

规范上限模式与滑移线场的合理性

李双义

(天津大学)

提要 对于求解塑性平面应变问题,本文提出有规范上限模式和规范上限解可寻,并列出压缩、平冲头压入、复合挤压及模锻的规范上限模式及上限解通式。采用规范上限解可使上限解公式通用化,迅速、简便地求出上限解,且高估量相当小。规范上限模式与合理的滑移线场在轮廓上具有相似性;借此,可寻求符合完全解条件的滑移线场;对已有的滑移线场,可由规范上限模式判断其合理性。

关键词 平面应变 规范上限模式, 滑移线场

一、规范上限解的提出

为寻求平面应变工艺的上限解,通常可将其对应的滑移线场加以简化,取得上限模型,称该类模型为“简化滑移线场的上限模式”。^[1]取得优化上限解的过程是:(1)建立上限模式,设定一个或几个准独立参数;(2)绘出与上限模式相应的速度图;(3)列出上限功率表达式,并从几何上确定诸剪切线长度及诸速度间断值;(4)将上限功率对设定的准独立参数求偏导,再联立求解,以确定各准独立参数值;(5)将准独立参数值回代原功率表达式,进而取得优化上限解($p^*/2K$)。

常规求解的烦恼在于:需制定既合理(与滑移线场轮廓相似)、又较为简单的模式(以使计算不至于复杂);必须绘出相应的速度图;确定剪切线长度和速度间断值时遇到浩繁的几何运算;必须求偏导并解联立方程,而且,设定的准独立参数愈多,数学处理上愈麻烦。此外,对非稳态工艺,如压缩等,由于滑移线场随时在变,由此而制定的上限模式也仅适于瞬时,故取得的上限解对整个变形过程无通用价值。

因此提出一个问题:能否避开常规求解的烦恼获得求解过程既简单、高估量又足够小的上限解呢?能否使上限解公式通用化而适用于任意变形程度的任意时刻呢?规范上限模式及规范上限解就能解决这一问题。所谓“规范上限模式”的含义是:(1)该模式的剪切线布局是规范的,且一目了然;(2)一种工艺的规范模式仅有一种或有限几种;(3)该模式适用于任意变形程度的全过程或某一范围变形程度的一个变形阶段,故由此导出的上限解公式可构成通式,称此为规范上限解;(4)采用规范上限解公式,简便易求,且高估量足够小。

H.Kudo的基元矩形技术就是制定规范上限模式、取得优化上限解的有效方法。他制定了一系列标准模块,各模块有其耗能系数 e 的公式,见文献[2]的附表(本文简称“附表”)。

本文于1988年5月5日收到,1988年10月收到修改稿。

有关该技术的由来可参看文献[3], 应用方法见文献[4]、[5]. 现举例说明.

例 求模底粗糙、模壁光滑时正挤压的上限解?

将模底附近的塑性区分为①、②两单元, 两单元的流动趋势见图1. 塑性区深度为 T , 收缩率 $r=(H-h)/H$.

单元①: 高宽比 $a_1=T/(H-h)=T/(rH)$, 故

$$T/H = a_1 \cdot r \quad (1)$$

宽度 $B_1=H-h$, 压入速度 $\dot{V}_1=\dot{v}$. 单元②: 高宽比 $a_2=h/T$, 即

$$a_2 = \frac{1-r}{r} \frac{1}{a_1} \quad (2)$$

宽度 $B_2=T$, 由体积不变 $\dot{V}_1 \cdot (H-h) = \dot{V}_2 \cdot T$ 得 $\dot{V}_2 = (H-h)/T$. 将两单元的诸单元代入式(4)

$$\frac{p^*}{2k} = \sum_{i=1}^m e_i \cdot \frac{B_i}{B} \cdot \frac{\dot{V}_i}{\dot{V}} \quad (3)$$

$$\text{后得} \quad p^*/2k = (e_1 + e_2) \cdot r = Er \quad (4)$$

$$\text{且} \quad E = e_1 + e_2 \quad (5)$$

其中, e_i 、 B_i 、 $\dot{V}_i$ 分别表示第 i 单元的耗能系数、压下宽度及速度, H 、 $\dot{V}$ 分别为工具的宽度及运动速度.

单元①: srrr(ii). 参照滑移线场, 取 $a_1 > 1$, $n_1 = 1$, 由附表得: $e_1 = (IV)$, $H = 1/a_1$, 故

$$e_1 = \frac{7}{16} a_1 + \frac{1}{a_1} \quad (6)$$

单元②: rrsr(i). 参照滑移线场, 取 $a_2 < 1$, 由附表得: $e_2 = (IV)$, $H = a_2$, 再取 $n_2 = 1$ 后, 得

$$e_2 = a_2 + \frac{7}{16} \frac{1}{a_2} = \frac{1-r}{r} \frac{1}{a_1} + \frac{7}{16} \frac{r}{1-r} a_1 \quad (7)$$

将式(6)、(7)代入式(5), 得

$$E = \frac{7}{16} \left(1 + \frac{r}{1-r} \right) a_1 + \left(1 + \frac{1-r}{r} \right) \frac{1}{a_1} = \frac{7}{16} \frac{1}{1-r} a_1 + \frac{1}{r} \frac{1}{a_1} \quad (8)$$

$$\text{取} \partial E / \partial a_1 = \frac{7}{16} \frac{1}{1-r} - \frac{1}{a_1^2} \frac{1}{r} = 0 \quad \text{得}$$

$$a_1 = \frac{4}{\sqrt{7}} \sqrt{\frac{1-r}{r}} \quad (9)$$

$$\text{考虑式(1), 得} \quad \frac{T}{H} = \frac{4}{\sqrt{7}} \sqrt{r(1-r)} \quad (10)$$

代式(9)入(8), 再代入式(4), 得

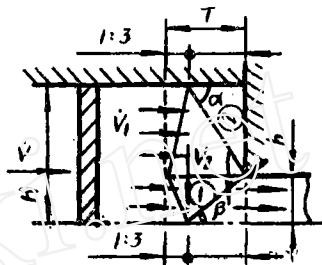


图1 正挤压的矩形单元

$$\frac{p^*}{2k} = \frac{\sqrt{7}}{2} \sqrt{\frac{r}{1-r}} \quad (11)$$

式(10)为 $0.22 \leq r \leq 0.8$ 时的上限解通式,其高估量在5%以内^[4].收缩率超出此范围时,可能出现 $a_1 < 1$, $a_2 > 1$ 的情况,且 z 单元 n_1 、 n_2 未必为1,故上限解公式也随之而变,最后以 r 的分段函数表示之,见文献[4].

例如, $r=0.5$,由式(11)得 $p^*/2k=1.32$,滑移线解 $p/2k=1.285$,高估量为2.7%;再由附表查得两单元的标准模式,拼合后为规范上限模式,如图1所示.由式(10)得 $T/H=2/\sqrt{7}$,再由1:3的比例关系便确定 $\alpha=\beta=41^\circ 24'$,与常规求优化解的结果完全相同,但避开了繁琐的数学推导.

二、几种规范上限模式及其与滑移线场的关系

关于正挤压、反挤压工艺,因摩擦条件的情况较多,随着收缩率不同,其规范上限解有若干个,详见文献[4]、[6].将另外几种变形工艺的规范上限模式及上限解公式列于表1.按表1中公式求得的上限解,其高估量一般在5%以内.由文献[4]、[6]及表1的诸规范上限模式可以看出:规范上限模式与合理的滑移线场,在轮廓上具有相似性.利用“轮廓相似性”,可以由规范上限模式寻求合理的滑移线场,也可判断已有滑移线场的合理性.

三、用规范上限模式验证滑移线场的合理性

作为完全解的滑移线解,它应具备:(1)应力场必须满足平衡条件及应力边界条件,不违背屈服准则;(2)速度场必须满足速度边界条件和体积不变条件;(3)应力场与速度场必须协调,以满足应力应变速率方程,使单位体积的塑变功率 $\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0$;(4)、在刚-塑性交界上,应力和速度应该满足必要的连续条件.^[7]

一种平面应变问题,往往有两个以上的滑移线场可寻,哪个更符合实际呢?除由实验(如网格法)证实外,可按完全解的条件逐条加以检验.但这并不是件容易的事情.而规范上限模式的制定为寻求合理的滑移线场提供了方便.制定规范上限模式有两种方法:(1)参照合理滑移线场的轮廓,寻求标准上限模块加以组合,如前例;(2)将特定边界条件下所有的模块(包括 a 的不同数值范围及不同的子单元数)均给以考虑,并考虑到诸标准单元的所有组合,利用计算机,按最小能量原理,“取小为优”,择其耗能最小者所对应的组合模式作为规范上限模式.

这两种方法的优化结果是相同的.按照第一种方法,必须先制定合理的滑移线场;按照第二种方法,直接制定规范模式.那么,能否依照规范上限模式去寻求合理的滑移线场呢?当然可以.因为规范上限模式与合理的滑移线场具有“轮廓相似性”.现以反挤压为例加以说明.

图2(a)的左半部为模壁粗糙、收缩率为 $0.14 < r < 0.5$ 时反挤压的规范上限模式,是计算机优化的结果;与之对应的滑移线场如图2(a)右半部所示.该滑移线场是否合理呢?可按完全解的条件进行验证.图2(b)为滑移线场对应的速度图.认真考察该滑移线场,它满足应力边界条件,因为图中 D 点的剪应力方向与模壁摩擦方向相一致,且大小相等;它也满足应力平衡条件.由速度图可知,它满足速度边界条件,因为 B 、 D (对应速度图上的 b 、 d 两

表1 几种变形工艺的规范上限模式和上限解通式

工 艺	滑移线场和规范上限模式	上 限 解 通 式
平 冲 头 压 入 半 无 限 体		$\frac{T}{b} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad F = 2b$ $\frac{p^*}{2k} = \sqrt{7} \approx 2.646$
		$\frac{T}{b} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad F = (1 + \frac{\sqrt{7}}{4})b, \quad F_1 = b$ $\frac{p^*}{2k} = 4(\sqrt{2} - 1) + \sqrt{7} \approx 4.302$
平 冲 头 压 入 半 有 限 体		$a = h/b$ $n = \frac{\sqrt{3}}{4}a + \frac{1}{4} \text{ (圆整)}$ $\frac{p^*}{2k} = (n - \frac{1}{2}) \frac{1}{a} + \frac{n+0.5}{4n-1} a$
复 合 挤 压 (模 壁 光 滑)		$r_1 = \frac{h}{H}, \quad r_2 = 1 - \frac{b_2}{H}, \quad r_1 = r_1 + r_2 - 1,$ $a_1 = (1 - r_1) \frac{H}{T}, \quad n_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{a_1} \text{ (圆整)}$ $e_1 = n_1 a_1 + \frac{n_1 + 0.75}{4n_1} \frac{1}{a_1}, \quad a_2 = \frac{1}{r_1} \frac{T}{H},$ $e_2 = \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{a_2}, \quad \frac{p^*}{2k} = (e_1 + e_2) \frac{r_1}{r_1}$
模 锻 (开 式)		$\frac{p^*}{2k} = \frac{1}{A+2B} (A \cdot \sqrt{2} + A/h - 0.5A + 4h$ $+ \frac{19}{16} \frac{B^2}{h} + \frac{AB}{h})$
压 缩		$a = h/b, \quad n = \frac{\sqrt{3}}{2a} + \frac{1}{4}$ $\frac{p^*}{2k} = (n - \frac{1}{2}) \frac{a}{2} + \frac{n+0.5}{4n-1} \frac{2}{a}$

点)的出口速度方向向上,大小满足体积不变条件.区分 α 、 β 线族后可知沿滑移线两侧的剪应力方向(用实箭头示),对照速度图后可确定沿滑移线两侧剪应变速率的方向(用虚箭头表示),可见剪应力与剪应变速率方向均一致,故满足应力应变速率关系,应力场与速度场相协调.因此,图2(a)所示的滑移线场是合理的.

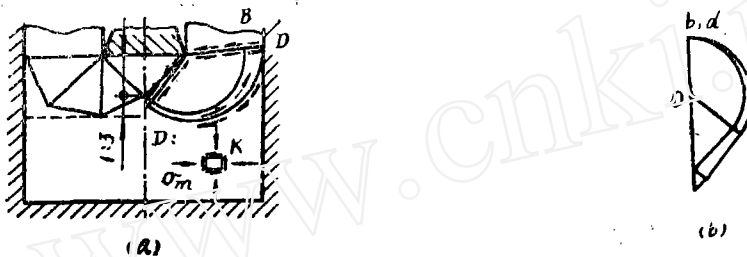


图2 模壁粗糙的反挤压
(a) 规范模式与滑移线场 (b) 速度图

对于模壁粗糙的反挤压问题,有些滑移线场是不合理的,如图3(a)、(c)右半部的滑移线场.图3(a)的滑移线场虽然满足应力边界条件及平衡条件,但不满足速度边界条件,因为出口点F的速度不是竖直向上的.图3(c)的滑移线场满足速度边界条件、体积不变条件及应力应变速率关系,但不满足应力边界条件,因为过B点沿 β 线两侧的剪应力方向与模壁对材料的摩擦力方向相矛盾,见图中箭头所示的方向.因此,图3所示的两种滑移线场都是不合理的场.另一方面,这两种滑移线场与图2(a)左半部所示的规范上限模式在轮廓上也没有相似性.与图3两个不合理的场在轮廓上相似的上限模式示于图3(a)、(c)的左半部,但不在优化结果之列,即,这种模式会加大能耗,违背最小能量原理,这进一步说明图3所示的滑移线场是不合理的场.

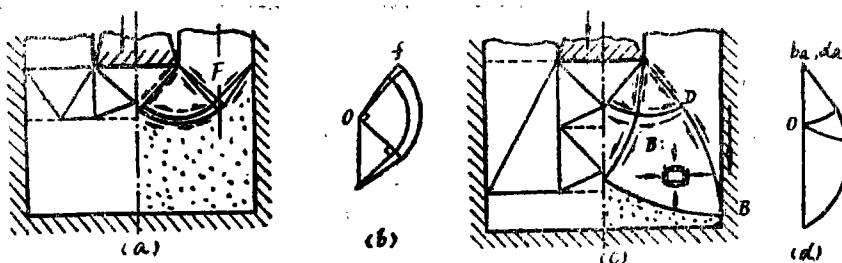


图3 模壁粗糙反挤压时不合理的滑移线场
(a) 不合理的滑移线场 I (b) 速度图
(c) 不合理的滑移线场 II (d) 速度图

对于模壁粗糙的复合挤压,其规范上限模式如图4(a)左半部所示,右半部为与之轮廓相似的滑移线场,该场满足完全解的条件.而图4(c)右半部所示的滑移线场则违背体积不变条件,按该滑移线场,依照轮廓相似性,其上限模式应对应于图4(c)左半部的模式,但它比图4(a)左半部所示的规范模式能耗大,这进一步说明图4(c)所示的滑移线场是不合理的,

该分析结果与文献[8]的分析结果完全相同。

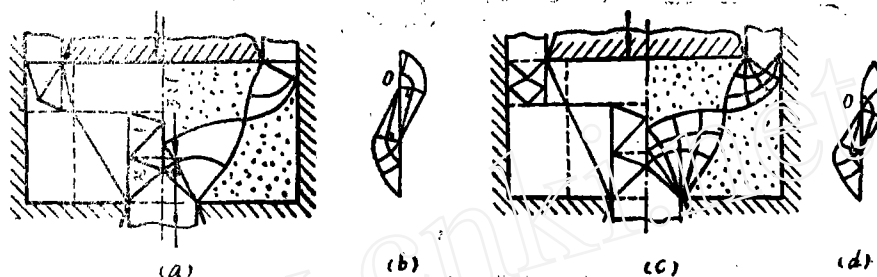


图4 模壁粗糙的复合挤压

(a) 规范上限模式与合理的滑移线场 (b) 速度图
(c) 不合理的滑移线场 (d) 速度图

五、结 论

1. 采用基元矩形技术可制定规范上限模式，获得优化上限解；
2. 采用规范上限解公式求解，可避开浩繁的数学运算，高估量相当小，且具有通用性；
3. 由于规范上限模式与合理的滑移线场具有轮廓相似性，故可采用规范上限模式去寻求合理的滑移线场，或判断已有滑移线场的合理性。

参 考 文 献

- [1] 李双义，上限模式的分类、评价及上限法的新进展，天津大学学报，增刊（1984），100。
- [2] H.Kudo, An Upper-Bound Approach to plane-Strain Forging and Extrusion, *Int.J.Mech Sci*, 1 (1960), 57.
- [3] 李双义、谭粉英，基元矩形技术的由来及应用，应用力学学报，5，2（1988），111。
- [4] 李双义，正挤压规范上限模式及变形力通式，金属成形工艺，1（1985），1。
- [5] 李双义，复合挤压规范上限模式及变形力通式，机械工程学报，1（1986），1。
- [6] 李双义，基元矩形技术是取得优化上限解的有效方法，中国电子学会生产技术学会金属塑性加工第二届年会论文，2（1984）1—6。
- [7] 王仁等，塑性力学基础，科学出版社（1982），279。
- [8] 王祖唐，复合挤压理论解的分析，模具技术，6（1986），21。

STUDY ON THE STANDARDIZED UPPER BOUND MODES AND THE RATIONALITY OF SLIP LINE FIELD IN PLANE STRAIN PROBLEMS

Li Shuangyi

(Tianjin University)

Abstract In this paper, it is proposed that the plane strain problems in

plasticity can be solved with the standardized upper bound modes and the corresponding solutions, As an illustration of the above proposal, the standardized upper bound modes and the upper bound solutions for compression of strip between flat dies, indentation of a semi-infinite medium and a semi-infinite block of finite depth resting on a plane foundation by a flat die, die forging and compound extrusion are listed. It shows that the standardized upper bound solutions can make the upper bound solutions generalized and quickly-handily obtained with a quite small overestimate, that the outline of the standardized upper bound modes is similar to that of slip line field. The similarity of the two makes it possible to find the real slip line field of corresponding problem and to identify the rationality of presupposed slip line field with the standardized upper bound mode.

Key words standardized upper bound modes, slip line field, plane strain problem.