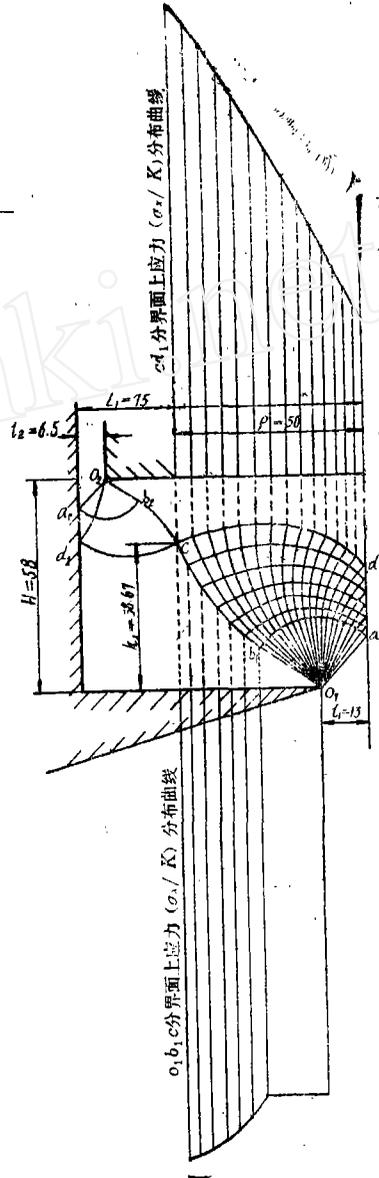


图3 滑移线场及 σ_x/h 应力分布图

(图3)的 $\frac{P}{2k} = 2.31$ 增大了4.8%.

参 考 文 献

- [1] Prager W., The Theory of Plasticity, A Survey of Recent Achievements, JAMES CLAYTON LECTURE, (1955), 41—57.
 [2] Шофман, Л. А., Основы расчета процессов штамповки и прессования (1961).
 [3] Сторожев, М. В., Основы Теории обработки Металлов давлением (1962).
 [4] 彭炎荣, 滑移线场应力的几何映射, 锻压技术 13 3 (1988) 2—7.
 [5] 彭炎荣, 滑移线场应力图解法, 金属成形工艺 3, (1986), 35—40.
 [6] 彭炎荣, 圆轴横截应力的图解分析, 湘潭大学学报 3 (1987), 128—134.

THE THEORY AND ITS APPLICATION OF THE GEOMETRICAL MAPPING FOR STRESS IN SLIP LINE FIELD

Peng Yanrong

(Xiangtan University)

Abstract It is of great importance that determination of the stress in slip line field to study of metal forming. In comparison with the computation point by point according to Hencky stress equations, determination of the stress in slip line field by use of the geometrical mapping is more visual, clear and simple. In this paper, a linear mapping in $(\sigma_m/k—\omega)$ plane is suggested by the author. The basic theory, procedure of the drawing and some examples in the application of this geometrical mapping are discussed. Moreover it is compared with Prager's construction which was based on the cycloid locus of the pole.

Key words slip line field, linear mapping, cycloidal mapping.