

广义屈服准则

王仲仁 胡卫龙

(哈尔滨工业大学)

摘要 本文提出了一个新的屈服准则——广义屈服准则。新准则中包含了应力张量第一不变量 J_1 和应力偏张量第二及第三不变量 J_2 及 J_3 的综合作用。从物理概念上看,新准则反映了平均正应力、各主剪应力及应变类型对屈服应力的综合影响。新准则的优点是它可适用于拉压性能不同材料、多孔材料及不同变形工序等的屈服判据。另外,本文还指出 Tresca 准则、双剪应力准则及 Mises 等准则仅为所推荐准则的一个特例。

关键词 屈服准则 剪应力 塑性变形

一、引言

从本质上讲,屈服准则是考虑任何可能的应力组合,即任意应力状态下对于特定材料产生塑性变形的一种判据。由于前提及所反映的物理概念上的不同,出现了不少假说,其中有些基本上为一部分实验所证实。例如, Tresca 准则可以用下式表达:

$$\tau_{\max} = \tau_s = \frac{\sigma_s}{2}$$

式中 $\tau_{\max}$ 为最大剪应力、 τ_s 为剪切屈服强度, σ_s 为单向拉伸屈服强度。

另一较为普遍的屈服准则为 Mises 准则。其基本方程为:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s^2$$

我国学者俞茂淦等提出了双剪应力准则。实际上是考虑了最大剪应力及次大剪应力作为屈服的应力判据^[1,4]。其形式为:

$$\tau_3 - \tau_2 = \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = \text{const (常数)}$$

由于材料品种的不断增多及成形范围的逐渐扩大,迫切需要从总体上对屈服准则给予综合考虑,然后再针对具体情况作适当简化并确定有关系数。本文正是从这个角度对塑性屈服准则的基本构成及各部分所代表的物理意义作一论述、并说明前述屈服准则仅是所推荐屈服准则的简化特殊形式。也正是从这个意义上说,本文推荐的准则是广义的。为了使公式简明,我们仍然按通常的作法,采用忽略包辛格效应等假设。

二、广义屈服准则

从力学中知道,描述应力状态比较本质的物理量是三个应力不变量 J_1 、 J_2 、 J_3 ,对于塑性变形来说,应力偏量具有特别重要的意义。应力偏量的三个不变量为 J_1' 、 J_2' 、 J_3' ,其中 $J_1' =$

本文于1988年5月5日收到,1988年10月收到修改稿。

0, 而后两个与 J_2 及 J_3 都有一定的关系^{〔2〕} :

$$J_2 = J_2' - \frac{1}{3} J_1^2 \quad (1)$$

$$J_3 = J_3' - \sigma_m J_2' + \sigma_m^3 \quad (2)$$

式中

$$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = J_1/3.$$

因此, 从本质上讲应力张量及应力偏量共六个不变量中, 仅 J_1 , J_2' , J_3' 是独立的, 所以, 屈服准则的广泛形式可以写为:

$$k_1 J_3' + k_2 J_2'^{\frac{3}{2}} + k_3 J_1^3 = c \quad (\text{常数}) \quad (3)$$

式中 k_1 , k_2 , k_3 均为常数并与材料特性及所采取的假设或前提有关.

在文献〔2〕中也曾给出:

$$\left. \begin{aligned} J_2' &= \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2] \\ &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$J_3' = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_m)^3 + (\sigma_2 - \sigma_m)^3 + (\sigma_3 - \sigma_m)^3] \quad (5)$$

将(4)、(5)两式代入(3)式, 得:

$$\begin{aligned} & \frac{k_1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_m)^3 + (\sigma_2 - \sigma_m)^3 + (\sigma_3 - \sigma_m)^3] \\ & + \frac{k_2}{2\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2]^{\frac{3}{2}} + \frac{k_3}{27} \sigma_m^3 = c \end{aligned} \quad (6)$$

以新的常数代表(6)式中的各项系数, 得

$$\begin{aligned} & K_1 [(\sigma_1 - \sigma_m)^3 + (\sigma_2 - \sigma_m)^3 + (\sigma_3 - \sigma_m)^3] \\ & + K_2 [(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2]^{\frac{3}{2}} + K_3 \sigma_m^3 = c \end{aligned} \quad (7)$$

(3)式、(6)式或(7)式即为广义屈服准则的一般表达式. 式中 K_1 , K_2 及 K_3 均不小于零.

三、广义屈服准则的物理概念、 几何意义及其简化形式

(3)式、(6)式及(7)式中左边第三项反映平均应力对屈服准则的影响. 对于不可压缩材料, 即采用体积不变假定时, $K_3 = 0$, 这意味着平均应力对屈服无影响. 对于粉末成形及其它多孔材料, 成形随流体静压力增加, 屈服增高, 这时 $K_3 > 0$, 由于 K_3 的存在, 造成在主应力空间中屈服图形不与原点对称, 呈上小下大的形状, 而不是等截面的.

(3)、(6)、(7)式左侧第二项反映的是各剪应力的影响. 由(4)式可知、除了括号前的系数不同以外, 各偏应力分量的平方和与各主应力差的平方和是等价的, 即:

$$\begin{aligned} [(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2] &= \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ &= \frac{1}{12} [\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2] \end{aligned} \quad (8)$$

式中 τ_{12} 、 τ_{23} 、 τ_{31} 为应力摩尔圆中三个主剪应力见图1。

若 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, 则 τ_{13} 是最大的主剪应力。同理 $\sigma_1 - \sigma_m$ 值也是最大的。如果我们在以上(3)、(6)、(7)式中令 $K_1(k_1)$ 、 $K_3(k_3)$ 等于零, 所得结果与Mises准则相同。如果进一步略去最小剪应力、如假设为 τ_{23} , 则成为双剪应力准则:

$$\tau_{13}^2 + \tau_{12}^2 = c$$

(此双剪应力表达式与文献[1、4]中所给的不同)若再作简化, 忽略次主剪应力 τ_{12} 的影响, 则公式简化为:

$$\tau_{13}^2 = c^2 \text{ 或 } \tau_{13} = c$$

此即Tresca准则。

至于对Mises准则及Tresca准则的几何图形, 已有很多论述[1、3], 此处不赘述。双剪应力的详细说明见文献[4]。从实质上看, 三者的差别就在于所考虑的主剪应力的程度上的差别。Mises准则考虑了三个主剪应力的影响, 双剪应力准则是考虑了最大剪应力及次大剪应力的影响, 而Tresca准则则仅以最大剪应力作为衡量是否屈服的应力判据,

现分析(3)、(6)、(7)式左侧第一大项。方括弧中

$$[(\sigma_1 - \sigma_m)^3 + (\sigma_2 - \sigma_m)^3 + (\sigma_3 - \sigma_m)^3] = 3(\sigma_1 - \sigma_m)(\sigma_2 - \sigma_m)(\sigma_3 - \sigma_m)$$

我们知道, 在 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 的情况下, 总有

$$\sigma_1 - \sigma_m > 0$$

$$\sigma_3 - \sigma_m < 0$$

至于中间偏应力有

$$\sigma_2 - \sigma_m \cong 0$$

不论Levy-Mises方程还是Prandtl Renss方程, 都可看出相应的塑性应变增量

$$d\varepsilon_1 > 0$$

$$d\varepsilon_3 < 0$$

及

$$d\varepsilon_2 \cong 0$$

这样, 对应的有 $J'_3 \cong 0$ 及罗德(Lode)系数 $\mu_\sigma \cong 0$ ^[5], 这时的应变类型分别为压缩类($d\varepsilon_2 > 0$), 纯剪类($d\varepsilon_2 = 0$), 及伸长类($d\varepsilon_2 < 0$)^[6], 见图2。

关于应变类型对屈服的影响, 往往不易被人们所觉察, 人们在进行拉压性能不同材料的实验时, 虽然发现压缩时的屈服应力高于拉伸时, 但往往归之于平均应力对材料本身性能的影响及端面摩擦未完全消除; 而实际上, 我们从最经典的Lode实验资料就可以看出, 即使在双拉应力(由轴向拉力 P 及内压力 p 引起)实验中, 对于所有被实验材料(钢、铜及镍)在 $\mu_\sigma = +1$ 附近, 即压缩类应变时, 总比拉伸类附近 $\mu_\sigma = -1$ 有规律地偏高, 如图3.即应变类型的影响在双向拉而不是单向压缩时仍然存在。

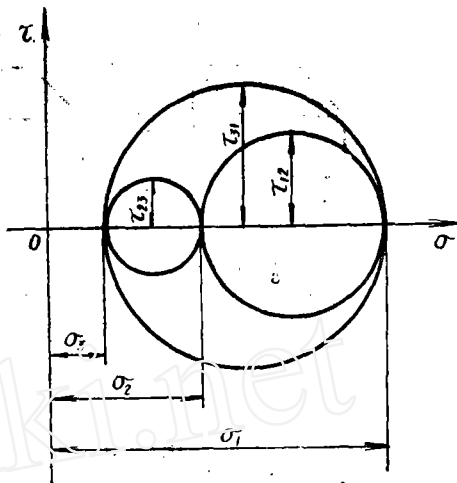


图 1

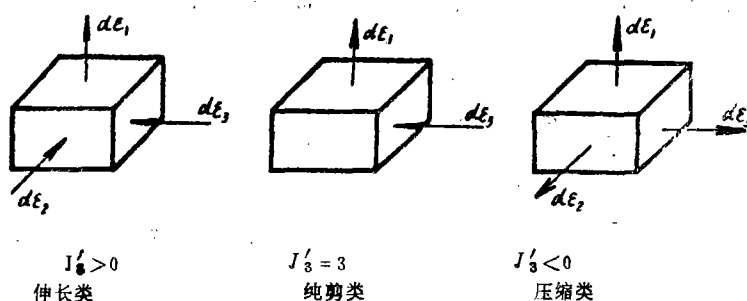


图2 应变类型示意图

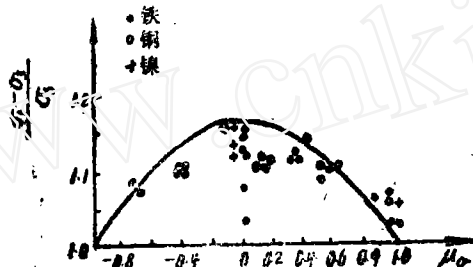


图3 Lode实验

四、系数 K_1 , K_2 , K_3 的确定

1. 对不可压缩材料 K_1 , K_2 , K_3 的确定

当所研究的材料可以近似地认为是不可压缩材料时, 则可设(7)式中 $K_3=0$, 这样, 我们便只需来确定系数 K_1 和 K_2 .

当规定 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 的应力顺序时, 则在纯剪应力状态下, 即 $\sigma_2=0$, $\sigma_3=-\sigma_1$ 时, (7)式左边第一大项为零. 故当最大剪应力达到材料的屈服剪应力 τ 时, 由(7)式得

$$\frac{K_2}{c} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}}\tau^3} \quad (9)$$

在单向拉伸应力状态下, 即

$\sigma_2=\sigma_3=0$, 而当 $\sigma_1=\sigma_c$ 时, 代入(7)式得

$$\frac{K_1}{c} \frac{2}{9} \sigma_c^3 + \frac{K_2}{c} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma_c^3 = 1 \quad (10)$$

在单向压缩应力状态下, 即

$\sigma_1=\sigma_2=0$, 而当 $\sigma_3=\sigma_c$ (压缩屈服强度) 代入(7)式得

$$-\frac{K_1}{c} \frac{2}{9} \sigma_c^3 + \frac{K_2}{c} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma_c^3 = 1 \quad (11)$$

由式(10)、(11)解得

$$\frac{K_1}{c} = \frac{9}{4} \left(\frac{1}{\sigma_c^3} - \frac{1}{\sigma_c^3} \right) \quad (12)$$

将(9)、(12)及 $K_3=0$ 代入(7)式, 得

$$\frac{9}{4} \left(\frac{1}{\sigma_c^3} - \frac{1}{\sigma_c^3} \right) [(\sigma_1 - \sigma_m)^3 + (\sigma_2 - \sigma_m)^3 + (\sigma_3 - \sigma_m)^3]$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}\tau_s^3} [(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2]^{\frac{3}{2}} = 1 \quad (13)$$

(13) 式即为不可压缩材料的广义屈服准则. 从 (13) 式也可以明显看出, 式中同时包含了材料的三个不同强度参数, 单向拉伸屈服强度 σ_s , 单向压缩屈服强度 σ_c 及纯剪屈服强度 τ_s . 从而使屈服准则本身变得更加完善. 当拉伸和压缩屈服强度相同时, 即满足材料拉压性能相同的假设, 则 (13) 式便转化为 Mises 屈服准则, 这与 Mises 准则的使用前提是完全一致的.

2. 对可压缩材料 K_1, K_2, K_3 的确定

所谓可压缩材料, 就是在复杂应力作用下, 静水压力将同样对材料的屈服产生影响. 对于这种材料, 确定各系数 K_1, K_2, K_3 值同样要假设几种可行的实验应力状态.

在纯剪应力状态下, $\sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_1$ 可得

$$\frac{K_2}{c} = -\frac{1}{2\sqrt{2}\tau_s^3} \quad (14)$$

在单向拉伸应力状态下, 可得

$$\frac{K_1}{c} \frac{2}{9} \sigma_s^3 + \frac{K_2}{c} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma_s^3 + \frac{K_3}{c} \cdot \frac{\sigma_s^3}{3^3} = 1 \quad (15)$$

在双轴压缩应力状态下, 可得

$$\frac{K_1}{c} \frac{6}{3^3} \sigma_{dc}^3 + \frac{K_2}{c} \frac{6\sqrt{6}}{3^3} \sigma_{dc}^3 - \frac{K_3}{c} \frac{2^3}{3^3} \sigma_{dc}^3 = 1 \quad (16)$$

式中 σ_{dc} 为双轴压缩屈服强度.

由式 (14)、(15)、(16) 解得

$$\frac{K_3}{c} = 3 \left(\frac{1}{\sigma_s^3} - \frac{1}{\sigma_{dc}^3} \right) \quad (17)$$

$$\frac{K_1}{c} = \frac{4}{\sigma_s^3} + \frac{1}{2\sigma_{dc}^3} - \frac{\sqrt{3}}{2\tau_s^3} \quad (18)$$

将 (14)、(17)、(18) 式代入 (7) 式, 得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4}{\sigma_s^3} + \frac{1}{2\sigma_{dc}^3} - \frac{\sqrt{3}}{2\tau_s^3} \right) [(\sigma_1 - \sigma_m)^3 + (\sigma_2 - \sigma_m)^3 + (\sigma_3 - \sigma_m)^3] \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2}\tau_s^3} [(\sigma_1 - \sigma_m)^2 + (\sigma_2 - \sigma_m)^2 + (\sigma_3 - \sigma_m)^2]^{\frac{3}{2}} \\ & + 3 \left(\frac{1}{\sigma_s^3} - \frac{1}{\sigma_{dc}^3} \right) \sigma_m^3 = 1 \end{aligned} \quad (19)$$

(19) 式即为完整的广义屈服准则表达式. 简单地也可推得 (13) 式是 (19) 式的一种特殊形式. 如我们再取一单向压缩应力状态, 则可得:

$$-\frac{K_1}{c} \frac{2}{9} \sigma_c^3 + \frac{K_2}{c} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma_c^3 - \frac{K_3}{c} \frac{\sigma_c^3}{3^3} = 1 \quad (20)$$

再由式 (15) 和 (20), 得

$$\frac{K_2}{c} = \left(\frac{1}{\sigma_s^3} + \frac{1}{\sigma_c^3} \right) \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad (21)$$

由 (14)、(21) 式, 得

$$\frac{1}{\tau_s^3} = \left(\frac{1}{\sigma_c^3} + \frac{1}{\sigma_s^3} \right) \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (22)$$

这样, 当 $K_3=0$, 即 $\sigma_s=\sigma_c$, 则将 (22) 式代入 (18) 式, 得:

$$\frac{K_1}{c} = \frac{9}{4} \left(\frac{1}{\sigma_s^3} - \frac{1}{\sigma_c^3} \right)$$

上式与 (12) 式完全相同, 故而将各系数代入 (7) 式中, 即得到 (13) 式的特殊形式.

五、结 论

1. 本文从应力张量及应力偏量诸不变量中选定了三个独立变量 J_1, J_2', J_3' 做为衡量屈服的判据, 比目前的准则反映的因素更全面、其中 J_1 反映了平均应力的影响, J_2' 反映了各主剪应力的联合影响, J_3' 反映了变形方式的影响, 这与实验结果是吻合的.

2. 所推荐的屈服方程为应力的三次方项组成, 对于受流体静压影响的材料, 根据公式可得到与原点对称的, 即上小下大的空间几何图形.

3. 对于 (7) 式、(13) 式及 (19) 式的广义屈服准则, 如采用适当的假设, 则可得 Mises 准则, Tresca 准则及平方表达形式的双剪应力准则的特例.

4. 粉末体塑性变形的数据证实, 随流体静压力的增大, 屈服应力增大.

5. Lode 的实验数据证实, 即使在双拉应力状态下, 压缩类应变 ($d\varepsilon_1 > 0, d\varepsilon_2 > 0, d\varepsilon_3 < 0$) 将引起屈服应力比拉伸类应变 ($d\varepsilon_1 > 0, d\varepsilon_2 < 0, d\varepsilon_3 < 0$) 显著提高. 该实验结果支持了我们所提出的广义屈服准则.

参 考 文 献

- [1] 王仁、熊祝华、黄文彬著, 塑性力学基础, 科学出版社 (1982) .
- [2] [英] R.A.C. 斯莱特著, 王仲仁、袁祖培等译, 工程塑性理论及其在金属成形中的应用, 机械工业出版社 (1983) .
- [3] R. 希尔著, 王仁等译, 塑性数学理论, 科学出版社 (1966) .
- [4] 俞茂铨等, 双剪应力强度理论研究, 西安交通大学出版社 (1988) .
- [5] 王仲仁、张泽华, 关于应力偏量及应力张量第三不变量的物理意义及其在主应力空间中的几何意义, 哈尔滨工业大学学报, 2 (1982) .
- [6] Z.R. Wang (王仲仁), S.D. Li (李守栋), On the division of stress state on the yield locus and correspondence between the regions on the yield locus and the size variation of workpieces during metal forming, Proceeding of NAMRC IV (1981), 100-124

General Yield Criterion

Wang Zhongren and Hu Weilong
(Harbin Institute of Technology)

Abstract A new yield criterion, General Yield Criterion, is put forward in this paper, which gives consideration to the synthetic effects of first invariant J_1 of stress tensor, second and third invariants J_2' and J_3' of stress deviator. In view of physical concept, the new yield criterion reflects the synthetic effect of mean normal stress, main shear stresses and strain

type. The advantage of the new yield criterion is that it can be used as the yield condition of material with different properties of tension and compression, porous material and different forming processes. It is proved: "Tresca Criterion" and "Mises Criterion" are the special cases of the new yield criterion.

Key words Yield criterion, Shearstress, plasticity.

www.cnki.net