

包含相变的非等温内时本构方程及其 在2Cr13钢淬火应力分析中的应用¹⁾

刘林娜 范镜泓

(重庆大学工程力学研究所本构理论研究室)

摘要 将在热处理过程中发生相变的材料考虑为多组元的混合物。以含内变量的不可逆热力学为基础推导出了包含相变、不含屈服面的非等温弹塑性内时本构方程。根据一组不同温度水平下的高温短时拉力试验来确定本构方程中的材料参数及其随温度的变化。作为例证,计算了2Cr13钢圆柱试样在淬火过程中瞬时内应力和残余内应力分布,并将残余应力的计算值与实验测定值进行比较,结果证明本文发展的本构方程及其相应的有限元计算程序具有令人满意的应用效果。

关键词 热处理, 热应力, 弹塑性, 本构理论

一、前言

在工程问题中,经常遇到包含相变的复杂热力耦合问题,例如淬火、回火等热处理、焊接、铸造工艺等。建立恰当的数字模型和解法去分析这些恶劣情况下的内应力,对于设计机器零件的尺寸、确定工艺规范以及提高热处理质量等都具有十分重要的实用意义。近年来,已有许多研究者试图分析热处理过程,尤其是淬火过程的内应力,绝大多数工作已计及淬火过程中金属的热弹塑性特征,以有限元计算其内应力分布。Lomakin, Bielenov, Mura 在这方面曾作出了较大的贡献,有关评述请读者参阅^[1,2]。近年来,Inoue、王志刚等从连续介质热力学出发导出了考虑相变的热弹塑性本构方程,并应用于淬火、回火、焊接、铸造等过程的内应力分析^[2,3,4]。值得指出的是现存的所有模型都以经典塑性理论或经典粘塑性理论为基础,在这里屈服面的概念十分重要。由于问题本身的复杂性,并且在许多情况下我们所遇到的材料没有明显的屈服点,这就使得在描述含有相变的二维或三维力学响应时确定后继屈服面的实验和计算变得十分困难。本文以含内变量的不可逆热力学和由Valanis发展的内时理论^[5,6]以及Valanis和范镜泓的工作^[7,8]为基础,推导出了包含相变、不含屈服面的非等温弹塑性内时本构方程,并用特殊设计的有限元程序对2Cr13钢圆柱试样在淬火过程中的内应力进行了计算。

二、热力学基础

假设在热处理过程中发生固体相变的材料是由奥氏体、珠光体、马氏体等 n 种组元组成

1) 本文是国家自然科学基金资助的一部分。
本文于1988年5月5日收到,1988年10月收到修改稿。

的混合物. 混合物的不可逆热力学状态可以用应变分量 ε_{ij} , 热力学温度 T , m 个独立的内变量 q_α ($\alpha=1, 2, \dots, m$) 和 $n-1$ 个独立的组元体积分数 ξ_I ($I=1, 2, \dots, n-1$) 来唯一描述. 因此, 混合物的内能 ϵ 、Helmholtz 自由能 ψ 可以表示如下:

$$\epsilon = \epsilon(\varepsilon_{ij}, T, q_\alpha, \xi_I) \quad (2.1)$$

$$\psi = \psi(\varepsilon_{ij}, T, q_\alpha, \xi_I) \quad (2.2)$$

根据热力学第一定律和第二定律可以证明在不可逆热力学系统中熵 η 作为状态函数的存在, 进而证明下列重要关系式成立

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.3)$$

$$\eta = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (2.4)$$

值得注意的是在不可逆系统中, ψ 仍然起着广义势函数的作用. 在建立本构关系时 ψ 是十分重要的.

设混合物的 Helmholtz 自由能可以近似表示成

$$\psi = \sum_{I=1}^n \xi_I \psi_I \quad (2.5a)$$

且有条件

$$\sum_{I=1}^n \xi_I = 1 \quad (2.5b)$$

其中 ψ_I 是第 I 种组元的 Helmholtz 自由能. 按均匀应变模型有

$$\psi_I = \psi_I(\varepsilon_{ij}, T, q_{I\alpha}) \quad (2.6)$$

这里 $q_{I\alpha}$ 是第 I 种组元的内变量. 同理可以证明

$$\sigma_{Iij} = \frac{\partial \psi_I}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.7)$$

根据式(2.3)、(2.5)和(2.7)就得到一个很有用的关系式

$$\sigma_{ij} = \sum_{I=1}^n \xi_I \sigma_{Iij} \quad (2.8)$$

根据 Clausius-Duhem 不等式和 Onsager 原理可以得到内变量组 $q_{I\alpha}$ 的演化方程

$$\frac{\partial \psi_I}{\partial q_{I\alpha}} + b_{I\alpha}^{(r)} \frac{dq_{I\alpha}^{(r)}}{dt} = 0 \quad (r \text{ 不作和}) \quad (2.9)$$

式中 $b_{I\alpha}^{(r)} = b_{I\alpha}^{(r)}(\varepsilon_{ij}, T, q_{I\alpha})$ 称为广义内摩擦系数. 式(2.9)就是热力学基本定律对内变量演化的约束条件.

三、伴随相变的非等温内时本构方程

在大变温、小变形的情况下, 我们可以对 ψ_I 作下列 Taylor 展开, 并略去三阶以上小量

$$\psi_I = \psi_{I0}(T) + A_{Iij}(T) \varepsilon_{ij} + \sum_{r=1}^m B_{I\alpha}^{(r)}(T) q_{I\alpha}^{(r)} + \frac{1}{2} C_{I\alpha\beta}^{(r)}(T) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

$$+ \sum_{r=1}^m D_{ij}^{(r)}(T) \varepsilon_{ij} q_{ijk}^{(r)} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^m E_{ij}^{(r)}(T) q_{ij}^{(r)} q_{ijk}^{(r)} \quad (3.1)$$

内时理论最基本的概念是采用一个取决于变形中材料特性和变形程度的内蕴时间去度量不可逆变形的历史。根据耗散性材料本构形式不变性定律^[8]，我们定义内时标度为

$$dz_I^* = \frac{d\xi}{f_I(\xi)g_I(T)} = \frac{dz_I}{g_I(T)} \quad (3.2)$$

其中 $f_I(\xi)$ 是反映应变强化的函数， $g_I(T)$ 是反映高温软化的函数，二者可分离是为了简化数学处理而假设的。而

$$dz_I = -\frac{d\xi}{f_I(\xi)} \quad (3.3)$$

$$d\xi = \|\dot{d}\varepsilon_{ij}^p\| \quad (3.4)$$

$$f_I(\xi) = c_I - (c_I - 1)e^{-\rho_I \xi} \quad (3.5)$$

则内变量按内蕴时间演化的方程与式(2.9)具有相同的形式

$$\frac{\partial \psi_I}{\partial q_{ij}^{(r)}} + b_{ij}^{(r)}(T) \frac{dq_{ij}^{(r)}}{dz_I} = 0 \quad (3.6)$$

高温软化的影响反映在广义内摩擦系数中。将式(3.1)代入(2.7)和(3.6)并作一些数学处理就得到各向同性材料的微分型本构方程

$$ds_{ij} = 2\mu_{Ip}(T)de_{ij} + \lambda_{Ip}(T)h_{ij}(z_I, T) \frac{d\xi}{f_I} \quad (3.7a)$$

$$d\sigma_{kk} = d\sigma_{I0}(T) + 3K_I(T)de_{kk} \quad (3.7b)$$

式中 $h_{ij}(z_I, T)$ 是记载变形历史的遗传积分

$$h_{ij}(z_I, T) = \int_0^{z_I} \hat{\rho}_I(z_I - z'_I, T) \frac{\partial e^p}{\partial z'_I} dz'_I \quad (3.8a)$$

$$\hat{\rho}_I(z_I, T) = \frac{d\rho_I(z_I, T)}{dz_I} \quad (3.8b)$$

$\rho_I(z_I, T)$ 是具有弱奇异性的核心函数

$$\rho_I(z_I, T) = \sum_{r=1}^3 c_{Ir}(T) e^{-\alpha_{Ir}(T)z_I} \quad (3.8c)$$

其中 c_{Ir} 、 α_{Ir} 充分大。而

$$\lambda_{Ip}(T) = \frac{1}{1 + \frac{\rho_I(0, T)}{2\mu_{I0}(T)}} \quad (3.8d)$$

$$\mu_{Ip}(T) = \frac{1}{2} \rho_I(0, T) \lambda_{Ip}(T) \quad (3.8e)$$

$\mu_{I0}(T)$ 和 $K_I(T)$ 分别是组元的剪切弹性模量和体积弹性模量， $d\sigma_{I0}(T)$ 是由于热应变和相变应变引起的应力增量，它们都是温度 T 的函数。

根据式(2.8)可以得到混合物的非等温内时本构方程

$$ds_{ij} = 2\bar{\mu}_p de_{ij} + \bar{H}_{ij} ds \quad (3.9a)$$

$$d\sigma_{kk} = d\bar{\sigma}_0 + 3\bar{K} de_{kk} \quad (3.9b)$$

其中

$$\bar{\mu}_p = \sum_{I=1}^n \xi_I \mu_{Ip} \quad (3.10a)$$

$$\bar{H}_{ij} = \sum_{I=1}^n \xi_I \frac{\lambda_{Ip} h_{I,j}}{f_I} \quad (3.10b)$$

$$d\bar{\sigma}_0 = \sum_{I=1}^n \xi_I d\sigma_{I0} \quad (3.10c)$$

$$\bar{K} = \sum_{I=1}^n \xi_I k_{I0} \quad (3.10d)$$

$d\bar{\sigma}_0$ 的值可以通过无应力状态下的应变来确定,

$$d\bar{\sigma}_0 = -3\bar{K} (\sum_I \xi_I \beta_{1I} dT + \sum_I \beta_{2I} d\xi_I) \quad (3.11)$$

其中 β_{1I} 是第 I 种组元的热膨胀系数, β_{2I} 是由母相变到生成相的线胀系数.

根据热力学第一定律容易得到瞬态热传导方程为

$$c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} + \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \sum_I \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_{ij}^{(r)}} \dot{q}_{ij}^{(r)} + \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \right) + \sum_I l_I \dot{\xi}_I + \text{div} \mathbf{h} = 0 \quad (3.12)$$

c_p 是材料的比热, \mathcal{E} 是热焓, l_I 是相变潜热, \mathbf{h} 为热流矢量. 方程(3.12)左端第一项代表内能的变化率, 第二项代表变形产生的热, 第三项代表相变潜热, 第四项代表材料与外界的热交换. 这是一个耦合的方程.

在淬火等热处理过程中, 变形产生的热可以忽略不计, 由Fourier导热定律

$$\text{div} \mathbf{h} = -\lambda \text{div}(\text{grad} T) \quad (3.13)$$

热处理过程满足的瞬态热传导方程为

$$c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} + \sum_I l_I \dot{\xi}_I = \lambda \text{div}(\text{grad} T) \quad (3.14)$$

λ 是材料的导热系数.

四、应用实例

将上述本构方程用来分析2Cr13钢的淬火应力. 2Cr13钢在淬火过程中只发生奥氏体向马氏体的转变, 其相变动力学的经验公式为

$$\zeta_M = 1 - \exp[-1.1 \times 10^{-2} (M_s - T)] \quad (4.1)$$

M_s 是马氏体的开始转变温度.

我们在GLEEBLE1500上进行了一组从400℃至1050℃范围内五个温度水平下的高温短时拉力试验来确定奥氏体本构方程中的材料参数. 将试件在试验机上加热至1050℃, 使其试验段奥氏体化, 然后迅速冷却至设计温度水平进行拉伸, 并保证过冷奥氏体不发生等温转变, 对试验数据进行拟合就得到五组以温度为参量的奥氏体的材料常数, 进而拟合成温度的函数. 2Cr13的马氏体转变温度较低, 其本构方程中的材料常数是用MTS在室温下拉伸经热

处理后的马氏体试件的结果来拟合确定. 对于2Cr13钢淬火

$$d\bar{\sigma}_0 = -3\bar{K}(\beta_{1A}dT + \beta_{2M}d\xi_M) \quad (4.2)$$

β_{1A} 是奥氏体的平均热膨胀系数, β_{2M} 是奥氏体变到马氏体的平均线膨胀系数, 它们由2Cr13钢在无应力状态下的连续冷却实验曲线来确定. 本构方程中的弹性模量和泊松比按混合物取平均值, 金属的泊松比随温度的变化不大, 取作常数^[9], 弹性模量按^[10]提供的数据拟合成温度的函数.

在淬火这样的急冷过程中, 初始温度高, 变化率大, 边界条件复杂, 严格说来, 热传导方程是非线性的. 本文的重点不是传热学问题, 根据^[2], 我们将热传导方程作为线性方程处理, 重要的是正确估计热边界上的换热系数. 本文的换热系数按^[11]取值, 其它热物性参数取自^[10].

采用8节点等参元计算2Cr13钢圆柱试样从1050℃油淬至室温过程中的瞬态温度场、瞬态应力场和残余应力场.

由图1看出, 试样在淬火过程中表层和心部的内应力都随时间发生两次反转, 第一次是“热应力反转”, 第二次是“组织应力反转”. 图2是内应力沿径向的瞬时分布, 其中图(a)、(b)、(c)所对应的瞬时试样中还没有发生相变, 是单一的热应力分布. 图(d)对应的瞬时试样外半层已发生马氏体转变, 内应力表现为热应力和组织应力的综合, 且以组织应力为主. 图(e)对应的瞬时试样已全部进入马氏体相变区, 此时的应力状态一直保留到室温便成为残余应力, 如图3. 残余应力的计算值与用X-射线应力仪测定的实验值的吻合程度是令人满意的.

五、结 论

分析计算结果以及与实验数据的比较都证明本文发展的本构方程和相应的有限元计算程序是可靠的. 值得注意的是该本构方程不用屈服面的概念和加卸载准则, 对材料的弹塑性响应应具有统一的形式, 能自动反映复杂的加卸载响应, 这对于分析和计算会发生应力反转现象的热处理应力特别有效.

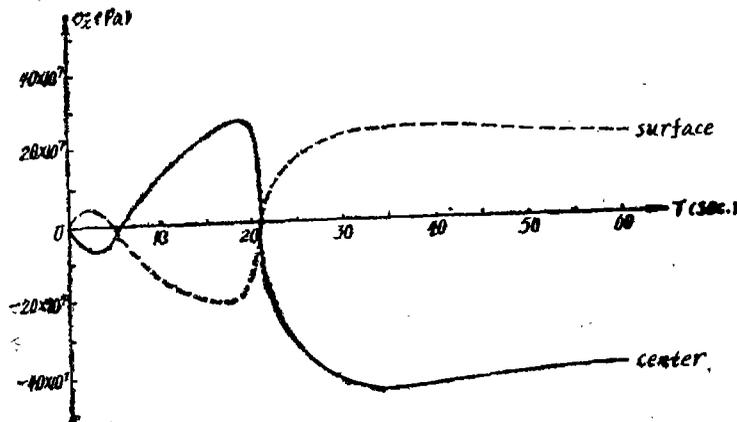


图1 在淬火过程中瞬时应力随时间的变化

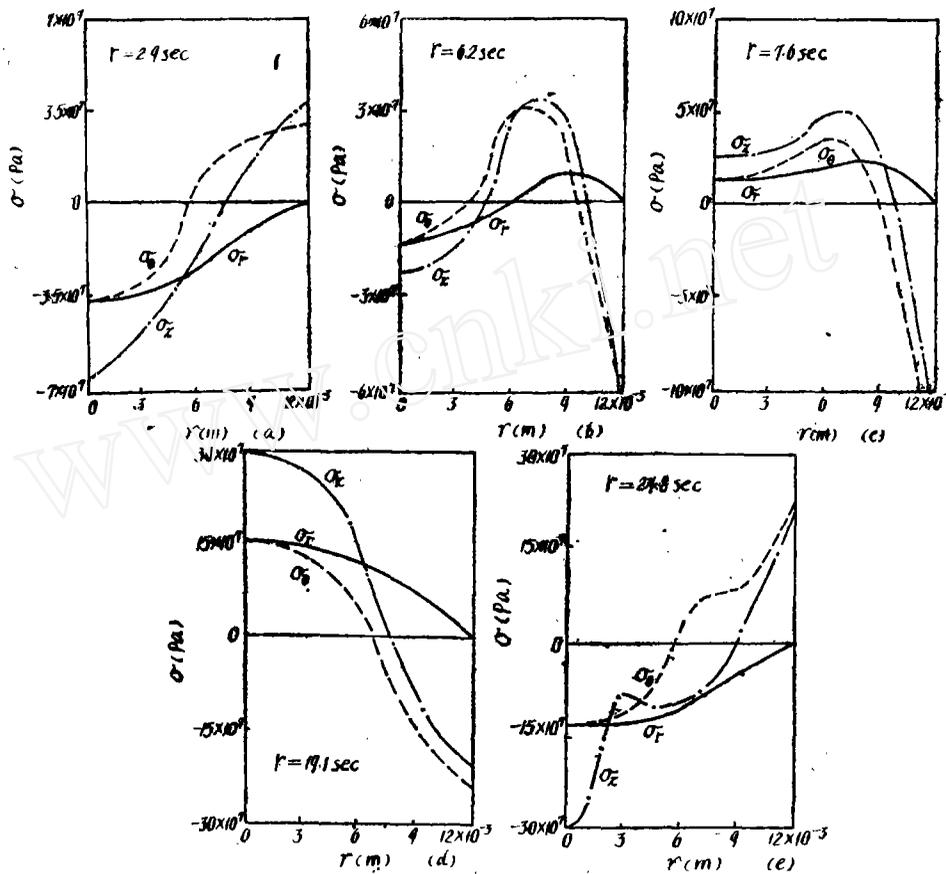


图2 在淬火过程中瞬时应力沿径向的分布

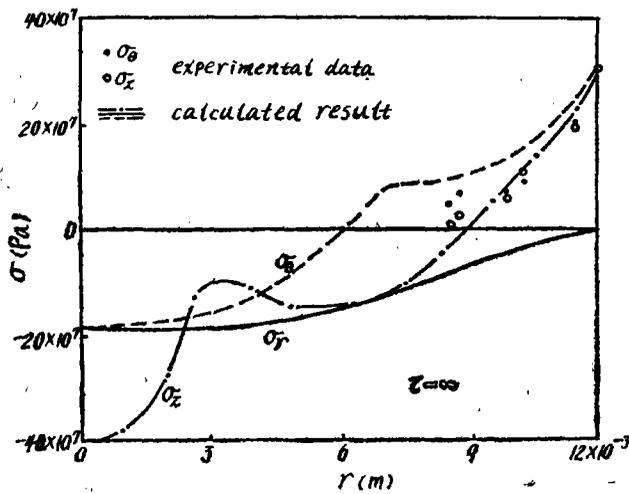


图3 淬火后的残余应力沿径向的分布

参 考 文 献

- [1] Inoue, T., Raniecki, B., "Determination of Thermal-Hardening Stress in Steels by use of Thermo-plasticity Theory", *J. Mech. Phys. Solids*, 26, 187-211.
- [2] Inoue, T., Nagaki, S., Kishino T. and Kyoto, M., Monkowa,., "Description of Transformation Kinetics, Heat Conduction and Elastic-plastic Stress in the Course of Quenching and Tempering of some Steels", *Ingenieur-Archiv*, 50(1981), 315-327.
- [3] Wang, Zhigang, Inoue T., "Viscoplastic Constitutive relation incorporating phase transformation application to welding", *Materials Science and Technology October*, 1985, 899-904.
- [4] Wang Z.G. and Inoue, T., "Analysis of Temperature and Elastic-Viscoplastic Stress during Continuous Casting Process", *Computational Mechanics*, 86.
- [5] Valanis K.C., "A Theory of Viscoplasticity Without a Yield Surface", *Archives of Mechanics*, 517-551(1971).
- [6] Valanis, K.C., "Fundamental Consequences of New Intrinsic Time Measure Plasticity as a Limit of the Endochronic Theory", *Arch. Mech.*, 32, 2(1980), 171-191.
- [7] Valanis, K.C. and Fan Jinghong, "Endochronic Analysis of Applied Mechanics", *Journal of Applied Mechanics*, 50(1983), 789-794.
- [8] Fan Jinghong, "Form Invariance Law of Constitutive Equation of Dissipative Material", *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Mechanics* (1985), 108-113.
- [9] 竹内详一郎, 《热应力》(中译本), 科学出版社.
- [10] 沈鸿等, 《机械工程手册》, 第3卷, 机械工业出版社.
- [11] 王志刚, "相変態を伴う金属材料の非弾性構成関係とその焼入れ、溶ずよび" 連続铸造过程の解析への応用, 博士論文, 京都大学, 日本, 1986 10.

**NON-ISOTHERMAL ENDOCHRONIC CONSTITUTIVE EQUATION
INCORPORATING PHASE TRANSFORMATION WITH
APPLICATION TO THE STRESS ANALYSTS FOR
QUENCHING PROCESS OF 2CR13 STEEL**

Liu Linna Fan Jinghong

(Institute of constitutive theory Department of Engineering
Mechanics Chongqing university, China, 630044)

Abstract The material undergoing phase transformation due to heat treatment is assumed to be a mixture of constituents. A nonisothermal endochronic elastic-plastic constitutive equation involving phase transformation is put forward based on irreversible thermodynamics with internal variables. The material parameters in the constitutive equation and its variation with temperature are determined by a series of short time tension tests in different high temperature. As an example, the distribution of instantaneous internal

stress as well as residual stress along the radius of 2Cr13 steel cylinder during quenching are calculated. The calculated results for residual stress near surface of the cylinder are compared with the experimental data obtained by X-ray radiograph. It shows that the constitutive equation and FEM Code developed in this work are quite satisfactory for application.

Key Words heat treatment, thermal stress, elastoplasticity, constitutive theory

www.cnki.net