第 21 卷 第 5 期　　力 学 学 报　　Vol. 21, No. 5
1989 年 9 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Sept. 1989

Stokes 矢量在全息光弹性中的应用

王季中 王裕厚 王蕴珊
（山 东 工 业 大 学）

提要 在全息光弹性中计算再现虚像的光强分布已广泛地采用了 Jones 矢量和矩阵的方法．虽然这一方法比较直观易做，但完全的矩阵运算仍感冗长乏味．本文根据偏振光的各种矩阵描述法之间的关系，导出了一个用 Stokes 矢量表示的计算全息光弹光强分布的普遍公式。利用此式可使一般和偏振全息光弹性中光强的矩阵运算简化为 Stokes 矢量的标积运算．此外，这一公式不仅可用于一次曝光还能用于两次曝光的全息光弹性．最后给出了一些典型的例子．

关键词 Jones 矢量，Stokes 矢量，全息光弹性，偏振全息光弹性

一、前　　言

自从全息术和光弹性结合形成全息光弹性以来，这一新技术已成为实验力学的重要手段之一．它的优点是可以较容易地获得等和条纹及绝对程差条纹．在全息光弹性中是利用全息照像技术来记录和再现偏振光通过受力模型后其偏振状态的变化的，因此，在计算再现虚像的光强分布时，描述偏振光的 Jones 矢量及矩阵运算方法自然地被引用到全息光弹中来． 七十年代初已有文章[1-3]对该问题给予了讨论． 近来又有专著[4]简要地介绍了 Jones 矢量和矩阵方法在全息光弹性中的应用． 本文根据偏振光的各种描述法之间的关系．导出了一个用 Stokes 矢量表示的再现虚象光强分布的公式．利用这一公式只需简单的矢量标积运算就可求出再现虚象的光强分布． 并清楚地显示了全息光弹性中，物光与参考光有互易特性．

二、偏振光各种矩阵描述法之间的关系

偏振光的矩阵描述法有多种，既然都可描述同一种偏振光，它们之间必然有一定的联系．

设一偏振光的 Jones 矢量为 $\mathbf{E}$，Stokes 矢量为 $\mathbf{S}$，相干矩阵为 $\mathbf{J}$，根据定义应有：

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}E_x\\E_y\end{bmatrix}\quad \mathbf{S}=\{s_0, s_1, s_2, s_3\} \tag{1}$$

$$\mathbf{J}=\mathbf{E}\times\mathbf{E}^{+}=\begin{bmatrix}E_xE_x^* & E_xE_y^*\\E_yE_x^* & E_yE_y^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_{xx} & J_{xy}\\J_{yx} & J_{yy}\end{bmatrix} \tag{2}$$

本文于 1986 年 5 月 26 日收到第一次来稿，于 1988 年 8 月 3 日收到修改稿．

其中 E_x, E_y 为偏振光复振幅的 x, y 分量. (2)式中 J_{xx}, J_{yy} 分别表示偏振光沿 x, y 方向的光强.

$$T_r\mathbf{J} = J_{xx} + J_{yy} = I \tag{3}$$

表示偏振光的强度. 式中 T_r 表示求矩阵的"迹" (*Trace*). 而其它两个元素 J_{xy}, J_{yx} 则决定偏振光 x, y 分量间的相关情况[5].

由直接计算可以求得 Jones 矢量与 Stokes 矢量各分量之间的关系:

$$\mathbf{E}^+\boldsymbol{\sigma}_j\mathbf{E} = S_j \quad j = 0, 1, 2, 3 \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}_j$ 称为 Pauli 自旋矩阵. 其具体表达式为:

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

由(2)、(4)、(5)式可得相干矩阵和 Stokes 矢量之间的关系:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} s_0 + s_1 & s_2 - is_3 \\ s_2 + is_3 & s_0 - s_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} s_j\boldsymbol{\sigma}_j \tag{6}$$

由 $\boldsymbol{\sigma}_j$ 矩阵的性质,可得[5]

$$S_j = T_r[J\boldsymbol{\sigma}_j] \quad j = 0, 1, 2, 3, \tag{7}$$

(6)、(7)两式就是 Stokes 矢量与相干矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的关系.

三、全息光弹性再现虚象光强公式的 Stokes 矢量表示法

1. 一次曝光全息光弹性

令一偏振光通过受力光弹模型形成物光,与同时到达全息底片的参考光干涉一次曝光,完成一次曝光的全息光弹技术. 其再现虚像的光强分布应为[3]

$$I_1 = K\boldsymbol{E}_1^+\boldsymbol{E}_r\boldsymbol{E}_r^+\boldsymbol{E}_1 = K\boldsymbol{E}_1^+\boldsymbol{J}_r\boldsymbol{E}_1 \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{E}_1$ 为偏振光通过受力模型后的 Jones 矢量, $\mathbf{J}_r$ 为所用参考光的相干矩阵. K 为一比例系数,以后将略去. 将(6)式代入(8)式可得:

$$I_1 = \boldsymbol{E}_1^+ \cdot \frac{1}{2}\{s_{r_0}\boldsymbol{\sigma}_0 + s_{r_1}\boldsymbol{\sigma}_1 + s_{r_2}\boldsymbol{\sigma}_2 + s_{r_3}\boldsymbol{\sigma}_3\}\boldsymbol{E}_1$$

$$= \frac{1}{2}\{s_{r_0}(\boldsymbol{E}_1^+\boldsymbol{\sigma}_0\boldsymbol{E}_1) + s_{r_1}(\boldsymbol{E}_1^+\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{E}_1) + s_{r_2}(\boldsymbol{E}_1^+\boldsymbol{\sigma}_2\boldsymbol{E}_1) + s_{r_3}(\boldsymbol{E}_1^+\boldsymbol{\sigma}_3\boldsymbol{E}_1)\}$$

由(4)式可以看出,上式中各小括号内的量就分别是物光的四个 Stokes 分量. 所以:

$$I_1 = \frac{1}{2}\{s_{r_0}s_{10} + s_{r_1}s_{11} + s_{r_2}s_{12} + s_{r_3}s_{13}\} = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{S}_r \cdot \boldsymbol{S}_1\} \tag{9}$$

即一次曝光全息光弹性的再现虚像光强分布是物光和参考光的 Stokes 矢量的"标积". 这里是把 $\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{S}_r$ 看成是四维 Stokes 空间的矢量. 因此, 只要求得偏振光通过受力模型后的 Stokes 矢量及一次曝光所用参考光的 Stokes 矢量, 那么, 再现虚像的光强就等于物光和参考光的 Stokes 矢量的四个对应分量之积的代数和.

2. 两次曝光全息光弹性

在同一张全息底片上,模型受力前后各曝光一次就是两次曝光全息光弹性,其再现虚像的光强分布为[3]

$$I_2 = (E_{01}^+ + E_{02}^+)E_rE_r^+(E_{01} + E_{02}) = (E_{01}^+ + E_{02}^+)J_r(E_{01} + E_{02}) \tag{10}$$

式中 E_{01}，E_{02} 分别为第一，二次曝光到达全息底片上的物光 Jones 矢量．可见，若令 $E_2 = E_{01} + E_{02}$ 则(10)式与(9)式相同．

$$I_2 = \frac{1}{2}\{S_r \cdot S_2\} \tag{11}$$

这就是用 Stokes 矢量表示的两次曝光再现虚像的光强公式．应用(11)式时，必须先求出两次曝光到达底片的物光 Jones 矢量的合矢量 E_2，再用(4)式算出它对应的 Stokes 矢量 S_2 的四个分量，才能从(11)式计算出光强 I_2．

3. 偏振全息光弹性

所谓偏振全息术是指既能记录物光的振幅和位相又能记录物光偏振状态的全息技术[6,7]．下面仅就使用消偏参考光的 Kurtz 方法[8]进行讨论．

我们在全息光弹的研究中，发现物光与参考光有互易性．例如，用消偏物光和圆偏振参考光与用圆偏振物光和消偏参考光所得的再现虚像的干涉条纹图是一样的．这与上面导出的(9)，(11)式是一致的．因为再现虚像的光强分布在 Stokes 空间中为物光与参考光 Stokes 矢量的"标积"，而矢量的标积是可以互换的．由此我们还可得到一些有用的结果．例如，因消偏参考光的 Stokes 矢量 $S_r = [1, 0, 0, 0]$，故在计算再现像的光强时，仅需求出 S_1 或 S_2 的第一个分量 s_0 即可．此外，当用偏光器件观察全息图时，可用 Muller 矩阵进行运算．如用透射轴与水平方向成 α 角的偏振片观察时，所得的新 Stokes 矢量为

$$S' = M_\alpha S \tag{12}$$

式中 M_α 为该偏振片对应的 Muller 矩阵．

$$M_\alpha = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & c_2' & s_2' & 0 \\ c_2' & c_2' & c_2's_2' & 0 \\ s_2' & c_2's_2' & s_2' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$c_2' = \cos 2\alpha$，$s_2' = \sin 2\alpha$．由于求透过偏振片的光强只需知道 S' 的第一个分量，即：

$$I = \frac{1}{2}(s_0 + c_2's_1 + s_2's_2) \tag{13}$$

计算很是简便．

4. 应用举例

现举几个具体例子说明(9)、(11)、(13)式的应用．

1）一次曝光：设一水平偏振光通过一受力模型，由文献[4]知，出射光的 Stokes 矢量为

$$S = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta \cos\delta \\ \cos 2\theta \sin 2\theta(1 - \cos\delta) \\ \sin 2\theta \sin\delta \end{bmatrix} \tag{14}$$

其中 θ 为主应力之一与水平方向的夹角，$\delta = \varphi_2 - \varphi_1$．为沿两主应力方向偏振光的位

相差．若参考光也是水平偏振光，即 $\boldsymbol{S}_r = [1, 1, 0, 0,]$ 由(9)式便可得到再现虚像的光强为：

$$I_1 = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{S}_r \cdot \boldsymbol{S}_1\} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta\cos\delta)$$

$$= 1 - \sin^2 2\theta \sin^2\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \tag{15}$$

若物光为右旋圆偏振光，则通过受力模型后，它的 Stokes 矢量为[4]

$$\boldsymbol{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sin 2\theta \sin\delta \\ \cos 2\theta \sin\delta \\ \cos\delta \end{bmatrix} \tag{16}$$

当参考光也为右旋圆偏振光 $S_r = [1, 0, 0, 1]$ 时，

$$I_1 = \frac{1}{2}(1 + \cos\delta) = \cos^2\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \tag{17}$$

2）两次曝光

现再计算两次曝光的光强分布，设物光为左旋圆偏振光，则有

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_{01} + \boldsymbol{E}_{02} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i(e^{-i\phi_0} + c^2 e^{-i\phi_1} + s^2 e^{-i\phi_2}) + sc(e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_2}) \\ ics(e^{-i\phi_1} - e^{-i\phi_2}) + e^{-i\phi_0} + s^2 e^{-i\phi_1} + c^2 e^{-i\phi_2} \end{bmatrix} \tag{18}$$

由(4)式可求出对应 $\boldsymbol{E}_2$ 的 Stokes 矢量的各分量：

$$\begin{aligned} s_{20} &= 2 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_2 - \varphi_0) \\ s_{21} &= \cos 2\theta\{\cos(\varphi_1 - \varphi_0) - \cos(\varphi_2 - \varphi_0)\} \\ &\quad - \sin 2\theta\{\sin(\varphi_1 - \varphi_0) - \sin(\varphi_2 - \varphi_0) - \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\} \\ s_{22} &= \sin 2\theta\{\cos(\varphi_1 - \varphi_0) - \cos(\varphi_2 - \varphi_0)\} \\ &\quad + \cos 2\theta\{\sin(\varphi_1 - \varphi_0) - \sin(\varphi_2 - \varphi_0) - \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\} \\ s_{23} &= -\{1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_0) + \cos(\varphi_2 - \varphi_0) + \cos(\varphi_2 - \varphi_1)\} \end{aligned} \tag{19}$$

若参考光也为左旋圆偏振光 $\boldsymbol{S}_r = [1, 0, 0, -1]$．则由(11)式可得

$$I_2 = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{S}_2 \cdot \boldsymbol{S}_r\} = \left\{1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_0) + \cos(\varphi_2 - \varphi_0) + \cos\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right\} \tag{20}$$

这就是二次曝光所得的组合条纹．

3）偏振全息光弹性

对于一次曝光的偏振全息图，再现虚像的光强即是通过受力模型后的物光光强 s_0，没有干涉条纹出现．

利用上面计算两次曝光光弹性光强分布的公式，偏振全息时，参考光用完全消偏振光，其 Stokes 矢量为 $\boldsymbol{S}_r = [1, 0, 0, 0]$，由(11)式我们得到物光为圆偏振光时(不论左旋式右旋)．

$$I_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{S}_r \cdot \boldsymbol{S}_2) = \frac{1}{2}s_{20} = \frac{1}{2}[2 + \cos(\varphi_1 - \varphi_0) + \cos(\varphi_2 - \varphi_0)] \tag{21}$$

这与 Kubo[9] 结果相同，也和我们用消偏物光的偏振全息术所得结果一致[10]．

利用(13)式还可计算用偏振元件 P_a 观察偏振全息图时透过的光强分布，例如，物光

为左旋圆偏振光时，可得

$$I=\frac{1}{2}\{s_{20}+\cos 2\alpha s_{21}+\sin 2\alpha s_{22}\}$$

$$=\frac{1}{2}\{2+\sin 2(\alpha-\theta)\sin(\varphi_2-\varphi_1)+\sin 2(\alpha-\theta)\cdot[\sin(\varphi_1-\varphi_0)-\sin(\varphi_2-\varphi_0)]+2[\cos^2(\alpha-\theta)\cos(\varphi_1-\varphi_0)+\sin^2(\alpha-\theta)\cos(\varphi_2-\varphi_0)]\}$$

这一光强公式与我们以前发表的结果[6]一致。

四、结　论

由以上讨论可见，用 Stokes 矢量法计算全息光弹性的光强分布．对于一次曝光全息光弹性，只需求出物光通过受力模型后的 Stokes 矢量代入(9)式计算．在两次曝光全息光弹性计算中，因 Pauli 矩阵是些很简单的矩阵，计算 s_0，s_1，s_2，s_3 并不太麻烦，而且通常物光和参考光是选用线偏振光或圆偏振光，故只需算出 s_0 和 s_1 或 s_0 和 s_3 并不需把 Stokes 矢量的四个分量全部算出即可计算出光强分布． 特别是对于消偏参考光的偏振全息术，只需算出 s_0 就可得到直接观察全息图时的光强分布．

参　考　文　献

[1] Fourney, M. E., *Advances in Holographic Photoelasticity*, in Symposium on Application of Holography in Mechauics, Los Angeles, (1971), 18—38.
[2] Sciammarella, C. A. and Quintanilla, G., *Exp. Mech.*, 12, 2(1972), 57—66.
[3] Sanford, R. J., Proceedings of the Engineering Applications of Holography, Syposium, California(1972), 331—343.
[4] Theocaris, P. S. and Gdoutos, E. E., Matrix Theory of Photoelaslicity, Springer-Verlag, (1979).
[5] O'Neil, E. L., Introduction to Statistical Optics, Addison-Wesley (1963), Chap. 9.
[6] 王季中，张文之，固体力学学报，1，3(1981)，352—357.
[7] Lohmann, A. W., *Appl. Opt.*, 4, 12(1965), 1667—1668(L).
[8] Kurtz, C. N., *Appl. Phys. Lett.*, 14, 2(1969), 59—61.
[9] Kubo, H. et al, *Optica Acta*, 22, 1(1975), 59—70.
[10] 王季中，王裕厚，张文之，王蕴珊，山东工学院学报，1(1983)，6—9.

NEW METHOD FOR CALCULATING LIGHT-INTENSITY DISTRIBUTION IN HOLOPHOTOELASTICITY

Wang Jizhong, Wang Yuhou, Wang Yunshan

(Shandong Polytechnic University)

Abstract The method of Jones vector and matrix has been widely used for calculating light-intensity distribution of the reconstructed virtual image in holophotoelasticity. Although this method is straight-forward it is tedious to calculate fully by use of matrix method. In this paper, according to the relationship among various kinds of representation of polarized light, a general expresslon in terms of Stokes vectors for calculating light-intensity distribution in holophotoelasticity is derived. By use of this expression the calculation of light-intensity distribution in either conventional or the so-called polarization holophotoelasticity can be simplified by changing matrix calculus into scalar product of two Stokes vectors. Moreover, this expression can be applied to single-exposure as well as double-exposure holophotoelasticity. Finally some typical examples are given.

Key words Jones vector, Stokes vector, Holophotoelasticity, Polarization Holophotoelasticity.