

应变率敏感材料的弹粘塑性 硬化模型及其应用¹⁾

潘立功 徐秉业

(清华大学)

提要 本文在Perzyna弹粘塑性模型的基础上,研究了应变率的硬化效应。假设应变率不仅使加载面作各向同性的均匀胀缩,而且还使它在偏应力空间产生一个移动量,从而得到了动力加载条件。本文用此模型和Laplace变换求得了受内压作用下厚壁圆筒的封闭解。

关键词 应变率 硬化 动力加载面 厚壁圆筒

前言

在实际工程中,人们发现固体材料在受力状态下的变形与时间有关。特别是,在短时强载荷的作用下材料的屈服极限明显升高,应力应变关系依赖于应变率的历史。但是,目前对应变率硬化效应的定量研究尚较少^[1,2]。本文在P. Perzyna弹粘塑性模型的基础上,研究了应变率对材料硬化效应的影响。假设应变率不仅使加载面作各向同性的均匀胀缩,而且还使它在偏应力空间产生一个移动量,移动量的大小与塑性应变率成正比,从而得到反映鲍氏效应的动力加载条件。本文提出了确定应变率运动硬化系数的方法,同时用几何方法形象地描述了应变率硬化现象使动力加载面移动和胀缩的情况。采用这个模型,本文用Laplace变换求得了受突加内压作用下厚壁圆筒的封闭解。当不考虑应变率运动硬化的影响时,则得到原Perzyna模型的结果[1—3]。

一、基本方程

P. Perzyna弹粘塑性本构关系为

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (1a)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \frac{1-2\nu}{E} \dot{\sigma} \delta_{ij} \quad (1b)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \gamma^0 \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1c)$$

式中

$$\dot{S}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\sigma} \delta_{ij}, \quad \dot{\sigma} = \dot{\sigma}_{kk}/3 \quad (2)$$

$$\langle \Phi(F) \rangle = \Phi(F) H(F) \quad (3a)$$

1) 本课题由国家自然科学基金资助

本文于1988年5月5日收到,1988年10月收到修改稿。

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (3b)$$

$$F(\sigma_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}^p) = f(\sigma_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}^p) / k - 1 \quad (4)$$

在本文中假设动力加载面为

$$f(\sigma_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}^p) = \sqrt{\frac{1}{2}(\dot{S}_{ij} - \dot{\bar{\alpha}}_{ij})(\dot{S}_{ij} - \dot{\bar{\alpha}}_{ij})} \quad (5)$$

$$\dot{\bar{\alpha}}_{ij} = c \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (6)$$

常数 c 为运动硬化系数。从式 (4) 和 (5) 得

$$\partial F / \partial \sigma_{ij} = \frac{1}{2kf} (\dot{S}_{ij} - \dot{\bar{\alpha}}_{ij}) \quad (7)$$

又由式 (1) ~ (7) 容易求得

$$\sqrt{\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} = \gamma \Phi(F) \quad (8a)$$

$$\gamma = \gamma^0 / 2k \quad (8b)$$

从式 (4) 和 (8) 可以给出动力加载面为

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\dot{S}_{ij} - \dot{\bar{\alpha}}_{ij})(\dot{S}_{ij} - \dot{\bar{\alpha}}_{ij})} = k \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \right) \right\} \\ \equiv \sigma^* / \sqrt{3} \quad (9)$$

上式中的 $\dot{\bar{\alpha}}_{ij}$ 和 Φ^{-1} 分别表示由塑性应变率引起的运动硬化和各向同性硬化的影响。

对于无限长的厚壁圆筒, $\dot{\varepsilon}_\theta = \dot{\varepsilon}_r = \dot{\varepsilon}_z = 0$, 从式 (1)、(2)、(6) 和 (7) 可知: $\dot{S}_z = \dot{\bar{\alpha}}_z = 0$, 则有: $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta) / 2$, $\alpha_z = (\alpha_r + \alpha_\theta) / 2$ 。由应力偏张量和移动偏张量的定义得

$$\dot{S}_\theta = -\dot{S}_r = (\sigma_\theta - \sigma_r) / 2 \quad (10a)$$

$$\dot{\bar{\alpha}}_\theta = -\dot{\bar{\alpha}}_r = (\alpha_\theta - \alpha_r) / 2 \quad (10b)$$

将上式代入式 (5) 得

$$f = \pm (\sigma_\theta - \sigma_r - \alpha_\theta + \alpha_r) / 2 \quad (11)$$

在受突加内压作用的厚壁圆筒中, $\sigma_\theta - \alpha_\theta > \sigma_r - \alpha_r$, 因而上式取正号。从式 (1)、(6)、(7) 和 (11) 得

$$\dot{\varepsilon}_\theta^p = -\dot{\varepsilon}_r^p = \gamma \Phi(F) \quad (12a)$$

$$\dot{\bar{\alpha}}_\theta = -\dot{\bar{\alpha}}_r = c \gamma \Phi(F) \quad (12b)$$

将几何关系

$$\varepsilon_\theta = u / r, \quad \varepsilon_r = du / dr \quad (13)$$

和式 (12a) 代入式 (1) 可以得到

$$3K \left(\frac{d\dot{u}}{dr} + \frac{\dot{u}}{r} \right) = \dot{\sigma}_r + \dot{\sigma}_\theta \quad (14)$$

$$\frac{d\dot{u}}{dr} - \frac{\dot{u}}{r} = \frac{1}{2G} (\dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\theta) - 2\gamma\Phi(F) \quad (15)$$

$$\text{式中 } 3K = E/(1-2\nu), 2G = E/(1+\nu) \quad (16)$$

$$\text{如果取 } \Phi(F) = F = \Phi^{-1}(F) \quad (17)$$

则

$$\bar{\alpha}_\theta = -\bar{\alpha}_r = \frac{c\gamma}{2k+2c\gamma}(\sigma_\theta - \sigma_r - 2k) \quad (18)$$

$$F = \frac{1}{2k+2c\gamma}(\sigma_\theta - \sigma_r - 2k) \quad (19)$$

二、受内压作用的厚壁圆筒的弹粘塑性分析

设厚壁圆筒初始为零应力的静止状态, 即当 $t=0$ 时, $u=0$, $\sigma_r=\sigma_\theta=\sigma_z=0$, 则有

$$\mathcal{L}(\dot{u}) = \omega \bar{u}, \mathcal{L}(\dot{\sigma}_r) = \omega \bar{\sigma}_r, \mathcal{L}(\dot{\sigma}_\theta) = \omega \bar{\sigma}_\theta \quad (20)$$

式中 $\mathcal{L}$ 为 Laplace 变换符号

$$\mathcal{L}(A) = \int_0^\infty A(r, t) e^{-\omega t} dt = \bar{A}(r, \omega) \quad (21)$$

将式 (15) 和平衡方程

$$d\sigma_r/dr + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0 \quad (22)$$

作 Laplace 变换后, 用式 (17)、(19) 和 (20) 消去 $\bar{\sigma}_r$ 和 $\bar{\sigma}_\theta$, 则得关于 $\bar{u}$ 的方程

$$\frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{u}}{dr} - \frac{\bar{u}}{r^2} = \frac{2D}{r} \quad (23)$$

上面微分方程的一般解为

$$\bar{u} = c_1 r + c_2/r + D r \ln r \quad (24a)$$

$$\bar{\sigma}_r = 3K c_1 - A_1 c_2/r^2 + 3K D \ln r \quad (24b)$$

式中

$$D = \frac{4\gamma G k}{\omega[\omega(2G+3k)(k+c\gamma) + 6kG\gamma]} \quad (25a)$$

$$A_1 = \frac{2G\omega(k+c\gamma)}{\omega(k+c\gamma) + 2\gamma G} \quad (25b)$$

受突加内压 p 作用下内外半径分别为 a 和 b 的厚壁圆筒, 边界条件为

$$\sigma_r|_{r=a} = -pH(t), \sigma_r|_{r=b} = 0 \quad (26)$$

对上式作 Laplace 变换得

$$\bar{\sigma}_r|_{r=a} = -p/\omega, \bar{\sigma}_r|_{r=b} = 0 \quad (27)$$

将上式代入式 (24) 可得积分常数 c_1 和 c_2 , 然后作 Laplace 逆变换给出应力场、位移场、动力加载面和移动偏张量分量随时间变化的规律如下:

$$\sigma_r = \frac{pa^2}{b^2-a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{2ka^2}{b^2-a^2} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 \ln \frac{r}{b} + \ln \frac{a}{r} - \left(\frac{b}{r} \right)^2 \ln \frac{a}{b} \right] (1 - e^{-\omega t}) \quad (28a)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) + \frac{2ka^2}{b^2 - a^2} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 \ln \frac{r}{b} + \ln \frac{a}{r} + \left(\frac{b}{r} \right)^2 \ln \frac{a}{b} \right] (1 - e^{-mt}) + k(1 - e^{-mt}) \quad (28b)$$

$$\sigma_z = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} + \frac{2ka^2}{b^2 - a^2} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 \ln \frac{r}{b} + \ln \frac{a}{r} \right] (1 - e^{-mt}) + \frac{k}{2} (1 - e^{-mt}) \quad (28c)$$

$$f = \frac{k}{k + c\gamma} \left\{ \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b}{r} \right)^2 + c\gamma + \left[\frac{2ka^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b}{r} \right)^2 \ln \frac{a}{b} + \frac{k}{2} \right] (1 - e^{-mt}) \right\} \quad (28d)$$

$$\bar{a}_{\theta} = -\bar{a}_r = \frac{c\gamma}{k + c\gamma} \left\{ \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b}{r} \right)^2 - k + \left[\frac{2ka^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b}{r} \right)^2 \ln \frac{a}{b} + \frac{k}{2} \right] (1 - e^{-mt}) \right\} \quad (28e)$$

$$u = \frac{2k}{3K} \left[\frac{1 - e^{-mt}}{b^2 - a^2} \left(a^2 \ln \frac{a}{r} - b^2 \ln \frac{b}{r} \right) + \frac{pa^2}{2k(b^2 - a^2)} \right] + \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b}{r} \right)^2 \left[\left(\frac{2k\gamma}{k + c\gamma} t - \frac{3k}{3K} e^{-mt} \right) \ln \frac{a}{b} + \left(\frac{\gamma t}{k + c\gamma} + \frac{1}{2G} \right) p \right] \quad (28f)$$

式中

$$m = \frac{3K}{3K + 2G} \cdot \frac{2G\gamma}{k + c\gamma} \quad (29)$$

要使厚壁圆筒在 $t = 0$ 时, 整个圆筒全部进入塑性流动状态, 则要求在 $r = b$ 处, $F = f/k - 1 \geq 0$, 即

$$p \geq p_f \quad (30a)$$

$$p_f = k \left(\frac{b^2}{a^2} - 1 \right) \quad (30b)$$

三、运动硬化系数 c 的确定

由单向拉伸动力实验和动力加载面确定 c 的值. 在单向拉伸实验中

$$S_1 = 2\sigma/3, S_2 = S_3 = -\sigma/3 \quad (31a)$$

$$\bar{a}_1 = c\dot{\epsilon}^p, \bar{a}_2 = \bar{a}_3 = -c\dot{\epsilon}^p/2 \quad (31b)$$

将上式代入式 (9), 并用式 (8) 和 (17) 得

$$c = \frac{2}{3} \frac{d\sigma}{d\dot{\epsilon}^p} + \frac{k}{\gamma} \quad (32)$$

从实验结果^[3] 可得 $d\sigma/d\ln \dot{\epsilon}^p = c^* = \text{const}$, 则 $\frac{d\sigma}{d\dot{\epsilon}^p} = c^*/\dot{\epsilon}^p$. 对于应变率 $\dot{\epsilon}^p > 10^3 \text{ sec}^{-1}$,
 $d\sigma/d\dot{\epsilon}^p \ll k/\gamma$, 所以取 $c = k/\gamma$.

四、算例和讨论

设 $b/a = 2$, $E = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0.3$, $\gamma = 140 \text{ sec}^{-1}$, $c = 2 \text{ N/mm}^2 \cdot \text{sec}$, $p/k = 4$. 从式 (30) 可知 $p_f/k = 3$, 显然 $p > p_f$, 整个圆筒都为塑性状态. 图 1 表明动力加载面 f/k 和移动偏张量分量 α_{θ}/k 均随半径 r/a 的增大而减小; 运动硬化和各向同性硬化效应组合的结果使加载面的半径 $R(= \sqrt{2}f)$ 比没有运动硬化效应时的加载面半径要小. 对于同一个 c 值, 当 $t = 0$ 和 $t \rightarrow \infty$ 时, f/k , α_{θ}/k , α_r/k 各自都有一交点, 不难证明这些曲线交点处的 r_0/a

值是相同的, 与时间无关, 且 (参见图 1)

$$(r_0/a)^2 = \frac{4(b/a)^2 \ln b/a}{(b/a)^2 - 1} \quad (33)$$

在 $1 \leq r/a \leq r_0/a$ 内, 加载面随时间的增加而减小; 在 $r_0/a \leq r/a \leq b/a$ 内, 加载面随时间的增加而增大. 从图 2 可知, 随着时间的增加径向应力的绝对值增大; 环向应力在内壁附近松弛, 而在外壁附近则升高.

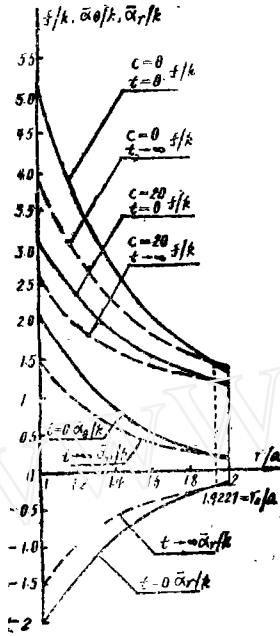


图1 $f/k, \bar{\alpha}_r/k, \bar{\alpha}_r/k \sim r/a$ 曲线

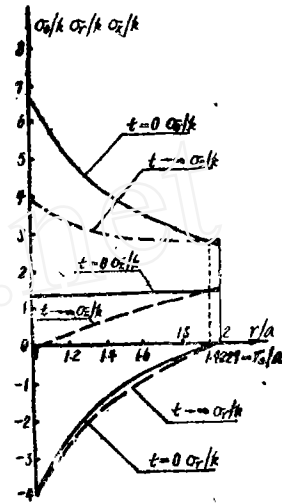


图2 $\sigma_r/k, \sigma_r/k, \sigma_r/k \sim r/a$ 曲线

五、动力加载面的几何解释

在静力加载时厚壁圆筒的Mises屈服面为

$$S_r^2 + S_\theta^2 = R_0^2 \quad (34)$$

式中, $R_0 = \sqrt{2} k$, 对于动力加载面则为

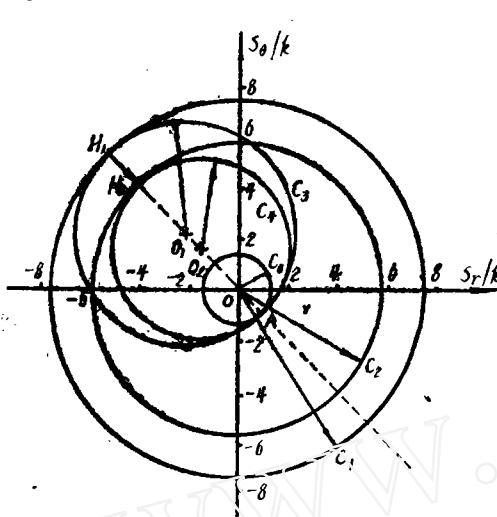
$$(S_r - \bar{\alpha}_r)^2 + (S_\theta - \bar{\alpha}_\theta)^2 = R^2 \quad (35)$$

此时

$$R = \sqrt{2} k \left[1 + \Phi^{-1} \left(\frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\dot{I}_2^p}{I_2^p}} \right) \right] \quad (36)$$

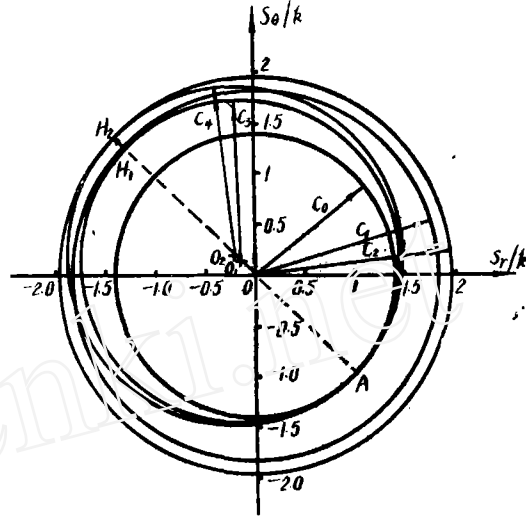
又 $S_z = \bar{\alpha}_z = 0$, 则应力点和移动向量必在 $S_r \sim S_\theta$ 平面内. 在图 3 和图 4 中给出了在厚壁圆筒内外半径处加载面随时间移动和变化的几何描述, 给本文的模型以形象的解释和说明. 图中 c_0 为静力加载时的屈服面. c_1 和 c_2 圆表示不考虑运动硬化效应时当 $t = 0$ 和 $t \rightarrow \infty$ 时的加载面^[1, 2], 随着时间 t 的增大, 加载面从 c_1 均匀地胀缩到 c_2 , 应力点从 H_1 向 H_2 方向移动; c_3 和 c_4 圆表示考虑了运动硬化和各向同性硬化效应的结合作用时当 $t = 0$ 和 $t \rightarrow \infty$ 时的加载

面. 经过动力加载后沿动力加载相反的方向加载, 显然, 由组合硬化模型所预示的反向屈服点比原P. Perzyna模型得到的反向屈服点要低. 由此可知, 本文提出的应变率敏感材料的弹塑性硬化模型其本质就是塑性应变率有引起动力加载面均匀胀缩的效应, 也有引起它移动的效应. 本文例题为轴对称平面应变问题, 但文中所得到的结论对于解决其它弹粘塑性问题可供参考.



C_0 :	$R_0/k = 1.414$	$t = 0$	$c = 0$	$O_1(0, 0)$
C_1 :	$R/k = 7.549$	$t = 0$	$c = 0$	$O_1(2.167, -2.167)$
C_2 :	$R/k = 5.636$	$t \rightarrow \infty$	$c = 0$	$O_2(1.492, -1.492)$
C_3 :	$R/k = 4.478$	$t = 0$	$c = 20$	
C_4 :	$R/k = 3.525$	$t \rightarrow \infty$	$c = 20$	

图3 在 $r=a$ 处动力加载面的运动变化几何图形



C_0 :	$R_0/k = 1.414$	$t = 0$	$c = 0$	$O_1(0, 0)$
C_1 :	$R/k = 1.886$	$t = 0$	$c = 0$	$O_1(0.167, -0.167)$
C_2 :	$R/k = 1.939$	$t \rightarrow \infty$	$c = 0$	$O_2(0.186, -0.186)$
C_3 :	$R/k = 1.650$	$t = 0$	$c = 20$	
C_4 :	$R/k = 1.677$	$t \rightarrow \infty$	$c = 20$	

图4 在 $r=b$ 处动力加载面的运动变化几何图形

参考文献

- [1] Wierzbicki, Arch. Mech. Stos., 2, 15, (1963) 297~307.
- [2] 杨绪灿、杨桂通、徐秉业编著《粘塑性力学概论》, 中国铁道出版社 (1985)。
- [3] Perzyna, P. Termodynamika Materialow Niesprezystych, IPPT, PAN, 127 (1978) .125

ELASTICVISCO-PLASTIC HARDENING MODEL FOR STRAIN RATE SENSITIVE MATERIALS AND ITS APPLICATION

Pan Ligong Xu Bingye
(Tsinghua University)

Abstract Based on the perzyna's elasticvisco-plastic model, the hardening effects of strain rate have been studied in this paper. The dynamic loading conditions are given, assuming that the loading surfaces will be not only isotropic and uniform expansion or contraction but also translational motion because of strain rate in the space of deviatoric stresses. Using the model and Laplacian transform, the closed solutions of thick walled cylinder subjected to internal pressure have been obtained.

Key words strain rate, hardening, loading surface, thick walled cylinder