

含圆孔层合板层间应力分析的边界层理论

单辉祖 黄明联 施振东
(北京航空航天大学)

摘要 本文利用小参数摄动方法,从一般情况出发,建立和完善了含圆孔层合板孔边层间应力分析的边界层理论,使问题转化为一系列位于孔边径向截面的广义平面问题的组合。同时,还建立了确定孔边层间应力奇异阶次的特征方程。所得结论适用于含圆孔层合板面内任意受载情况。

关键词 层合板;孔边应力;层间应力;边界层理论;应力的奇异性

一、引言

层合板的层间应力分析,是复合材料力学和复合材料应用中的一个重要问题。因为层间应力影响层合板的强度及疲劳寿命。

关于直线边界层合板的层间应力问题,国内外许多学者已进行了广泛的研究^[1-5]。但是,对于含圆孔层合板的孔边层间应力,由于其复杂性,目前解析研究极少。70年代末,S. Tang 将直线边界层理论推广应用于圆柱坐标系,研究了含圆孔层合板拉伸时的孔边层间应力^[6,7],但在分析中未计及层间应力的奇异性。1982年,R. I. Zwiars 和 T. C. Ting 研究了销钉加载孔边层间应力的奇异性^[8],其理论是建立在假定孔边应力、应变和位移与孔边环向坐标无关的基础上。

本文利用小参数摄动方法,从一般情况出发,建立和完善了含圆孔层合板孔边层间应力分析的边界层理论,使问题转化为一系列位于孔边径向截面的广义平面问题的组合,同时,还建立了确定孔边层间应力奇异阶次的特征方程,所得结论适用于含圆孔层合板面内任意受载情况。

二、含圆孔层合板的平面弹性解

考虑一含圆孔无限大对称层合板,孔表面不受力,在无限远处作用有位于层合板中面的面内载荷。

利用经典层合理论,上述层合板可转化为等效各向异性板^[9],其物理方程为

$$\varepsilon_i = b_{ij}\sigma_j \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2.1)$$

式中, b_{ij} 为等效柔度系数。

根据各向异性板平面弹性理论^[10],应力函数 U 满足下述方程:

本文于 1987 年 12 月 31 日收到第一次稿,于 1988 年 10 月 29 日收到修改稿。

$$b_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2b_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + (2b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2b_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial x^3} + b_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0.$$

上述方程的相应特征方程为

$$b_{11}s^4 - 2b_{16}s^3 + (2b_{12} + b_{66})s^2 - 2b_{26}s + b_{22} = 0.$$

Lekhnitskii 曾经证明, 该方程的根 $s_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 只可能是复数或纯虚数, 而且, 当上述各根互不相等时, 应力函数的一般表达式为

$$U = 2\text{Re}[F_1(Z_1) + F_2(Z_2)] \quad (2.2)$$

式中: $Z_1 = x + s_1 y$, $Z_2 = x + s_2 y$; $F_1(Z_1)$ 、 $F_2(Z_2)$ 分别是 Z_1 、 Z_2 的任意解析函数.

根据上述理论, 可以求得含圆孔等效各向异性板在给定面内载荷作用下的应力和应变. 例如, 对于在无限远处作用有拉应力 σ 的含圆孔板, 若圆孔半径为 R , 拉应力 σ 的作用线与 x 轴的夹角为 α , 则板内应力为^[10,11]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma \cos^2 \alpha + 2\text{Re}[s_1^2 \varphi_1'(Z_1) + s_2^2 \varphi_2'(Z_2)] \\ \sigma_y &= \sigma \sin^2 \alpha + 2\text{Re}[\varphi_1'(Z_1) + \varphi_2'(Z_2)] \\ \tau_{xy} &= \sigma \sin \alpha \cos \alpha - 2\text{Re}[s_1 \varphi_1'(Z_1) + s_2 \varphi_2'(Z_2)] \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

式中:

$$\varphi_j'(Z_j) = \frac{i s_j A_j}{4(s_1 - s_2)(1 + i s_j)} [1 - Z_j(Z_j^2 - R^2 - R^2 s_j^2)^{-\frac{1}{2}}] \quad (j = 1, 2);$$

$$A_1 = -(s_2 \sin 2\alpha + 2\cos^2 \alpha) - i(2s_2 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha);$$

$$A_2 = (s_1 \sin 2\alpha + 2\cos^2 \alpha) + i(2s_1 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha).$$

按照经典层合理论, 层合板内各单层的面内变形相同, 且均处于平面应力状态, 所以, 当等效各向异性板的应变 ε_x 、 ε_y 和 γ_{xy} 确定后, 可求出任一单层 m 的面内应力为

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_{xy} \end{Bmatrix}_m = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix}_m \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (2.4)$$

式中, $\bar{Q}_{ij} (i, j = 1, 2, 6)$ 代表单层的刚度系数.

由以上分析可以看出, 按等效各向异性平面弹性理论所得应力解[例如式(2.3)], 虽然满足孔边自由应力条件, 即

$$\sigma_{r,R} = 0, \quad \tau_{\theta,R} = 0,$$

但就每一单层来说, 由式(2.4)求得的单层孔边径向正应力 $f_{r,R}^{(m)}$ 和切应力 $f_{\theta,R}^{(m)}$ 却并不一定为零, 而只是满足沿层合板厚度方向的合力边界条件. 可见, 以上所得平面应力解不能精确地满足孔边应力边界条件.

为了求得含圆孔层合板的应力精确解, 可在上述平面应力解的基础上, 叠加一个无限远处应力为零、孔边应力边界条件为

$$\sigma_{r,R}^{(m)} = -f_{r,R}^{(m)}, \quad \tau_{\theta,R}^{(m)} = -f_{\theta,R}^{(m)} \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (2.5)$$

的应力解.

在平面应力解中, 不存在层间应力, 所以, 含圆孔层合板的层间应力分析, 即归结为求解在式(2-5)所述自相平衡力系作用下的层合相应力问题.

三、孔边层间应力分析的基本方程

本节研究当孔边各处作用有对中面呈对称分布的自相平衡力系时,对称层合板孔边应力分析的基本方程。

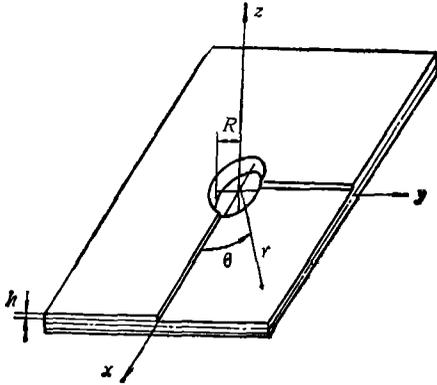


图 1

首先选柱坐标系 (r, θ, z) 如图 1 所示,并引入微小参数

$$\varepsilon = \frac{h}{R} \quad (3.1)$$

和无量纲量

$$\rho = \frac{z}{h}, \quad \eta = \frac{r - R}{h} \quad (3.2)$$

现在,利用摄动理论,建立分析孔边应力的平衡方程、几何方程、物理方程和应力函数的一般表达式。

利用关系式 (3.1)、(3.2),得柱坐标系的平衡方程为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r,\eta} + \sigma_{zr,\rho} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\eta} (\sigma_{r,\theta} + \sigma_r - \sigma_\theta) &= 0 \\ \sigma_{zr,\eta} + \sigma_{z,\rho} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\eta} (\sigma_{z\theta} + \sigma_{zr}) &= 0 \\ \sigma_{r\theta,\eta} + \sigma_{z\theta,\rho} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\eta} (\sigma_{\theta,\theta} + 2\sigma_{r\theta,\theta}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

设孔边单层应力场的分布形式为^[6,12]

$$\sigma_i = (\rho, \theta, \eta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_i^{(n)}(\rho, \theta, \eta) \varepsilon^n \quad (3.4)$$

$(i = 1, 2, \dots, 6)$

式中, $\sigma_i^{(n)}(\rho, \theta, \eta)$ 为待定函数,且规定

$$\sigma_i^{(n)}(\rho, \theta, \eta) = 0 \quad (n < 0).$$

将式(3.4)代入式(3.3),并仅取级数的 0-阶项,即得 0-阶平衡方程为^①

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r,\eta}^0 + \sigma_{zr,\rho}^0 &= 0 \\ \sigma_{zr,\eta}^0 + \sigma_{z,\rho}^0 &= 0 \\ \sigma_{r\theta,\eta}^0 + \sigma_{z\theta,\rho}^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

利用关系式(3.1)、(3.2),得柱坐标系的变形协调方程为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta,\rho\rho} - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\eta} (\varepsilon_{\theta z,\rho\theta} + \varepsilon_{zr,\rho\rho} - \varepsilon_{z,\eta\eta}) + \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\eta}\right)^2 \varepsilon_{z,\theta\theta} &= 0 \\ \varepsilon_{z,\eta\eta} + \varepsilon_{r,\rho\rho} - \varepsilon_{zr,\rho\eta} &= 0 \\ \varepsilon_{\theta,\eta\eta} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\eta} (2\varepsilon_{\theta,\eta} - \varepsilon_{r,\eta} - \varepsilon_{r\theta,\theta\eta}) + \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\eta}\right)^2 (\varepsilon_{r,\theta\theta} - \varepsilon_{r\theta,\theta}) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

注:为简单计,在以下各式中, (*) 简写为 *。

$$\left. \begin{aligned}
 & (\varepsilon_{x\theta,\eta\eta} - \varepsilon_{r\theta,\rho\eta}) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\eta} (2\varepsilon_{r,\rho\theta} + \varepsilon_{x\theta,\eta} - \varepsilon_{rx,\theta\eta} - 2\varepsilon_{r\theta,\rho}) \\
 & + \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\eta} \right)^2 (\varepsilon_{xr,\theta} - \varepsilon_{\theta x}) = 0 \\
 & 2\varepsilon_{\theta,\rho\eta} + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\eta} (2\varepsilon_{\theta,\rho} - \varepsilon_{\theta x,\theta\eta} - \varepsilon_{r\theta,\rho\theta} - 2\varepsilon_{r,\rho}) + \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\eta} \right)^2 \\
 & \cdot (\varepsilon_{xr,\theta\theta} - \varepsilon_{x\theta,\theta}) = 0 \\
 & (\varepsilon_{r\theta,\rho\rho} - \varepsilon_{x\theta,\rho\eta}) + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\eta} (2\varepsilon_{x,\theta\eta} + \varepsilon_{x\theta,\rho} - \varepsilon_{xr,\rho\theta}) - 2 \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\eta} \right)^2 \varepsilon_{x,\theta} = 0
 \end{aligned} \right\} (3.6)$$

设孔边应变场的分布形式为

$$\varepsilon_i(\rho, \theta, \eta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_i^n(\rho, \theta, \eta) \varepsilon^n, \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (3.7)$$

$$\varepsilon_i^n(\rho, \theta, \eta) = 0, \quad (n < 0)$$

将式(3.7)代入式(3.6), 并考虑到变形 ε_0^0 对层合板中面对称以及无限远处其值为零的条件, 可以证明, 0-阶变形协调方程为

$$\left. \begin{aligned}
 & \varepsilon_{\theta}^0 = 0 \\
 & \varepsilon_{x,\eta\eta}^0 + \varepsilon_{r,\rho\rho}^0 - \varepsilon_{xr,\rho\eta}^0 = 0 \\
 & \varepsilon_{r\theta,\rho}^0 - \varepsilon_{x\theta,\eta}^0 = j(\theta)
 \end{aligned} \right\} (3.8)$$

式中, $j(\theta)$ 为待定函数。

利用关系式(3.1)、(3.2), 得柱坐标系的应变位移关系为

$$\left. \begin{aligned}
 & \varepsilon_r = \frac{1}{R_c} u_{r,\eta}, \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{R(1 + \varepsilon\eta)} (u_{\theta,\rho} + u_r), \\
 & \varepsilon_x = \frac{1}{R_c} u_{x,\rho}, \quad \varepsilon_{x\theta} = \frac{1}{R_c} u_{\theta,\rho} + \frac{1}{R(1 + \varepsilon\eta)} u_{x,\theta}, \\
 & \varepsilon_{xr} = \frac{1}{R_c} (u_{r,\rho} + u_{x,\eta}), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{R_c} u_{\theta,\eta} + \frac{1}{R(1 + \varepsilon\eta)} (u_{r,\theta} - u_{\theta})
 \end{aligned} \right\} (3.9)$$

设孔边位移场的分布形式为

$$\left. \begin{aligned}
 & u_i(\rho, \theta, \eta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} u_i^n(\rho, \theta, \eta) \varepsilon^n, \quad (i = 1, 2, 3) \\
 & u_i^n(\rho, \theta, \eta) = 0, \quad (n < 0)
 \end{aligned} \right\} (3.10)$$

将式(3.10)代入式(3.9), 得 0-阶应变位移关系为

$$\left. \begin{aligned}
 & \varepsilon_r^0 = \frac{1}{R} u'_{r,\eta}, \quad \varepsilon_{\theta}^0 = \frac{1}{R} (u_{\theta}^0 + u_{\theta,\rho}^0), \\
 & \varepsilon_x^0 = \frac{1}{R} u'_{x,\rho}, \quad \varepsilon_{x\theta}^0 = \frac{1}{R} (u_{\theta,\rho}^0 + u_{x,\theta}^0), \\
 & \varepsilon_{xr}^0 = \frac{1}{R} (u'_{r,\rho} + u'_{x,\eta}), \quad \varepsilon_{r\theta}^0 = \frac{1}{R} (u_{\theta,\eta}^0 + u_{r,\theta}^0 - u_{\theta}^0),
 \end{aligned} \right\} (3.11)$$

并要求

$$\left. \begin{aligned}
 & u'_{r,\eta} = 0, \quad u_{\theta,\rho}^0 = 0, \quad u_{r,\rho}^0 + u_{x,\eta}^0 = 0, \\
 & u_{\theta,\eta}^0 = 0, \quad u_{\theta,\rho}^0 = 0.
 \end{aligned} \right\} (3.12)$$

可以证明,

$$u_r^0 = u_z^0 = u_\theta^0 = 0, f(\theta) = 0.$$

将上述关系式代入式(3.11)和式(3.8), 于是得 0-阶应变位移关系为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r^0 &= \frac{1}{R} u'_{r,\eta}, & \varepsilon_\theta^0 &= 0, \\ \varepsilon_z^0 &= \frac{1}{R} u'_{z,\rho}, & \varepsilon_{z\theta}^0 &= \frac{1}{R} u'_{\theta,\rho}, \\ \varepsilon_{zr}^0 &= \frac{1}{R} (u'_{r,\rho} + u'_{z,\eta}), & \varepsilon_{r\theta}^0 &= \frac{1}{R} u'_{\theta,\eta} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

0-阶变形协调方程为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta^0 &= 0 \\ \varepsilon_{r,\rho\rho}^0 + \varepsilon_{z,\eta\eta}^0 - \varepsilon_{zr,\rho\eta}^0 &= 0 \\ \varepsilon_{r\theta,\rho}^0 - \varepsilon_{z\theta,\eta}^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

在柱坐标系内, 正交各向异性单层的应力应变关系

为

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{z\theta} \\ \varepsilon_{zr} \\ \varepsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ & & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{z\theta} \\ \sigma_{zr} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (3.15)$$

对称

式中, $S_{ij} = S_{ij}(\theta, \beta)$, 即 S_{ij} 与所取微体的方位角 θ 及单层弹性主轴 1 的方位角 β 有关(图 2).

由式(3.14,a)和式(3.15), 得

$$\sigma_\theta = -\frac{S_{21}\sigma_r + S_{23}\sigma_z + S_{26}\sigma_{z\theta}}{S_{22}} \quad (3.16)$$

将上述关系式代入式(3.15), 于是得

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{z\theta} \\ \varepsilon_{zr} \\ \varepsilon_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{13} & 0 & 0 & \bar{S}_{16} \\ & \bar{S}_{33} & 0 & 0 & \bar{S}_{36} \\ & & \bar{S}_{44} & \bar{S}_{45} & 0 \\ & & & \bar{S}_{55} & 0 \\ & & & & \bar{S}_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_{z\theta} \\ \sigma_{zr} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

对称

式中, $\bar{S}_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{2i}S_{2j}}{S_{22}}, (i, j = 1, 3, 4, 5, 6)$

现在, 引入应力函数 ϕ 和 ψ , 并令

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \phi_{,\rho\rho}, \quad \sigma_z = \phi_{,\eta\eta}, \quad \sigma_{zr} = -\phi_{,\rho\eta}, \\ \sigma_{r\theta} &= \psi_{,\rho}, \quad \sigma_{z\theta} = -\psi_{,\eta} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

显然, 平衡方程(3.5)自然满足.

利用式(3.17)、(3.18), 将应变用应力函数表示, 并将其代入变形协调方程(3.14,b,c),

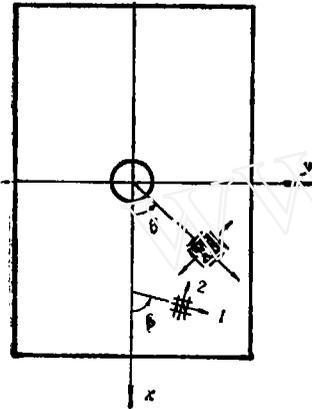


图 2

于是得应力函数的控制方程为

$$\left. \begin{aligned} L_2\phi + L_3\phi &= 0 \\ L_4\phi + L_5\phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

式中: $L_2 = \bar{S}_{66} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \bar{S}_{44} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2};$

$$L_3 = \bar{S}_{16} \frac{\partial^3}{\partial \rho^3} + (\bar{S}_{36} + \bar{S}_{45}) \frac{\partial^3}{\partial \rho \partial \eta^2};$$

$$L_4 = \bar{S}_{11} \frac{\partial^4}{\partial \rho^4} + (2\bar{S}_{13} + \bar{S}_{55}) \frac{\partial^4}{\partial \rho^2 \partial \eta^2} + \bar{S}_{33} \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}.$$

由方程(3.19)和微分算子 $L_i (i = 2, 3, 4)$ 的表达式可以看出, 在 $\theta = c$ 的任一径向截面内, $\bar{S}_{ij} (i, j = 1, 3, 4, 5, 6)$ 为常数, 而微分运算又仅对变量 ρ 和 η 进行, 因此, 孔边层间应力问题即转化为一列位于孔边径向截面的广义平面问题.

Lekhnitskii 曾经证明^[29], 方程(3.19)的通解为

$$\left. \begin{aligned} \phi &= F(Z) = F(\eta + i\rho) \\ \psi &= kF'(Z) = kF'(\eta + i\rho) \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

式中: $Z = \eta + i\rho$; $F(Z)$ 为变量 Z 的任意解析函数; i, k 值待定.

将式(3.20)代入式(3.19), 得

$$\left. \begin{aligned} l_2(\varepsilon) + k l_3(\varepsilon) &= 0 \\ l_4(\varepsilon) + k l_5(\varepsilon) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

式中:

$$l_2(\varepsilon) = \bar{S}_{66}\varepsilon^2 + \bar{S}_{44};$$

$$l_3(\varepsilon) = \bar{S}_{16}\varepsilon^3 + (\bar{S}_{36} + \bar{S}_{45})\varepsilon;$$

$$l_4(\varepsilon) = \bar{S}_{11}\varepsilon^2 + (2\bar{S}_{13} + \bar{S}_{55})\varepsilon^2 + \bar{S}_{33}.$$

显然, 要使方程(3.21)有解, 要求

$$l_4(\varepsilon) \cdot l_2(\varepsilon) - l_3^2(\varepsilon) = 0$$

此方程有六个根, 并用 $\varepsilon_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 表示. ε_i 确定后, 由方程(3.21)得

$$k_i = -\frac{l_3(\varepsilon_i)}{l_2(\varepsilon_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, 6). \quad (3.22)$$

由此可见, 应力函数的一般解为

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \sum_{i=1}^6 F_i(Z_i) \\ \psi &= \sum_{i=1}^6 k_i F_i'(Z_i) \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

应该指出, 由于 \bar{S}_{ij} 为 θ 的函数, 因此 ε_i, k_i 以及 $F_i(Z_i)$ 均与 θ 有关.

四、孔边层间应力奇异性分析

为了分析孔边层间应力的奇异性^[4], 设

$$F_i(Z_i) = \frac{r_i Z_i^{p+2}}{(p+1)(p+2)}. \quad (4.1)$$

式中: r_i 为待定系数; p 为待定指数。

由式(3.23)、(4.1)和式(3.18),得孔边应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sum_{i=1}^6 r_i t_i^2 Z_i^p, \\ \sigma_z &= \sum_{i=1}^6 r_i Z_i^p, \\ \sigma_{z\theta} &= - \sum_{i=1}^6 r_i k_i Z_i^p, \\ \sigma_{zr} &= - \sum_{i=1}^6 r_i t_i Z_i^p, \\ \sigma_{r\theta} &= \sum_{i=1}^6 r_i k_i t_i Z_i^p \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

由式(4.2)、(3.17)和式(3.13),得孔边位移为

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \sum_{i=1}^6 r_i a_i Z_i^{p+1} / (p+1) + d_1, \\ u_z &= \sum_{i=1}^6 r_i b_i Z_i^{p+1} / (p+1) + d_2, \\ u_\theta &= \sum_{i=1}^6 r_i c_i Z_i^{p+1} / (p+1) + d_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

式中, $d_j (j=1, 2, 3)$ 为与 θ 有关的积分常数;

$$a_i = R(\bar{S}_{11} t_i^2 + \bar{S}_{13} + k_i \bar{S}_{16} t_i);$$

$$b_i = R(\bar{S}_{13} t_i + \bar{S}_{33} / t_i + k_i \bar{S}_{36});$$

$$c_i = -R(\bar{S}_{45} + k_i \bar{S}_{44} / t_i).$$

由式(4.3)可以看出,由于位移应是有限的,所以要求

$$\operatorname{Re}[p] > -1. \quad (4.4)$$

现在建立层合板层间应力和层间位移的连续条件。

图3所示为两相连单层(单层 m 和单层 $m+1$) 的径向截面图。该截面的方位角为 θ , 简称为 θ 截面; 单层 m 与单层 $m+1$ 的交界面, 简称为界面 m 。由图3可以看出, 当采用极坐标 $(\xi h, \alpha)$ 时,

$$Z_i = \eta + t_i \rho = \xi \zeta_i. \quad (4.5)$$

式中,

$$\zeta_i = \cos \alpha + t_i \sin \alpha.$$

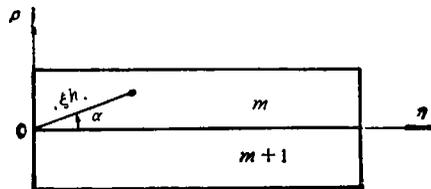


图 3

将式(4.5)代入式(4.2)、(4.3),得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \xi^p \sum_{i=1}^6 r_i t_i^2 \zeta_i^p \\ \sigma_x &= \xi^p \sum_{i=1}^6 r_i \zeta_i^p \\ \sigma_{x\theta} &= -\xi^p \sum_{i=1}^6 r_i k_i \zeta_i^p \\ \sigma_{xr} &= -\xi^p \sum_{i=1}^6 r_i t_i \zeta_i^p \\ \sigma_{r\theta} &= \xi^p \sum_{i=1}^6 r_i k_i t_i \zeta_i^p \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \xi^{p+1} \sum_{i=1}^6 r_i a_i \zeta_i^{p+1} / (p+1) + a_1 \\ u_x &= \xi^{p+1} \sum_{i=1}^6 r_i b_i \zeta_i^{p+1} / (p+1) + d_2 \\ u_\theta &= \xi^{p+1} \sum_{i=1}^6 r_i c_i \zeta_i^{p+1} / (p+1) + d_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

由式(4.6)可以看出,当 $\text{Re}[p] < 0$ 时,在 $\xi = 0$ 处应力存在奇异性。

在层合板的交界面上 ($\alpha = 0$),层间应力和层间位移的连续条件为

$$\sigma_x^{(m)} = \sigma_x^{(m+1)}, \sigma_{xr}^{(m)} = \sigma_{xr}^{(m+1)}, \sigma_{x\theta}^{(m)} = \sigma_{x\theta}^{(m+1)} \quad (4.8)$$

$$u_r^{(m)} = u_r^{(m+1)}, u_x^{(m)} = u_x^{(m+1)}, u_\theta^{(m)} = u_\theta^{(m+1)} \quad (4.9)$$

将式(4.6)代入式(4.8),得 θ 截面界面 m 处的层间应力连续条件为

$$\left. \begin{aligned} \xi^p \sum_{i=1}^6 [r_i^{(m)} - r_i^{(m+1)}] &= 0 \\ \xi^p \sum_{i=1}^6 [r_i^{(m)} t_i^{(m)} - r_i^{(m+1)} t_i^{(m+1)}] &= 0 \\ \xi^p \sum_{i=1}^6 [r_i^{(m)} k_i^{(m)} - r_i^{(m+1)} k_i^{(m+1)}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

将式(4.7)代入式(4.9),得相应的层间位移连续条件为

$$\left. \begin{aligned} \xi^p \sum_{i=1}^6 [r_i^{(m)} a_i^{(m)} - r_i^{(m+1)} a_i^{(m+1)}] &= 0 \\ \xi^p \sum_{i=1}^6 [r_i^{(m)} b_i^{(m)} - r_i^{(m+1)} b_i^{(m+1)}] &= 0 \\ \xi^p \sum_{i=1}^6 [r_i^{(m)} c_i^{(m)} - r_i^{(m+1)} c_i^{(m+1)}] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

在式(4.10)和式(4.11)中, t_i 、 k_i 、 a_i 、 b_i 和 c_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) 均为已知常数,其值随单层特性和截面方位角 θ 而异。

现在建立孔边应力边界条件。

前已指出, 单层 m 的孔边非零边界应力为 $-f_{r,R}^{(m)}$ 和 $-f_{r\theta,R}^{(m)}$, 所以, 单层 m 的孔边 ($\alpha = \pi/2$) 应力边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r,R}^{(m)} + f_{r,R}^{(m)} &= 0 \\ \sigma_{r\theta,R}^{(m)} + f_{r\theta,R}^{(m)} &= 0 \\ \sigma_{\theta r,R}^{(m)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

将式(4.6)代入式(4.12), 得

$$\left. \begin{aligned} \xi^p \sum_{i=1}^6 r_i^{(m)} t_{i,m}^{p+2} &= -f_{r,R}^{(m)} \\ \xi^p \sum_{i=1}^6 r_i^{(m)} k_i^{(m)} t_{i,m}^{p+1} &= -f_{r\theta,R}^{(m)} \\ \xi^p \sum_{i=1}^6 r_i^{(m)} t_{i,m}^{p+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

同理得单层 $m+1$ 的孔边应力边界条件为

$$\left. \begin{aligned} (-\xi)^p \sum_{i=1}^6 r_i^{(m+1)} t_{i,m+1}^{p+2} &= -f_{r,R}^{(m+1)} \\ (-\xi)^p \sum_{i=1}^6 r_i^{(m+1)} k_i^{(m+1)} t_{i,m+1}^{p+1} &= -f_{r\theta,R}^{(m+1)} \\ (-\xi)^p \sum_{i=1}^6 r_i^{(m+1)} t_{i,m+1}^{p+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

现在, 令

$$\begin{aligned} \{C\} &= [r_1^{(m)}, r_2^{(m)}, \dots, r_6^{(m)}, r_1^{(m+1)}, r_2^{(m+1)}, \dots, r_6^{(m+1)}]^T, \\ \{F\} &= [000000 -f_{r,R}^{(m)} -f_{r\theta,R}^{(m)} 0 -f_{r,R}^{(m+1)} -f_{r\theta,R}^{(m+1)} 0]^T, \end{aligned}$$

则由式(4.10)、(4.11)、(4.13)和式(4.14), 得

$$\xi^p [K(p)] \{C\} = \{F\} \quad (4.15)$$

在方程(4.15)中, 左端与 ξ 有关, 而其右端 $\{F\}$ 则是已知的。为了求解该方程^[5], 先令 $p=0$, 得

$$[K(0)] \{C\} = \{F\}$$

由此求得 $\{C\}$ 的一组特解 $\{\bar{C}\}$, 然后再求解齐次微分方程

$$[K(p)] \{C\} = 0 \quad (4.16)$$

此方程的任一解与特解 $\{\bar{C}\}$ 的线性组合, 均为方程(4.15)的解。方程(4.16)存在非零解的必要条件是:

$$\|K(p)\| = 0 \quad (4.17)$$

于是, 层间应力奇异性问题即转化为特征值问题, 而其奇异阶次则由条件

$$0 > \text{Re}[p_k] > -1 \quad (4.18)$$

确定。在上式中, $p_k (k=1, 2, \dots)$ 为方程(4.17)的特征根。

沿孔周 ($0 < \theta \leq 2\pi$) 各界面 ($i=1, 2, \dots, n-1$) 依次建立特征方程(4.17), 并运用判别式(4.18), 即可全面确定孔边层间应力的奇异特性。

五、算 例

为了说明本文所述理论的应用,对图 1 所示[0/90/90/0]层合板孔边层间应力的奇异性进行了分析。该板由硼/环氧复合材料制成,其弹性常数 $E_1 = 3 \times 10^7 \text{psi}$ 、 $E_2 = E_3 = 3 \times 10^6 \text{psi}$ 、 $G_{12} = G_{23} = G_{13} = 1 \times 10^6 \text{psi}$ 、 $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.336^{[7]}$, 圆孔半径 $R = 1 \text{in}$ 。根据上述理论,并采用 Muller 方法^[14],求得 $z = h$ 处的层间应力奇异阶次如图 4 所示。由此可以进一步看出,对于含圆孔层合板,孔边层间应力的奇异性问题,是一个值得重视的问题。

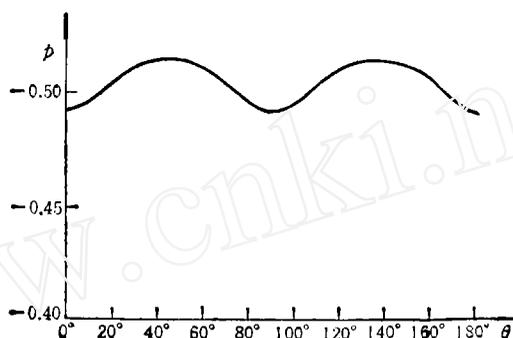


图 4

参 考 文 献

- [1] R. B. Pipes & N. J. Pagano, Inter-Laminar Stresses in Composite Laminates Under Axial Extension, *J. C. M.*, 4(1970).
- [2] S. Tang, A Boundary Layer Theory-Part 1: Laminated Composites in Plane Stress, *J. C. M.*, 9, Jan. (1975).
- [3] S. Tang & A. Levy, A Boundary Layer Theory-Part 2: Extension of Laminated Finite Strip, *J. C. M.*, 9, Jan. (1975).
- [4] S. S. Wang & I. Choi, Boundary Layer Effects in Composite Laminates, *J. A. M.*, 49(1982).
- [5] R. I. Zwierns, T. C. Ting & R. L. Spilker, On the Logarithmic Singularity of free Edge Stress in Laminated Composites Under Uniform Extension, *J. A. M.*, 49, Sept. (1982).
- [6] S. Tang, Interlaminar Stresses Around Circular Cutouts in Composite Plates Under Tension, *J. A. M.*, 15, 11, Nov. (1977).
- [7] S. Tang, A Variational Approach to Edge Stresses of Circular Cutouts in Composites, *A. I. A. A. Paper*, 79-0802 (1979).
- [8] R. I. Zwierns & T. C. Ting, Singularity of Contact Edge Stress in Laminated Composites Under Uniform Extension, *J. C. M.*, 17, Jan. (1982).
- [9] 单辉祖, 谢锋, 有限大层合板承载销孔的孔边应力分析, 北京航空学院科研报告, BH-2832, 1986年。
- [10] Лехницкий, С. Г. 著, 胡海东译, 各向异性板, 科学出版社, 1963年。
- [11] G. N. Savin, Stress Distribution Around Holes, Naukova, Dumka Press, Kiev(1968).
- [12] E. L. Reiss & S. Locke, On the Theory of Plane Stress, *Quar. Appl. Math.*, 10, 2(1961).
- [13] S. G. Lekhnitskii, Theory of Elasticity of an anisotropic Body, Mir Publishers, Moscow (1981).
- [14] D. E. Muller, A Method For Solving Algebraic Equations Using an Automatic Computer, *Mathematical Tables and Computation*, 10, Oct. (1956).

A BOUNDARY LAYER THEORY FOR COMPOSITE LAMINATE WITH A CIRCULAR HOLE

Shan Huizu, Huang Mingcong, Shi Zhendong

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

Abstract The analysis of interlaminar stresses around a circular hole in laminate plate is a complicated problem. In this paper, according to perturbation procedure, the general boundary layer theory for composite laminate with a circular hole is developed, and the eigen-equations of singular orders of the interlaminar stresses are established. It is found that the problem can be transformed to a series of generalized plane problems.

Key words composite laminate, stresses around a circular hole, interlaminar stresses, boundary layer theory, the singularity of interlaminar stresses.

WWW.CNKI.NET