

Hutchinson模型的后屈曲 和缺陷敏感分析¹⁾

苏旭明²⁾ 卢文达

(上海工业大学应用数学和力学研究所)

摘要 本文分析双线性硬化的Hutchinson模型的后屈曲和缺陷敏感问题。先给出一个解析解,再用模型承受最大荷载时卸载区长度为定量的特点,以卸载区长度的变化为参数,在卸载区为零时和模型承受最大荷载时分别作摄动分析,并连接它们,得到后屈曲和缺陷敏感分析的渐近表达式。本文并详细讨论了文中提出的方法在真实工程结构上的应用问题。

关键词 塑性后屈曲 缺陷敏感 Hutchinson模型 双线性硬化

一、引言

受压结构的塑性屈曲一般是在屈曲时继续加载,受载极限在进行了一有限量屈曲后变形之后达到。对塑性后屈曲和缺陷敏感分析,须同时计入材料和几何的非线性,难度较大。

Hutchinson 1973年作了开创性的工作^[1,2]。从一个模型入手,然后讨论三维结构,他试图将弹性屈曲的Koiter理论引入塑性屈曲。但由于方法上的缺陷,未达预期目的。特别是缺陷敏感分析,在模型上也未实现。

Van der fleijden 曾重新研究Hutchinson模型^[3]。他立足于寻找从最小屈曲荷载(切线模量公式)和最大屈曲荷载(折减模量公式)之间任意荷载开始屈曲的屈曲后最大荷载的轨迹。他的方法没有渐近性质,也未能在真实结构中推广。

因为缺乏实用的塑性结构缺陷敏感分析,Needleman和Tvergaard提出用亚弹性本构关系替代弹塑性本构关系进行缺陷敏感分析^[4],由于忽略了屈曲后卸载,这是粗糙的近似。

缺陷敏感分析,要将缺陷对结构承载能力的影响表示出来。Koiter理论在弹性结构中之所以成功,是因为结构若缺陷敏感,屈曲荷载是个极值点。当塑性结构不同时,屈曲的同时继续加载、塑性结构的后屈曲和缺陷敏感分析都需要有有效范围较大的渐近表达式。

Hutchinson的方法^[1],用屈曲后变形的屈曲模态分量为摄动参数,没有成功。我们试图寻找其它参数。结构屈曲后卸载区随外载的增大而扩展,其长度可作摄动参数;遗憾的是,这个摄动参数摄动的结果,有效范围不够大。但在分析过程中,我们发现,本构关系为双线性硬化时,Hutchinson模型承受最大荷载时卸载区长度为定值。用相对这个定值的卸载区长度变化为参数,可在最大荷载附近进行第二次摄动。只要将第二次摄动的结果与第一

1) 本论文得到国家自然科学基金的资助。

2) 现在天津大学力学系工作。

本文于1988年5月5日收到,1988年10月20日收到修改稿。

个摄动结果连接起来, 便得到有效范围足够大的渐近结果.

本文第二节先给出Hutchinson模型的一个解析解. 第三节、第四节作无缺陷和有缺陷模型的摄动分析. 这些分析中都假定模型为双线性硬化. 第五节讨论本文方法在真实结构中的推广.

二、Hutchinson 模型和它的一个解析解

如图1, Hutchinson模型由两个弹簧和一倒T字型刚架组成. 弹簧A反映几何非线性影响. 连续弹簧B反映材料的弹塑性, 具有双线性硬化本构关系:

$$\left. \begin{aligned} \dot{s} &= E' \dot{\epsilon} & \text{若 } -s = s_m, & \text{ 并 } \dot{s} \leq 0 \\ \dot{s} &= E \dot{\epsilon} & \text{若 } -s < s_m, & \text{ 或 } \dot{s} > 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

式中 E' 和 E 见图1(c), 为切线模量和弹性模量. s_m 是变形中最大应力的绝对值. $\dot{\epsilon}$ 是应变率, 上标的一点表示对时间求导,

$$\dot{\epsilon} = \dot{u} + x \dot{\theta} \quad (2.2)$$

其中 u 、 θ 如图1(b)所示, 为位移分量.

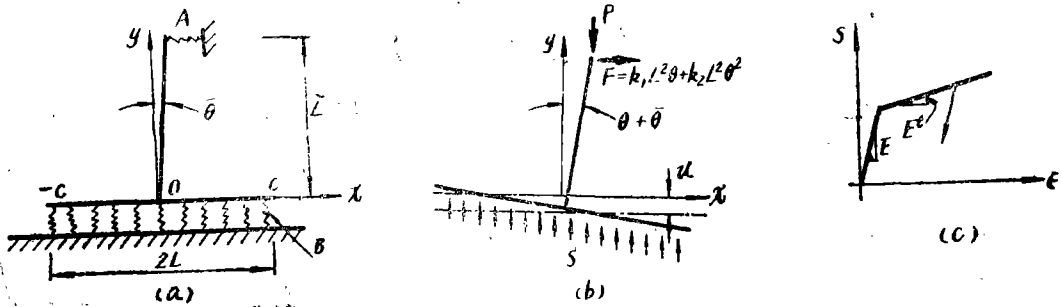


图1 Hutchinson模型

模型的率平衡方程为:

$$\dot{P} = \int_{-L}^L \dot{s} dx \quad (2.3)$$

$$\{P \tilde{L}(\theta + \bar{\theta})\} + (F \tilde{L}) = \int_{-L}^L \dot{s} x dx \quad (2.4)$$

文〔1〕对这个模型的屈曲和后屈曲有详尽的描述. $P = P_c = \frac{2}{3} E' L^3 / \tilde{L}$ 时模型屈曲, 并在图1(a)中 $\bar{c}(c)$ 点卸载. 卸载区随 P 的增大向右扩展, 直至最大载荷 P_m . 记任一 P 时, 卸载区长度的无量纲量为 ξ :

$$L\xi = d + L \quad (2.5)$$

式中 d 为卸载区右端点, 满足中性加载条件:

$$\dot{\epsilon} = \dot{u} + d \dot{\theta} = 0 \quad (2.6)$$

以 ξ 作时间度量, 即,

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \quad (2.7)$$

并将 (2.5) — (2.7) 式代入 (2.3) — (2.4), 利用 (2.1) 得:

$$\frac{dP}{d\theta} = E' L^2 \left(2 - 2\xi - m \frac{\tau^2}{2} \right) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} (\theta + \bar{\theta}) \cdot l \cdot \frac{dP}{d\theta} + Pl + 2k_1 L \tilde{L} \theta + 3k_2 l \tilde{L} \theta^2 \\ = E' L^2 \left(\frac{2}{3} + m \cdot \frac{\xi^2}{2} - m \cdot \frac{\xi^3}{6} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

式中 $m = (E/E') - 1$, $l = \tilde{L}/L$. 这是微分方程形式的平衡方程. 对 (2.9) 作 ξ 的微分, 并代入 (2.8) 式的结果, 整理后便得:

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \frac{(2 + m\xi)(\theta + \bar{\theta})}{2 \left(2 - \xi - m \frac{\xi^2}{2} \right) + 2\kappa_1 + 6\kappa_2 \theta} = \frac{m \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} \right)}{l \left[2 \left(2 - 2\xi - m \cdot \frac{\xi^2}{2} \right) + 2\kappa_1 + 6\kappa_2 \theta \right]} \quad (2.10)$$

式中 $\kappa_1 = k_1/E'$, $\kappa_2 = k_2/E'$. $\kappa_2 = 0$ 时上式有解:

$$\begin{aligned} l(\theta + \bar{\theta}) = (4 + 2\kappa_1 - 4\xi - m\xi^2)^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{\xi}{4} - \frac{2m+3}{2m} \right) \cdot (4 + 2\kappa_1 - 4\xi - m\xi^2) \right. \\ \left. - \left(\frac{3m+3}{m} + \frac{\kappa_1}{2} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{m}} \arcsin \frac{2+m\xi}{\sqrt{4m+4+2m\kappa_1}} + C_1 \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中 C_1 为常数, 由初始条件 $\xi = 0$, $\theta = \hat{\theta}$ 确定. $\hat{\theta}$ 是卸载开始时转角, 由第四节给出. $\bar{\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = 0$. 将 (2.11) 代回 (2.8) — (2.9) 式, 便可写为 P 的 ξ 函数表示, 这里不再给出.

由 (2.8) 式可得一个对以下分析至关重要的结论: 模型承受最大载荷 P_m 时, 卸载区长度为定值 ξ_m , 与 θ 无关, 由 $\frac{dP}{d\theta} = 0$ 给出为:

$$\xi_m = 2 / [\sqrt{m+1} + 1] \quad (2.12)$$

三、无缺陷Hutchinson模型的后屈曲

这是图 1 中 $\bar{\theta} = 0$ 的情形.

前已证明, 模型最大承载 P_m 对应的卸载区长度为 ξ_m . 用这个特点, 我们除以 ξ 为参数, 在 $\xi = 0$, 即 $P = P_c$ 处作第一次摄动外, 还以 $\xi - \xi_m$ 为参数, 在 $\xi = \xi_m$, 即 $P = P_m$ 处作第二次摄动, 并连接它们得到有效范围较大的摄动解.

1. $P_c(\xi = 0)$ 处的摄动分析

$\xi \rightarrow 0 \Rightarrow P \rightarrow P_c$, $\theta \rightarrow 0$, $u \rightarrow u_c$, 因此:

$$P/P_c = 1 + P_1 \xi + P_2 \xi^2 + P_3 \xi^3 + \dots \quad (3.1)$$

$$\theta = \theta_1 \xi + \theta_2 \xi^2 + \theta_3 \xi^3 + \dots \quad (3.2)$$

将上述摄动展式代入 (2.3) — (2.4), 并用 (2.5) — (2.7) 消去 $\dot{u}$, 按常规摄动步骤, 确定:

$$\begin{aligned}\theta_1 = P_1 = 0, \quad \theta_2 = \frac{m}{4l} \frac{1}{2 + \kappa_1}, \quad P_0 P_2 = 2E' L^2 \theta_2, \\ \theta_3 = \left(-\frac{m}{6l} + \frac{10}{3} \theta_2 \right) / (4 + 2\kappa_1), \quad P_0 P_3 = 2E' L^2 \theta_3 - \frac{4}{3} E' L^2 \theta_2, \quad (3.3)\end{aligned}$$

2. $P_m(\xi = \xi_m)$ 处的摄动分析

以 $\xi = \xi - \xi_m$ 为摄动参数, 作摄动展开

$$P = P_m + P_1^* \xi + P_2^* \xi^2 + P_3^* \xi^3 + \dots \quad (3.4)$$

$$\theta = \theta_m + \theta_1^* \xi + \theta_2^* \xi^2 + \theta_3^* \xi^3 + \dots \quad (3.5)$$

式中 θ_m 为 $\xi = \xi_m$ 时模型转角. 上述展式代入 (2.3) — (2.4), 用 (2.5) — (2.7) 消去 $\dot{u}$, 常规摄动法求解得:

$$\begin{aligned}P_m = E' L^3 A / \tilde{L} - 2k_1 L^2 \theta_m - 3k_2 L^2 \theta_m^2, \quad P_1^* = 0 \\ \theta_1^* = \alpha(B + b \theta_m l), \quad \theta_2^* = \alpha \left\{ C + \left[\frac{3}{2} b \theta_1^* + c \theta_m - 3\kappa_2 (\theta_1^*)^2 \right] l \right\} \\ P_2^* = -\frac{E' L^2}{2} b \theta_1^*, \quad P_3^* = -\frac{2}{3} E' L^2 b \theta_2^* - \frac{E' L^2}{3} c \theta_1^* \quad (3.6)\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}A = \frac{2}{3} + \frac{m}{2} \xi_m - \frac{m}{6} \xi_m^3, \quad B = m \xi_m - \frac{m}{2} \xi_m^2, \quad C = \frac{m}{2} (1 - \xi_m^2) \\ a = \frac{m}{2} \xi_m^2 + 2\xi_m - 2, \quad b = m \xi_m + 2, \quad c = \frac{m}{2}, \quad \alpha = (2\kappa_1 l + 6\kappa_2 \theta_m l)^{-1} \quad (3.7)\end{aligned}$$

3. 两个摄动结果的连接

以上两个摄动结果, 即 (3.1) — (3.2) 和 (3.4) — (3.5), P_c 处的摄动是确定的 P_m 处摄动 θ_m 待定. θ_m 应由两个摄动解连接定出. 因为两个摄动结果是同一函数不同展开点的展开, 可简单地令它们在 $\xi = \xi_m / 2$ 时相等, 即:

$$\begin{aligned}P \Big|_{\xi = \frac{\xi_m}{2}} = P_c \left[1 + P_1 \left(\frac{\xi_m}{2} \right) + P_2 \left(\frac{\xi_m}{2} \right)^2 + P_3 \left(\frac{\xi_m}{2} \right)^3 + \dots \right] \\ = P_m + P_1^* \left(-\frac{\xi_m}{2} \right) + P_2^* \left(-\frac{\xi_m}{2} \right)^2 + P_3^* \left(-\frac{\xi_m}{2} \right)^3 + \dots \quad (3.8)\end{aligned}$$

由此确定了 θ_m , 完成 P_m 处的摄动.

4. $\kappa_2 = 0$ 时摄动解与解析解的比较

$\kappa_2 = 0$ 时, 两个摄动结果是:

$$P = P_c \left[1 + \frac{3m}{4(2 + \kappa_1)} \xi^2 - \frac{m(1 + 3\kappa_1)}{4(2 + \kappa_1)^2} \xi^3 + \dots \right] \quad \left(\xi < -\frac{\xi_m}{2} \right) \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}P = \frac{3}{2} P_c \left\{ A - 2\kappa_1 l \theta_m - \frac{Bb + b^2 l \theta_m}{4\kappa_1} \xi^2 - \frac{1}{12\kappa_1^2} [(4\kappa_1 b C + 3b^2 B + 2\kappa_1 B c) \right. \\ \left. + (3b^2 + 6\kappa_1 c) l \theta_m] \xi^3 + \dots \right\} \quad \left(\xi \geq -\frac{\xi_m}{2} \right) \quad (3.10)\end{aligned}$$

由连接条件 (3.8) :

$$\theta_m = \left[\frac{S - T}{U} \right] \quad (3.11)$$

式中:

$$S = P_c \left[1 + \frac{3m}{4(2 + \kappa_1)} \frac{\xi_m^2}{4} - \frac{m(1 + 3\kappa_1)}{4(2 + \kappa_1)^2} \frac{\xi_m^3}{8} + \dots \right] \quad (3.12)$$

$$T = \frac{3}{2} P_c \left[\frac{1}{12\kappa_1^2} (4\kappa_1 b C + 3b^2 B + 2\kappa_1 B c) - \frac{\xi_m^3}{8} - \frac{B b}{4\kappa_1} \frac{\xi_m^2}{2} + A \right] \quad (3.13)$$

$$U = \frac{3}{2} P_c \left[\frac{1}{12\kappa_1^2} (3b^2 + 6\kappa_1 c) l - \frac{\xi_m^3}{8} - \frac{b^2 l}{4\kappa_1} \frac{\xi_m^2}{2} - 2\kappa_1 l \right] \quad (3.14)$$

若 $l = 1$, $m = 9$, $\kappa_1 = 10$, 则 $\xi_m = 0.4805$,

$$P = P_c [1 + 0.5625 \xi^2 - 0.4843 \xi^3 + \dots] \quad \left(\xi \leq \frac{\xi_m}{2} \right) \quad (3.15)$$

$$P = P_c [1.0504 - 0.8417(\xi - \xi_m)^2 - 1.73(\xi - \xi_m)^3 + \dots] \quad \left(\xi \geq \frac{\xi_m}{2} \right) \quad (3.16)$$

同样条件下, 用 $\xi \rightarrow 0$, $\theta = 0$ 确定 (2.11) 式中 C_1 , 并代入 (2.8) — (2.9), 表出 $P(\xi)$, 将其在 $\xi = 0$ 和 $\xi = \xi_m$ 处展开, 得解析解结果:

$$P = P_c [1 + 0.5625 \xi^2 - 0.4843 \xi^3 + \dots] \quad (\xi \rightarrow 0) \quad (3.17)$$

$$P = P_c [1.0527 - 0.8418(\xi - \xi_m)^2 + \dots] \quad (\xi \rightarrow \xi_m) \quad (3.18)$$

比较 (3.15) — (3.16) 和 (3.17) — (3.18), 易见本文摄动结果有较大的有效范围和较高的精度。

四、Hutchinson模型的缺陷敏感分析

这是图 1 中 $\bar{\theta} \neq 0$ 的情况。这时模型不再有分支。本节研究缺陷对模型最大承载的影响。

就 Hutchinson 模型, 外载 P 较小时, 整个连续弹簧都作塑性变形, P 增大时, θ 增大。当 P 为某个值 $\hat{P}$ 时, 模型将在 $\bar{C}$ 处开始卸载。卸载区随 P 增大而扩张, 直至 P 达最大值 $\bar{P}_m$ 。 $P < \hat{P}$ 时, 模型相当作非线性弹性变形, 可用 Koiter 理论描述, 并求出卸载开始时外载 $\hat{P}$ 和转角 $\hat{\theta}$ (2)。 $P > \hat{P}$ 时, 模型的分析需要新方法。下面在已知 $\hat{P}$ 和 $\hat{\theta}$ 的基础上作 $P > \hat{P}$ 时的分析。

注意到 $\bar{\theta} \rightarrow 0$ 时, $\hat{P} \rightarrow P_c$, $\bar{P}_m \rightarrow P_m$, P_m 即无缺陷时模型最大承载。可见 $P > \hat{P}$ 的分析与后屈曲分析对应。又由第二节证明, ξ_m 与 $\bar{\theta}$ 无关。因此, 可沿用第三节后屈曲的分析方法, 以卸载区变化 ξ 和 $(\xi - \xi_m)$ 为参数, 在 $\xi = 0$ 和 $\xi = \xi_m$ 处分别摄动, 并连接两个摄动结果完成分析。仍以 ξ 为时间度量, (2.5) — (2.7) 仍适用。

1. $\hat{P}(\xi = 0)$ 处的摄动分析

$\xi \rightarrow 0 \Rightarrow P \rightarrow \hat{P}$, $\theta \rightarrow \hat{\theta}$, 展开 P 、 θ 为:

$$P = \hat{P} + \bar{P}_1 \xi + \bar{P}_2 \xi^2 + \bar{P}_3 \xi^3 + \dots \quad (4.1)$$

$$\theta = \hat{\theta} + \bar{\theta}_1 \xi + \bar{\theta}_2 \xi^2 + \bar{\theta}_3 \xi^3 + \dots \quad (4.2)$$

将上述摄动展开式代入 (2.3) — (2.4), 用 (2.5) — (2.7) 消去 $\dot{u}$, 常规摄动, 得:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1 &= \psi(\hat{\theta} + \bar{\theta}) / (1 + h\hat{\theta}); \quad \bar{P}_1 = 2E' L^2 \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 &= \theta_2 / (1 + h\hat{\theta}) - \left[-\frac{m}{2} (\hat{\theta} + \bar{\theta}) + 3\bar{\theta}_1 + 3\kappa_2 \bar{\theta}_1^2 \right] / [2(1 + h\hat{\theta})(2 + \kappa_1)] \\ \bar{\theta}_3 &= \theta_3 / (1 + h\hat{\theta}) - \beta \cdot \left[-\frac{2}{3} m \bar{\theta}_1 + 6\kappa_2 \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 \right] - \frac{10}{3} \beta \cdot \left[-\frac{m}{2} (\hat{\theta} + \bar{\theta}) \right. \\ &\quad \left. + 3\bar{\theta}_1 + 5\kappa_2 \bar{\theta}_1^2 + h\theta_2 \hat{\theta} (4 + 2\kappa_1) \right] / [(1 + h\hat{\theta})(4 + 2\kappa_1)] \\ \bar{P}_2 &= 2E' L^2 \bar{\theta}_2 - E' L^2 \bar{\theta}_1; \quad \bar{P}_3 = 2E' L^2 \bar{\theta}_3 - \frac{4}{3} E' L^2 \bar{\theta}_2 + \frac{E' - E}{6} L^2 \bar{\theta}_1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

式中 θ_2 、 θ_3 与后屈曲分析同, 见 (3.3),

$$\psi = (2 + \kappa_1)^{-1}, \quad h = 3\kappa_2 \psi; \quad \beta = (4 + 2\kappa_1 + 6\kappa_2 \hat{\theta})^{-1} \quad (4.4)$$

$\bar{\theta} \rightarrow 0 \Rightarrow \hat{\theta} \rightarrow 0$, 故 (4.3) 式 $\bar{\theta} \rightarrow 0$ 时收敛于 (3.3) 式.

2. $\bar{P}_m (\xi = \xi_m)$ 处的摄动分析

以 $\xi = (\xi - \xi_m)$ 为参数, 摄动展开 P 、 θ 为:

$$P = \bar{P}_m + \bar{P}_1^* \xi + \bar{P}_2^* \xi^2 + \bar{P}_3^* \xi^3 + \dots \quad (4.5)$$

$$\theta = \bar{\theta}_m + \bar{\theta}_1^* \xi + \bar{\theta}_2^* \xi^2 + \bar{\theta}_3^* \xi^3 + \dots \quad (4.6)$$

代入 (2.3) — (2.4), 并用 (2.5) — (2.7), 摄动求解得:

$$\begin{aligned} \bar{P}_m &= E' L^3 A / \tilde{L} - 2\kappa_1 E' L^2 \bar{\theta}_m - 3\kappa_2 E' L^2 \bar{\theta}_m^2 \\ \bar{\theta}_1^* &= \bar{\alpha} (B + b \bar{\theta}_m l + b \bar{\theta}_m l); \quad \bar{P}_1^* = 0; \quad \bar{P}_2^* = -\frac{1}{2} E' L^2 b \bar{\theta}_1^* \\ \bar{\theta}_2^* &= \bar{\alpha} \left\{ C + \left[c \bar{\theta}_m + \frac{3}{2} b \bar{\theta}_1^* + c \bar{\theta}_m - 3\kappa_2 (\bar{\theta}_1^*)^2 \right] l \right\} \\ \bar{P}_3^* &= -\frac{2}{3} E' L^2 b \bar{\theta}_2^* - \frac{1}{3} E' L^2 c \cdot \bar{\theta}_1^*; \quad \bar{\alpha} = [(2\kappa_1 + 6\kappa_2 \bar{\theta}_m) l]^{-1} \end{aligned} \quad (4.8)$$

式中有关系数的定义与 (3.7) 式同. 显然, (4.8) 式在 $\bar{\theta} \rightarrow 0$ 时收敛于 (3.6) 式.

3. 两个摄动结果的连接

和后屈曲分析相同, $\bar{P}_m$ 处摄动还需确定 $\bar{\theta}_m$. $\bar{\theta}_m$ 自然也由下式给出:

$$\begin{aligned} P \Big|_{\xi = \xi_m} &= \hat{P} + \bar{P}_1 \left(\frac{\xi_m}{2} \right) + \bar{P}_2 \left(\frac{\xi_m}{2} \right)^2 + \bar{P}_3 \left(\frac{\xi_m}{2} \right)^3 + \dots \\ &= \bar{P}_m + \bar{P}_1^* \left(-\frac{\xi_m}{2} \right) + \bar{P}_2^* \left(-\frac{\xi_m}{2} \right)^2 + \bar{P}_3^* \left(-\frac{\xi_m}{2} \right)^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

因为 $\hat{\theta}$ 是 $\bar{\theta}$ 的函数^[2], (4.9) 确定的 $\bar{\theta}_m$ 也是 $\bar{\theta}$ 的函数, 由 $\bar{\theta}_m$ 代回 (4.7) 式确定 $\bar{P}_m$ 与 $\bar{\theta}$ 的关系, 这就是缺陷对模型最大承载能力的影响, 即缺陷敏感分析的最终目的.

4. $\kappa_2 = 0$ 时摄动解和解析解的比较

由文 [2], $\kappa_2 = 0$ 时,

$$\hat{\theta} = e \bar{\theta}^{\frac{1}{2}} + O(\bar{\theta}), \quad \hat{P} = P_c - P_c f \hat{\theta} + O(\bar{\theta}) \quad (4.10)$$

式中 $O(\bar{\theta})$ 表示 $\bar{\theta}$ 阶小量.

$$e = \sqrt{2} [3l(2 + \kappa_1)]^{-\frac{1}{2}}, \quad f = 3l + 3l\kappa_1 \quad (4.11)$$

与 (4.10) 式取同阶近似, 略去带 $\bar{\theta}$ 的项, 上三小节的结果为:

$$P = P \Big|_{\bar{\theta}=0} + P_c \left[-f + 3 \left(\psi_2 - \frac{1}{2} \psi \right) \xi^2 + \left(3\psi_3 - 2\psi_2 - \frac{m}{4} \psi \right) \xi^3 \right] \hat{\theta} \quad \left(\xi < \frac{\xi_m}{2} \right)$$

$$P = \frac{3}{2} P_c \left\{ A - 2\kappa_1 l \bar{\theta}_m - \frac{Bb + b^2 l}{4\kappa_1} \bar{\theta}_m \xi^2 - \frac{1}{12\kappa_1^2} [(4\kappa_1 bC + 3b^2 B + 2\kappa_1 Bc) + (3b^3 + 6\kappa_1 c) l \bar{\theta}_m] \xi^3 \right\} \quad \left(\xi > -\frac{\xi_m}{2} \right) \quad (4.12)$$

$$\bar{\theta}_m = \theta_m + \frac{\bar{S}}{U} e (\bar{\theta})^{\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

式中 $P|_{\bar{\theta}=0}$ 如 (3.9) 式, θ_m 、 U 见 (3.11) — (3.14) 式,

$$\bar{S} = P_c \left[-f + 3 \left(\psi_2 - \frac{1}{2} \psi \right) \frac{\xi_m^2}{4} + \left(3\psi_3 - 2\psi_2 - \frac{m}{4} \psi \right) \frac{\xi_m^3}{8} \right] \quad (4.14)$$

$$\psi = (2 + \kappa_1)^{-1}, \quad \psi_2 = \left(-3\psi + \frac{m}{2} \right) (4 + 2\kappa_1)^{-1}, \quad \psi_3 = \frac{m}{3} \psi^2 + \frac{5}{3} \psi \cdot \psi_2 \quad (4.15)$$

将 (4.13) 式代入 (4.7), 注意到 (3.6) 式:

$$\bar{P}_m = P_m - 2\kappa_1 E' L^2 \cdot \frac{\bar{S}}{U} e (\bar{\theta})^{\frac{1}{2}} \quad (4.16)$$

这就是缺陷敏感表达式, 它揭示, 模型的最大承载按缺陷的 $(\bar{\theta})^{\frac{1}{2}}$ 幂次下降.

若对 (4.16) 进一步简化, 略去带 ξ_m 的项:

$$\bar{P}_m P_m^{-1} = 1 - P_c P_m^{-1} f \hat{\theta} \approx 1 - f \hat{\theta} \quad (4.17)$$

与文 [2] 的 (2.26) 式相同, 它与有关数值计算结果的比较, 文 [2] 有详细的讨论.

五、讨 论

以上各节分析了双线性硬化的 Hutchinson 模型. 真实结构远比模型复杂, 本文方法若在实际结构中应用, 还需克服许多困难, 最主要的还是本构关系非双线性硬化和模型与真实结构间的差别.

本构关系若不是双线性硬化, 模型的 ξ_m 将与 $\bar{\theta}$ 有关. 但一般模型最大承载很少超过屈曲载荷的 10%, 用双线性硬化逼近屈曲后本构关系还是有效的. 而且, 我们曾作过计算, 采用对应折减模量屈曲公式的卸载区长度为一次近似, 以本文摄动方法为计算方法, 迭代求解, 可以很快逼近真实的卸载区长度.

本文方法的关键, 是 P_m 处的第二次摄动. 这要求对结构承受最大荷载时的卸载区有个估计. 可以证明, 对梁柱, 用一般梁理论, 和 Hutchinson 模型一样, 就双线性硬化, 最大承载时的卸载区与 $\bar{\theta}$ 无关, 可简单计算出.

如图 2 示, 梁受 P 作用屈曲后, 达最大承载 P_m . 以 $\dot{\epsilon}$ 标轴向应变率, $\dot{\eta}$ 标旋转率, 任一点应变率为:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} + x \dot{\eta} \quad (5.1)$$

相应的, 卸载区端点坐标 d 的定义式是:

$$\dot{\epsilon} + d \dot{\eta} = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon} = -d \dot{\eta} \quad (5.2)$$

$\dot{P} = P_m$ 时, $\dot{P} = 0$, 因此:

$$\dot{P} = \dot{N} = \left\{ \int_0^d b(x)(d-x)dx + \frac{E'}{E} \int_d^H b(x)(d-x)dx \right\} \dot{\eta} E = 0 \quad (5.3)$$

式中 $b(x)$ 为梁截面宽, N 为轴向应力, 由 (5.3) 式, $P = P_m$ 时, 梁的任一截面卸载区处处相等, 与缺陷无关. 这就证明了我们的结论.

本文方法至少在梁中可以应用.

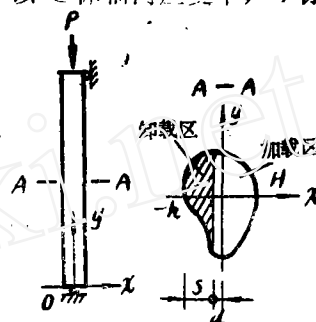


图 2 受压柱的卸载区

参 考 文 献

- [1] Hutchinson, J. W., J. Mech. Phys. Solids 21 (1973), 163.
- [2] Hutchinson, J. W., Ibid, 21 (1973), 191~204.
- [3] Van der fleijden, A. M. A., Ibid, 27 (1979), 441.
- [4] Needleman, A. & L. Tvergaard, V., in Mech. of solids, ed, H. G. Kopkins & L. M. J. Sewell, Pergaman Press (1982), 453~498.

A POSTBUCKLING AND IMPERFECTION-SENSITIVITY ANALYSIS OF HUTCHINSON'S MODEL

Su Xuming Lu Wenda

(Institute of Applied Math. and Mech.
Shanghai Univ. of Tech.)

Abstract In this paper, the postbuckling and imperfection-sensitivity behavior of Hutchinson's model with bilinear hardening constitutive relations is analysed. An analytical solution is presented first, and then the special feature of the model that the unloading areas when the model bears its limit loads can be fixed without considering its imperfection is noticed. Using the variation of unloading area as the perturbation parameter, we perturbate the model two times, one near where unloading area equals to zero, the other near where the model nears its limit load, and connect them to get the asymptotic solution with good converging qualities.

The question how to extend the method to real structures is also discussed in detail.

Key Words Plastic postbuckling, Imperfection-sensitivity analysis, Hutchinson's model, Bilinear hardening