第21卷　增刊　　力学学报　　Vol.21, SUP
1989年10月　　ACTA MECHANICA SINICA　　OCT. 1989

有限变形塑性本构理论的框架[1)]

黄筑平

（北京大学力学系）

提要　本文讨论了有限变形塑性本构理论中的某些基本问题．强调了本构框架和本构模型之间的区别及其相互联系．提出了构成本构框架的五个要素：1）参考构形的选取，2）不可逆过程热力学基础，3）状态参量的选取及其演化规律，4）屈服面的存在性，5）本构方程的形式等。通过对以上要素的研究可进一步了解当前各种理论和学派之间的分歧所在．

关键词　有限变形，塑性，本构框架，本构模型．

一、引　言

在有限变形下的弹塑性本构理论是当前塑性理论中的一个重要研究课题．由于这方面的研究的难度较大，许多基本问题尚未澄清而处于争论阶段[1]，加之由于材料种类和性能及其受载条件、外部环境因素的多样性和复杂性所造成的不同材料的本构形式的不同，以及研究人员的研究途径、研究角度和对理论精度要求的不同等，就使得当前这方面的研究处于一个空前混乱的状况．在这种情况下，作为一个研究者来说就不能仅限于某一种观点而置其他观点于不顾，而需要经常综合这一领域的工作，深入分析、鉴别和比较各种理论的优缺点，在不断兼顾其他学派的观点和成果的基础上来推进自己的工作，以期使本构理论的研究得到健康的发展[2]．

有关塑性本构理论的综述性文献可见〔2－6〕，本文仅讨论宏观理论中的某些基本问题．关于微观方面的研究进展，读者可参阅〔7，8〕．

塑性本构理论的研究大致可分为本构框架和本构模型两个方面．本构模型通常是针对某类材料在某种加载条件和外部环境下通过拟合实验曲线而建立起来的理论．由本构模型所得到的经验公式往往可直接应用于具体问题中，并可在一定范围内用来解释和预测某些新的实验现象．本构框架则着重于从理论上(主要是从数学上和物理上)来讨论本构关系所应具有的合理形式，从而为进一步研究具体材料的本构关系提供必要的理论指导．可见本构框架和本构模型是本构理论研究中既有区别而又有联系的两个方面．前者更基本，更具有普遍性，而后者则更强调如何通过实验手段来确定有关参数并加以应用．作为简单的实例，我们先来看看在高温条件下的塑性本构理论．如果说Lehmann的工作[9]主要侧重于对本构框架的探讨的话，那么Miller，Hart，Chaboche，Krempl…等人的统一型理论（例如见[10]）就可看作是关于本构模型方面的研究．其次，我们知道在高应变率下的塑性本构理论中有所谓的粘

1）国家自然科学基金资助的课题
本文于1988年5月5日收到，1988年10月收到修改稿．

塑性模型、Sokolovskii-Malvern、Perzyna过应力模型、Cristescu拟线性模型和基于位错动力学的本构模型等等（见[11,12]），在最后一种模型中，又以 Bodner-Partom 理论较为流行[13]．这些模型都可纳入相应的本构框架中而形成一个完整的理论体系．例如，文献[14]和[15]分别在过应力模型和 Bodner-Partom模型的基础上建立了相应的本构框架，由此形成了各自的理论体系．

本文着重于对本构理论框架的讨论．鉴于不同学派之间的争论和分歧大致反映在以下五个方面，本文提出了关于构成本构框架的五个要素：1）参考构形的选取，2）不可逆过程热力学基础，3）状态参量的选取及其演化规律，4）屈服面的存在性，5）本构方程的形式等．通过对这些要素的研究，我们就有可能对目前各派理论进行较为深入的分析和比较，从而进一步了解其间的分歧所在，并为建立合理的本构框架进行有益的工作．

二、参考构形的选取

在有限变形塑性本构理论中，根据参考构形选取的不同，可有以下几种不同的描述：1）基于某一固定参考构形的Lagrange描述，2）基于无应力中间构形的描述，3）基于当前构形的Euler描述．

基于第一种描述的本构理论可参见Hill，Rice以及Green，Naghdi，Casey，Carroll等人的工作（如文献[16-20]）．对在等温过程中的率无关材料，应变$\mathbf{E}$可表示为与其功共轭的应力$\mathbf{T}$以及刻划材料变形历史的一组参量$\xi_\alpha(\alpha=1,2\cdots n)$的函数：

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}(\mathbf{T},\xi_\alpha) \tag{1}$$

当固定ξ_α时，$\mathbf{E}$和$\mathbf{T}$之间存在单一的对应关系，即弹性关系．这时应力$\mathbf{T}$也可通过应变$\mathbf{E}$和ξ_α表示为：

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}(\mathbf{E},\xi_\alpha) \tag{2}$$

如进一步假定存在弹性势$\psi=\psi(\mathbf{E},\xi_\alpha)$和$G=G(\mathbf{T},\xi_\alpha)$（它们分别对应于热力学中的自由能和Gibbs函数），则（1），（2）式还可写为：

$$\boldsymbol{E}=-\rho_0\frac{\partial G}{\partial \mathbf{T}};\qquad \mathbf{T}=\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{E}} \tag{3}$$

其中ρ_0为参考构形中的密度．

相应于（3）式的率型本构方程可写为：

$$\dot{\boldsymbol{E}}=\mathbf{M}:\dot{\mathbf{T}}+\dot{\mathbf{E}}^p;\quad \dot{\mathbf{T}}=\mathbf{L}:\dot{\mathbf{E}}+\dot{\mathbf{T}}^p \tag{4}$$

上式中$\mathbf{M}=-\rho_0\dfrac{\partial^2 G}{\partial\mathbf{T}\partial\mathbf{T}}$和$\mathbf{L}=\rho_0\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{E}\partial\mathbf{E}}$为正定对称的四阶弹性张量，$\dot{\mathbf{E}}$和$\dot{\mathbf{T}}$分别为$\mathbf{E}$和$\mathbf{T}$的物质导数，$\dot{\mathbf{E}}^p=\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial\xi_\alpha}\dot{\xi}_\alpha$和$\dot{\mathbf{T}}^p=\dfrac{\partial\mathbf{T}}{\alpha\xi_\alpha}\dot{\xi}_\alpha$分别为非弹性应变率和非弹性应力率，其具体表达式将由参量ξ_α的选取及其演化规律来确定．

需要指出，以上所选取的固定参考构形既可是初始构形，也可是某个中间构形或当前构形．如以当前构形为参考构形，就有$\mathbf{E}=0$，$\dot{\mathbf{E}}=\mathbf{D}$和$\mathbf{T}=\boldsymbol{\tau}$，其中$\mathbf{D}$为变形率张量，$\boldsymbol{\tau}$为Kirchhoff应力．$\dot{\mathbf{T}}$则与应变度量的选取有关．例如当$\mathbf{T}$取为与对数应变$\mathbf{E}^{(0)}$相共轭的应力$\mathbf{T}^{(0)}$时，$\dot{\mathbf{T}}^{(0)}$就是Kirchhoff应力$\boldsymbol{\tau}$的Jaumann导数．可见（4）式中将$\dot{\mathbf{E}}$分解为弹性部份$\dot{\mathbf{E}}^e=\mathbf{M}:\dot{\mathbf{T}}$和非弹性部份$\dot{\mathbf{E}}^p$是与应变度量和参考构形的选取有关的．[17,21]

无应力中间构形的概念最早是在1948年由Eckart提出的，这时，变形梯度$\mathbf{F}$将被分解为

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_e\cdot\mathbf{F}_p, \tag{5}$$

上式中$\mathbf{F}_p$和$\mathbf{F}_e$分别对应于由初始构形到中间构形的塑性变形梯度和由中间构形到当前构形的弹性变形梯度．60年代末，E·H·Lee[22]又重新强调了（5）式的重要性．随后，其他一些学者也都在引进虚设的无应力中间构形的基础上对塑性本构方程进行了讨论(例如见[23—33]）．当然，他们对中间构形的理解以及由此得到的本构形式并不都是相同的．

引进中间构形的目的之一是为了能正确给出变形率张量$\mathbf{D}$的分解式．参考E·H·Lee，E·T·Onat等人的近期工作[34，35]，我们可将$\mathbf{D}$分解为[36]：

$$\mathbf{D}=\hat{\mathbf{D}}_e+\hat{\mathbf{D}}_p \tag{6}$$

其中

$$\hat{\mathbf{D}}_e=\frac{1}{2}\ \mathbf{F}_e^{-T}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{C}}_e\cdot\ \mathbf{F}_e^{-1} \tag{7}$$

$$\mathbf{L}_p=\dot{\mathbf{F}}_p\cdot\mathbf{F}_p^{-1}=\mathbf{D}_p+\mathbf{W}_p;\quad \mathbf{D}_p=(\mathbf{L}_p)_s,\quad \mathbf{W}_p=(\mathbf{L}_p)_a \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}_e=\mathbf{F}_e^T\cdot\mathbf{F}_e;\qquad \overset{\circ}{\mathbf{C}}_e=\dot{\mathbf{C}}_e+\mathbf{C}_e\cdot(\mathbf{W}_p-\mathbf{\Delta})-(\mathbf{W}_p-\mathbf{\Delta})\cdot\mathbf{C}_e\\&\mathbf{\Delta}=[I^2(\mathbf{D}_p\cdot\mathbf{C}_e-\mathbf{C}_e\cdot\mathbf{D}_p)-I(\mathbf{D}_p\cdot\mathbf{C}_e^2-\mathbf{C}_e^2\cdot\mathbf{D}_p)+\mathbf{C}_e\cdot\\&\quad(\mathbf{D}_p\cdot\mathbf{C}_e-\mathbf{C}_e\cdot\mathbf{D}_p)\cdot\mathbf{C}_e]/(\mathrm{I}\cdot\mathrm{II}-\mathrm{III})\end{aligned} \tag{9}$$

而括号外的下标s和a分别表示该张量的对称部份和反对称部份，Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ为$\mathbf{C}_e$的三个不变量．

以上分解式与[34]的不同点在于并未假定$\mathbf{F}_e$的对称性，由此得到的$\hat{\mathbf{D}}_e$和$\hat{\mathbf{D}}_p$不仅是客观的，而且在中间构形的刚体旋转下仍然保持不变，从而满足Naghdi等人提出的“双重不变性”要求[37]．

下面我们来看一下基于当前构形的Euler描述．与（1）、（2）式相对应的关系式为[38]：

$$\mathbf{e}=\mathbf{e}(\sigma,\ \overline{\xi_a});\ \ \sigma=\sigma(\mathbf{e},\ \overline{\xi_a}) \tag{10}$$

式中$\mathbf{e}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{E}\cdot\mathbf{R}^T$是Euler描述下的应变度量，$\mathbf{R}$是极分解式$\mathbf{F}=\mathbf{V}\cdot\mathbf{R}$中的正交张量，$\sigma$是Cauchy应力．在一定条件下，(10)式与（1）、（2）式是等价的．例如，当取$\mathbf{E}$和$\mathbf{T}$分别为Green应变$\boldsymbol{E}^{(1)}$和第二Piola-kirchhoff应力$\mathbf{T}^{(1)}$，取ξ_a为二阶对称张量ξ_a，并设（2）式的$\mathbf{T}^{(1)}$为其变元的各向同性函数时，由

$$\mathbf{T}^{(1)}=(\det\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}\cdot\sigma\cdot\mathbf{F}^{-T}=\mathbf{T}^{(1)}(\mathbf{E}^{(1)},\ \xi_a)$$

可知

$$\sigma=\mathbf{V}\cdot\mathbf{T}^{(1)}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{E}^{(1)}\cdot\mathbf{R}^T,\mathbf{R}\cdot\xi_a\cdot\mathbf{R}^T)\cdot\mathbf{V}/(\det\mathbf{V})=\hat{\sigma}(\mathbf{e}^{(1)},\overline{\xi_a}),$$

其中

$$\mathbf{e}^{(1)}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{E}^{(1)}\cdot\mathbf{R}^T=\frac{1}{2}(\mathbf{V}^2-\mathbf{I})$$

$$\overline{\xi_a}=\mathbf{R}\cdot\xi_a\cdot\mathbf{R}^T$$

在Euler描述下$\mathbf{D}$的分解问题可通过相对变形梯度的变化率求得（如[39]）．这与分解式（4）中取当前构形为参考构形在实质上是相同的．但若假定任何应变度量$\mathbf{e}$都对应于Cauchy

应力σ的话，D的分解将不再依赖于应变度量的选取.

附带指出，在建立Euler型本构方程时，有些作者采用了小变形下的本构关系而只是简单地把应变率改为D，把应力率改为应力的Jaumann导数.但应注意到，这种作法可能会导致不正确的结果．例如，当考虑随动强化材料的简单剪切问题时，随着剪应变的增加剪应力可能出现正弦式的振荡．某些作者认为这是由于不适当地采用了Jaumann导数所致[40，41]．其实，问题的关键仍在于如何给出正确的本构方程[4，42，43]．

最后还要强调的是，参考构形的选取只具有相对的意义，不同的描述之间是可以相互转换的[44，45]．有关不同学派在参考构形问题上的争论还可参考文献[36]．

三、不可逆过程热力学基础

本构方程的建立不仅要遵循一定的原理（如确定性原理，客观性原理……等等）以及在与材料对称性有关的某些变换群下的不变性要求（可参见Rivlin、Smith、Spencer，C·C，Wang，Boehler等人的工作，例如[46]），而且还要满足热力学限制条件．因此，60年代以来，越来越多的人已认识到连续介质热力学的重要作用[47]．

然而，随着问题的深入，不同观点之间存在着激烈的争论．粗略地说，这大致可分为两大学派．第一个学派称之为理性热力学派，其第一种表述以Coleman，Truesdell等人的工作为代表[48]．他们把熵和绝对温度看作是原始的基本概念引入到非平衡态热力学中，把Clausius-Duhem不等式不加论证地予以采用.他们批评以往的热力学缺乏严格的公理体系和清晰的数学表示．其第二种表述是以I·Muller的工作[49]为代表．他把熵看作是原始的基本概念但对熵流的概念进行了修正．在许多情况下他证明了绝对温度或冷度的存在性．第二个学派可称为物理学派．他们批评理性热力学派随意地把平衡态热力学中的概念用于非平衡态热力学是缺乏物理根据的．

看来有两个问题是需要得到澄清的：1）对处于非平衡态的热力学体系，是否有可能（如有可能的话，如何来）引进和定义熵的概念？这种定义是否唯一？2）在非平衡态热力学中，第二定律的基本不等式应具有什么形式？

显然，理性热力学派并未能真正回答上面这两个问题.事实上，正如Meixner[50]所指出的：对于非平衡态热力学，熵的定义是不唯一的．而且在无穷多种可能的定义中并没有什么准则一定要选取这种定义而不选取另一种定义．以上结论也可从统计物理学的角度得到[51]．至于热力学第二定律的表述形式，目前也存在着各种不同的理论（例如[52]）．由此可见，不同的热力学基础将会导致不同的本构理论框架．

通过引进内变量和局部伴随状态概念而建立起来的不可逆过程热力学或许是一种能为较多人所接受的理论[53].该理论基于以下几个基本假设：1）非平衡态可通过内变量的适当引入而与一个虚设的处于约束状态下的热力学平衡态相对应．这样的平衡态被称为局部伴随状态，其状态参量可取为内能ε，应变E和内变量$\xi_\alpha(\alpha=1,\cdots n)$.

在局部伴随状态下的熵η和绝对温度θ是存在的．它与在实际的非平衡态中是否存在熵的问题并无必然联系．利用局部伴随状态下的Gibbs方程，可写出局部熵产生率㉃的表达式：

$$\dot{\Theta}=\rho_0\dot{\eta}-\rho_0\left(\frac{h}{\theta}\right)+\nabla_0\cdot(\mathbf{q}_0/\theta)=\frac{1}{\theta}\ (\mathbf{T}-\mathbf{T}^a):\dot{\mathbf{E}}+\frac{1}{\theta}\ A^a\dot{\xi}_a+\mathbf{q}_0\cdot\nabla\left(\frac{1}{\theta}\right) \tag{11}$$

式中h为单位时间内单位质量的分布热源，$\mathbf{q}_0$为热流向量，$\mathbf{T}$和$\mathbf{T}^a$分别为实际非平衡态和约束平衡态中与$\mathbf{E}$相共轭的应力，A^a为与ξ_a相共轭的广义内力，$A^a\dot{\xi}_a$表示了不可恢复的耗散功率．以上各量分别满足

$$\frac{1}{\theta}=\frac{\partial\eta}{\partial\varepsilon};\quad \mathbf{T}^a=-\rho_0\theta\frac{\partial\eta}{\partial\mathbf{E}};\quad A^a=\rho_0\theta\frac{\partial\eta}{\partial\xi_a} \tag{12}$$

2）$\dot{\Theta}$是非负的．如将（11）式右端的热力学量用向量表示为

$$J=\left\{(\mathbf{T}-\mathbf{T}^a),\ \mathbf{q}_0,\ \mathring{\xi}_a\right\}$$

和

$$P=\left\{\frac{1}{\theta}\dot{\mathbf{E}},\ \nabla\left(\frac{1}{\theta}\right),\ \frac{1}{\theta}\ A^a\right\} \tag{13}$$

并分别称J和P为热力学流和热力学力，则$\dot{\Theta}$非负的条件可写为：

$$J\cdot P\geqslant 0\text{，或分量形式}J_\mu P_\mu\geqslant 0 \tag{14}$$

3）J和P之间的关系（即本构关系）具有如下形式：

$$J=J(P,\omega) \tag{15}$$

其中$\omega=(\varepsilon,E)$是热力学体系的外部状态参量．

当热力学状态偏离平衡态不远时，J和P之间可近似地认为具有线性关系：$J_\mu=L_{\mu\nu}(\omega)\cdot P_\nu$．这时，Onsager-Casimir倒易关系揭示了$L_{\mu\nu}$的对称性质．当热力学状态偏离平衡态很远时，J和P之间的关系一般是非线性的．这时Onsager-Casimir倒易关系就要作相应的推广．Edelen的分解定理[54]为这种推广提供了一种途径．而H·Ziegler在忽略回旋效应时的正交性假设[55]则是这种推广的另一种途径：

$$J_\mu=K(P)\frac{\partial\dot{\Theta}}{\partial P_\mu} \tag{16}$$

当然，其他的途径也是可能的，例如可有

$$J_\mu=\overline{K}(P)\frac{\partial\Pi}{\partial P_\mu} \tag{17}$$

其中$\overline{K}$对P并不一定是连续可微的．

四、状态参量的选取及其演化规律

塑性本构理论的主要特点之一就是它刻划了应力对变形（和温度）历史的依赖关系．这就涉及到如何来描述变形历史的问题．不同的描述将导致不同的理论．理性力学派用泛函形式来表示应力对变形梯度历史$\mathbf{F}(\tau)$（$-\infty<\tau\leqslant t$）的依赖性，并在此基础上给出相应的本构方程（如〔56，57〕）．当$\mathbf{F}(\tau)$充分光滑时，上述泛函也可用$\mathbf{F}$在t时刻的各阶导数表出[52]．

描述变形历史的另一途径就是内变量的引入．它或许是被采用得最多的一种理论．在这里，问题的关键在于如何选取内变量以及它们应具有什么样的演化规律．不同的学派不仅在这一问题上存在着分歧，甚至在对内变量本身的理解上也可能是很不相同的．

例如，Green，Naghai和E·H·Lee之间关于变形分解的长期争论，实质上是“在内变量选取问题上究竟应取$\mathbf{C}_p=\mathbf{F}_p^T\cdot\mathbf{F}_p$还是取$\mathbf{F}_p$更为合理”的争论．[58]又如，一方面有许多作者以塑性应变作为内变量，而另一方面Lehmann却明确提出了“宏观非弹性变形不能作为状态参量”的观点[59]；一方面有些作者倾向于以一个二阶张量和一个标量（在有屈服面理论中它们分别对应于加载面中心和大小）作为内变量，而另一方面有些人却企图通过微观或细观的分析来讨论内变量及其演化规律[60, 61]；一方面某些作者在强调给出塑性旋率演化方程的意义[31, 32]，另一方面弧长理论和内时理论学派却强调了用应变（或塑性应变）空间中的弧长来描述塑性变形历史的重要性[62—65]；一方面Mandel采用“方向子”来表示内结构的定向，而另一方面Onat却指出了这种把内结构的状态和定向分别予以考虑的不足之处；一方面在内时理论中常将内变量演化方程写成Onsager倒易关系形式：

$$b_{ijkl}\dot{\xi}^{(\alpha)}_{kl}=-\left(\frac{dZ}{dt}\right)A^{(\alpha)}_{ij} \tag{18}$$

$\left(\text{上式中}Z\text{为内时标度，}A^{(\alpha)}=-\rho_0\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi_{(\alpha)}}\right)$，或如某些作者所建议的那样采用形为（16）式的演化方程[60, 66, 67]：$\dot{\xi}_\alpha=K\dfrac{\partial\dot{E}}{\partial A^\alpha}$，而另一方面J·Lubliner却强调了演化方程所可能具有的非光滑性．凡此种种都说明了内变量的选取及其演化规律是建立塑性本构理论的最核心也是最困难的部份，是区分不同学派不同理论的关键所在．

在结束本段之前，简单提一下Onat关于内变量的表示和演化的一系列工作[68—70]也许是有益的．在Euler描述下，Onat把内变量的状态和定向作了统一处理，刚体运动只改变其定向，故在$O^+(3)$变换群下的内变量将形成所谓的“轨道”，即在同一“轨道”上的内变量只具有相同的状态而不具有相同的定向．在弹性变形过程中内变量仅沿其“轨道”运动，但在弹塑性变形过程中内变量的变化率在其“轨道”的法向也具有非零分量．当然，如何具体写出上述的分量（即给出具体的演化规律）仍是一个有待进一步研究的问题．

五、屈服面的存在性和本构方程的形式

屈服面和加载面的概念是经典塑性理论中的一个基本概念．随着塑性理论的发展，这一概念将需要受到重新的审查和认真的研究．下面我们仅仅对Lagrange描述下的率无关材料进行相应的讨论．

我们称一个使内变量$\xi_\alpha(\alpha=1,2\cdots n)$始终保持不变的过程为弹性过程，这种过程有时也称为准可逆过程．对于给定的应变$\mathbf{E}$和内变量ξ_α，如果存在某个弹性过程，使得由$(\mathbf{E},\xi_\alpha)$可达到另一个状态$(\mathbf{E}^*,\xi_\alpha)$，那么$(\mathbf{E}^*,\xi_\alpha)$的全体就称作是对应于$(\mathbf{E},\xi_\alpha)$的一个“弹性范围”（Elastic range）[71]，记作$\mathscr{E}(\mathbf{E},\xi_\alpha)$．显然，$\mathscr{E}(\mathbf{E},\xi_\alpha)$是非空的连通集．当$(\mathbf{E},\xi_\alpha)$是$\mathscr{E}(\mathbf{E},\xi_\alpha)$的一个内点时，即$(\mathbf{E},\xi_\alpha)\in\overset{\circ}{\mathscr{E}}$，就称$(\mathbf{E},\xi_\alpha)$处于一个弹性状态．当$(\mathbf{E},\xi_\alpha)$是$\mathscr{E}(\mathbf{E},\xi_\alpha)$的一个边界点时，即$(\mathbf{E},\xi_\alpha)\in\partial\mathscr{E}$，就称$(\mathbf{E},\xi_\alpha)$处于一个弹塑性状态．如果$\mathscr{E}(\mathbf{E},\xi_\alpha)$存在非空的内点，则其边界$\partial\mathscr{E}(\mathbf{E},\xi_\alpha)$就构成一个超曲面$g(\mathbf{E},\xi_\alpha)=0$，通常称之为加载

面．以后我们将假定加载面是光滑的（对非光滑情形，也可类似地讨论）．

对于给定的ξ_α，由一切“弹性范围”的内点所构成的集合称作为“弹性区域”（Elastic domain），记作$\mathscr{D}(\mathbf{E},\xi_\alpha)$或$\mathscr{B}(\xi_\alpha)$．显然，$\mathscr{D}(\mathbf{E},\xi_\alpha)\subset\varepsilon(\mathbf{E},\xi_\alpha)$是成立的．类似地，我们称由$\mathscr{D}(\mathbf{E},\xi_\alpha)$的边界点所构成的超曲面为屈服面．

应用集合论和拓扑学的初等知识，可得到一系列关于“弹性范围”和“弹性区域”的性质．例如，对一个可能的ξ_α和一切与ξ_α对应的$\mathbf{E}$，必然有

$$\bigcap\mathring{\mathscr{E}}(\mathbf{E},\xi_\alpha)\subset\mathscr{D}(\xi_\alpha)\subset\bigcup\mathring{\mathscr{E}}(\mathbf{E},\xi_\alpha)\tag{19}$$

于是，我们可以得到以下三种情况：

1）$\mathring{\mathscr{E}}(\mathbf{E},\xi_\alpha)$无内点，即$\mathring{\mathscr{E}}(\mathbf{E},\xi_\alpha)$为空集．这时加载面（或屈服面）不存在．例如，内时理论或Bodner-Partom模型就属于这种情形．

2）$\mathring{\mathscr{E}}(\mathbf{E},\xi_\alpha)$非空，且与$\mathbf{E}$无关．这时有$\mathring{\mathscr{E}}=\mathscr{D}$，$\partial\mathscr{E}=\partial\mathscr{D}$，即加载面和屈服面相重合．这就是经典塑性理论中的“单面”理论．

3）$\mathring{\mathscr{E}}$与$\mathscr{B}$不相重合的理论，称之为广义塑性理论．所谓的多面理论（如〔72—74〕）就是以此为基础而发展起来的．

屈服面的存在性和内变量的演化以及由此导出的本构理论有密切联系．下面，我们将从经典的“单面”理论出发来试图给出在等温过程中率无关材料的一种可能的本构理论框架．

如假定内变量的演化方程具有形式

$$\dot{\xi}_\alpha=\Lambda(\dot{\mathbf{E}},\mathbf{E},\xi_\alpha)\hat{J}_\alpha(\mathbf{E},\xi_\alpha)\tag{20}$$

式中Λ仅当在弹塑性状态时才可能非零（以后仅讨论这种情形），则由一致性条件，可得

$$\Lambda=\nu\langle\hat{g}\rangle\tag{21}$$

这里
$$\nu=-\left(\frac{\partial g}{\partial\xi_\alpha}\hat{J}_\alpha\right)^{-1},\qquad\hat{g}=\frac{\partial g}{\partial\mathbf{E}}:\dot{\mathbf{E}},$$

$$\langle\hat{g}\rangle=\begin{cases}\hat{g} & \text{当}\quad\hat{g}>0\\ 0 & \text{当}\quad\hat{g}\leqslant 0,\end{cases}$$

如进一步假定（20）式具有（17）式的形式，即$\hat{J}_\alpha$是有势的：$\hat{J}_\alpha=\dfrac{\partial\Pi}{\partial A^\alpha}$，$\Pi=\Pi(A^\alpha)$，$(\alpha=1,2,\cdots n)$，

便有
$$\dot{\xi}_\alpha=\nu\langle\hat{g}\rangle\frac{\partial\Pi}{\partial A^\alpha},\tag{22}$$

因为我们讨论的是在等温过程中的率无关材料，所以不难证明（3）式是成立的：$\mathbf{T}=\mathbf{T}^\circ=\rho_0\dfrac{\partial\psi}{\partial\mathbf{E}}$．

这时，（14）式便退化为相应的Kelvin不等式：

$$A^\alpha\dot{\xi}_\alpha=-\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\xi_\alpha}\dot{\xi}_\alpha=-\rho_0\frac{\partial G}{\partial\xi_\alpha}\dot{\xi}_\alpha\geqslant 0\tag{23}$$

现将（22）式中的Π写为

$$\Pi(A^\alpha)=g_1(\mathbf{E},\xi_\alpha)=f_1(\mathbf{T},\xi_\alpha),$$

并注意到 $\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\xi_\alpha}=-\rho_0\frac{\partial^2 G}{\partial\mathbf{T}\partial\xi_\alpha}=\frac{\partial A^\alpha}{\partial\mathbf{T}}$, $\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\xi_\alpha}=\rho_0\frac{\partial^2\psi}{\partial\mathbf{E}\partial\xi_\alpha}=-\frac{\partial A^\alpha}{\partial\mathbf{E}}$,

便不难看出（4）式中的$\dot{\mathbf{E}}^p$和$\dot{\mathbf{T}}^p$可分别写为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}^p&=\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\xi_\alpha}\dot{\xi}_\alpha=\nu\langle\hat{g}\rangle\frac{\partial\Pi}{\partial A^\alpha}\frac{\partial A^\alpha}{\partial\mathbf{T}}=\nu\frac{\partial f_1}{\partial\mathbf{T}}\langle\hat{g}\rangle\\\dot{\mathbf{T}}^p&=\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\xi_\alpha}\dot{\xi}_\alpha=-\nu\langle\hat{g}\rangle\frac{\partial\Pi}{\partial A^\alpha}\frac{\partial A^\alpha}{\partial\mathbf{E}}=-\nu\frac{\partial g_1}{\partial\mathbf{E}}\langle\hat{g}\rangle\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

利用（1）式，应变空间中的加载面$g(\mathbf{E},\xi_\alpha)=0$也可等价地在应力空间中表出：$f(\mathbf{T},\xi_\alpha)=g(\mathbf{E}(\mathbf{T},\xi_\beta),\xi_\alpha)=0$．如令 $\hat{f}=\frac{\partial f}{\partial\mathbf{T}}:\dot{\mathbf{T}}$，并在弹塑性加载时（即$\hat{g}>0$时）引进硬化参数[19,20]：$\Phi=\hat{f}/\hat{g}$，则（24）式最终可写为：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\mathbf{E}}^p&=\frac{\nu}{\Phi}\frac{\partial f_1}{\partial\mathbf{T}}\otimes\frac{\partial f}{\partial\mathbf{T}}:\dot{\mathbf{T}}\quad(\Phi\neq 0\text{时})\\\dot{\mathbf{T}}^p&=-\nu\frac{\partial g_1}{\partial\mathbf{E}}\otimes\frac{\partial g}{\partial\mathbf{E}}:\dot{\mathbf{E}}\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

f_1通常称为塑性势．当$f_1=f$，$g_1=g$时，上式称为是关联的（associative），相应的正交法则成立．有关这方面的讨论可参考文献〔21〕．

在弹塑性变形过程中，加载面$g=0$或$f=0$的大小、形状和位置将发生相应的改变研究加载面的演化规律始终是塑性理论中的基本问题之一．除了有人所共知的Prager，Ziegler，Armstrong-Frederick等强化模型及其修正形式外（如见〔75,76〕），角点理论应认为是一个值得重视的模型〔77—79〕．该模型不仅可以从晶体塑性理论方面找到依据，而且在解释诸如塑性分叉现象和塑性流动局部化等等加载方向有剧烈改变的问题上也是较为成功的．有关这方面的介绍还可参考文献[80]．

关于本构框架的最后一个要素——本构方程的形式问题，我们不准备作过多的讨论．显然，本构方程除了以泛函形式或积分形式表示外，微分形式（或率型）的本构方程仍是目前被最多采用的一种．如将内变量的演化方程写成一个常微分方程组，则还可通过微分方程的定性理论得到材料的某些基本特性[68]．不过，对于塑性本构理论来说，上述方程组的光滑性条件并不总是满足的，因此，这类问题的研究将是相当困难的．

六、结 语

本文由第二次全国塑性力学学术交流会大会报告的部分内容改写而成．文中仅就本构框架中的某些基本问题作了简单的综述．由于篇幅所限，涉及温度效应和应变率效应的有关问题未能得到充分的展开．此外，限于笔者的水平和对文献了解的广度和深度，其中不当之处在所难免，敬请提出批评指正．

参 考 文 献

〔1〕Carroll, M.M., *Appl. Mech. Rev.*, 38(10), (1985), 1301—1308.

〔2〕后藤学，力学进展10，(1980)，57—63.
〔3〕Neale,K.W.,*SM Archives* 6(1)，(1981)79—128.
〔4〕S.Nemat-Nasser, *J.Appl. Mech.*, 50 (1983),1114—1126.
〔5〕王自强，力学进展16.2(1986).210—220.
〔6〕张进敏，力学进展 18.4(1988),482—493.
〔7〕Havner,K.S.,Mechanics of Solids:The R.Hill 60th Anniversary Volume(H.G.Hopkins,M.J.Sewell,eds),Oxford(1982),265—302
〔8〕Asaro,R.J.,*Adv.Appl.Mech.*,23(1983), 1—115.
〔9〕Lehmann.T.,Constitutive Laws for Engineering Materials(C.S.Desai,et al.eds).Elsevier New York(1987),173—184.
〔10〕陈罕，力学进展17，3(1987),353—363.
〔11〕杨桂通，熊祝华，塑性动力学，清华大学出版社（1984）.
〔12〕Malvern,L.E.,3rd Conf.Mechanical Properties at High Rates of Strain,Oxford(1984), 1—20.
〔13〕Bodner, S.R.,Review of a unified elastic-viscoplastic theory, AFOSR—84—0042 (1984).
〔14〕Perzyna,P.,*Adv.Appl.Mech.*,11(1971),313-354.
〔15〕Rubin, M. B.,*Int. J. Engng. Sci.* 24(7), (1986),1083—1095.
〔16〕Hill, R.,Rice, J. R. SIAM *J. Appl.Math.*25 (1973),448—461.
〔17〕Hill,R.,*Adv.Appl.Mech.*,18(1978), 1—75.
〔18〕Green,A.E.,Naghdi,P.M. *Arch.Ration.Mech.Analysis.*18(1965),251—281.
〔19〕Casey,J.,Naghdi,P.M. *Q.J.Mech.Appl.Math.*,37(1984),231—259.
〔20〕Carroll,M.M.,*J.Appl.Mech.*,54(1987),15—21.
〔21〕黄筑平，力学与实践,10,4(1988), 1—14.
〔22〕Lee,E.H.,*J.,Appl.Mech.*,36(1969), 1—6.
〔23〕Mandel,J.,*Int.J.,Solids Struct.*,9(1973),725—740.
〔24〕Kratochvil,J.,Acta Mechanica 16(1973),127—142.
〔25〕Freund,L.B.,*Int.J.Solids Struct.*,6(1970),1193—1209.
〔26〕Kleiber,M.,*Int.J.Engng.Sci.*,13(1975),513—525.
〔27〕Sidoroff,F.,*Arch.Mech.*, 25(1973), 299—308.
〔28〕Sidoroff,F.,*Int.J.Engng.Sci.*,20 (1982), 19—26.
〔29〕Lubliner.J.,*Acta Mechanica*, 30(1978),165—174.
〔30〕Lehmann,T.,*Int.J.Engng.Sci.*, 20(1982),281—288.
〔31〕Loret,B.,*Mechanics of Materials*, 2(1983), 287—304.
〔32〕DafaliasY.F., *J.Appl.Mech.*, 52(1985),865—871.
〔33〕Bammann, D.J., Johnson G.C., Acta Mechanica,70(1987),1—13.
〔34〕Agah-Tehrani, A., et al., J.Mech.Phys.Solids, 35(5) (1987),519—539.
〔35〕Onat, E.T., *Int.J.Plasticity* (to be published).
〔36〕黄筑平，段祝平，有限弹塑性变形中应变和应变率的分解力学进展（待发表）.
〔37〕Casey, J., P.M.Naghdi, *J.Appl.Mech.*,47(1980),672—675.
〔38〕Fardshisheh, F., Onat, E. T. Problems of Plasticity, Noordhoff, Leyden (1974), 89—115.
〔39〕Liang Haoyun, Lehmann T., *Sol.Mech.Arch.*(to be published).
〔40〕Lee. E.H., et al., *J.Appl.Mech.*, 50(1983),554—560.
〔41〕Johnson, G.C., Bammann D.J., Int.J.Solids Struct., 20(1984), 725—737.
〔42〕Atluri, S. N. , *Computer Methods in Appl. Mech and Engng.* , 43 (1984), 137—171.
〔43〕黄筑平，史帆，第二届全国近代数学与力学讨论会文集（1987，上海）.
〔44〕张进敏，上海工业大学博士学位论文（1988）.
〔45〕Kleiber, M., Raniecki B., Plasticity Today (A.Sawczuk, G.Bianchi, eds)Appl. Sci. Pubs. (1985), 3—46.
〔46〕Boehler, J. P., Ibid. 483—502.
〔47〕Germain, P., et al., *J. Appl. Mech.*, 50(1983), 1010—1020.
〔48〕Truesdell, C., Rational Thermodynamics, springer-Verlag, New York (1984).
〔49〕Muller, I., The Constitutive Law in Thermoplasticity (T.Lehmann, ed.), CISM 281 Springer Wien/New York, (1984), 13—104.

〔50〕Meixner, J., *Rheol. Acta*, 12 (1973), 381—383.
〔51〕Lubliner, J., Thermomechanics of deformable bodies (1985).
〔52〕Green, A.E., Naghdi, P.M.*J. Appl Mech.*, 45 (1978), 487—492.
〔53〕Bataille, J., Kestin, L.*J.Non-Equilib. Thermodyn.* 4 (1979), 229—258.
〔54〕Edelen, D.G.B., *Arch. Ration.Mech. Analysis*, 51 (1973), 218—227.
〔55〕Ziegler, H., An introduction to thermomechanics, North-Holland Pub. Com., New York (1977).
〔56〕Holsapple, K.A., *Acta Mechanica*, 17 (1973), 277—290.
〔57〕Matsumoto, E., *Arch.Mech.*, 37 (1985), 127—134.
〔58〕Dashner, P.A., *J.Appl.Mech.*, 53 (1986), 55—60.
〔59〕Lehmann, T., The Constitutive Law in Thermopiasticity (T.Lehmann, ed.), CISM 281 Springer Wien/New York (1984), 379—463.
〔60〕Rice, J.R., *J.Mech.Phys.Solids*, 19 (1971), 433—455.
〔61〕金济山，北京大学力学系硕士学位论文 (1987).
〔62〕Pipkin, A.C., Rivlin, R.S., *ZAMP*, 16 (1965), 313—327.
〔63〕Murakami, S., Sawczuk, A. *Arch.Mech.*, 31 (1979), 251—264.
〔64〕Valanis, K.C., *Arch.Mech.*, 23 (1971), 517—533.
〔65〕范镜泓，高芝晖，非线性连续介质力学基础，重庆大学出版社 (1987).
〔66〕Li, J.C.M., *J.Appl.Phys.*, 33 (1962), 616—624.
〔67〕北川浩，塑性力学基础（刘文斌，张宏译，王仁校），高等教育出版社 (1986).
〔68〕Onat, E.T., Yale University Report for ORNL-SUB-3863-2 (1976).
〔69〕Onat, E.T., in Plasticity of Metal at Finite Strain, (E.H.Lee, et al., eds.), Stanford Univ. (1982), 519—544.
〔70〕Onat, E.T., *Eng.Fracture Mech.*, 25 (1986), 605—614.
〔71〕苗天德，程昌钧，俞焕然，力学与实践，3 (1981), 24—29.
〔72〕Eisenberg, M.A., Phillips, A. *Acta Mechanica* 11 (1971), 247—260.
〔73〕Bruhns, O.T., Müller, R. *Acta Mechanica*, 53 (1984), 81—100.
〔74〕Hashiguchi, K., *J.Appl.Mech.*, 48 (1981), 297—301.
〔75〕Tvergaard, V., *Int.J.Mech.Sci.*, 20 (1978), 651—658.
〔76〕Armstrong, P.J., Frederick, C.O. CEGB Report RD/B/N 731 (1966).
〔77〕Stören, S., Rice, J.R., *J.Mech.Phys.Sojids*, 23 (1975), 421—441.
〔78〕Christoffersen, J., Hutchinson, J.W. Ibid., 27 (1979), 465—487.
〔79〕Gotoh, M., *Eng.Fracture Mech.*, 21 (1985), 673—684.
〔80〕黄克智，塑性本构理论（浙江大学力学系讲义）(1987).

ON THE CONSTITUTIVE FRAMEWORK IN FINITE DEFORMATION PLASTICITY

Huang Zhuping

(Peking University)

Abstract Certain fundamentals of phenomenological constitutive laws for elastic-plastic solids at finite deformation are discussed. The difference and the relationship between the framework (or the basic structure) and the model of constitutive relations are emphasized. The constitutive framework may contain following factors: (1) Reference configurations to be chosen; (2) Foundations of irreversible thermodynamics; (3) The description of thermodynamic states, the state variables to be chosen and their evolution laws; (4) The existence of the yield surface; (5) The types of constitutive equations. By studying these factors, different theories and schools can be clearly distinguished.

Key words finite deformation, plasticity, constitutive framework, constitutive model.