

二维含参映射系统分叉曲线的数值计算

凌复华 包光伟 宋映东
(上海交通大学工程力学系)

提要 本文提出了一种确定二维含参映射系统分叉曲线的数值计算方法。根据最弱的分叉定义 (*Branching*), 我们建立了确定周期 k 解分叉曲线的方程, 并给出了方程求解过程中一些基本量的递推关系式。利用本方法编制的计算程序适用于所有的两阶连续可微的二维含参映射系统。作为实例, 我们具体计算了 Hénon 映射和耦合 Logistic 映射, 得到了一些新的结果。

关键词 含参映射, 周期解, 分叉曲线, 打靶法

一、引 言

映射系统

$$\begin{aligned} f_{\alpha}: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ z &\mapsto f(z, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (1)$$

的解的极限集之分类为无限解、平衡解、周期解、拟周期解, 并称除此之外在相空间中有界域内的解为混沌解^[2]。映射系统不仅就其本身具有重要意义, 它也可以作为连续系统的一种近似。显然, 无论从理论或应用的角度, 都对参数空间 $\mathbb{R}^m$ 中不同的解的分布有兴趣。

确定系统 (1) 的周期 k 解在参数空间中的存在域 $\mathcal{D}^k$ 是研究参数空间解结构的一个基本的、同时又始终是令人感兴趣的问题。但 $\mathcal{D}^k$ 的分析并不容易, 一般需用数值方法进行, 即在参数空间中找到解的性质发生定性变化的分叉曲面 $\mathcal{S}^k$ 。本文的作者之一对 Hénon 映射构造了一种算法, 并计算了直到周期 5 的分叉曲线^[3]。本文推广了这种算法, 使之适用于二参数二维映射系统 (即方程 (1) 中 $m=2, n=2$), 并给出了计算过程中需用的普适递推关系式, 发展了确定这类系统周期 k 解分叉曲线的通用程序。

根据中心流形定理 (例如看 [8]), 这里得到的结果对于高维系统也有很大的参考价值。

二、问题的一般提法

本节给出参数空间中周期 k 解分叉曲面 $\mathcal{S}^k$ 的最弱的定义。

定义: 设 $\mathcal{E}^k \subset \mathbb{R}^n$ 是映射系统 (1) 的周期 k 解集。即对任意的 $z \in \mathcal{E}^k$, 至少存

在一个 $\alpha \in \mathcal{D}^k$, 成立

$$z = f^k(z, \alpha) \quad (2)$$

其中 $f_\alpha^k: z \mapsto f^k(z, \alpha)$ 是 f_α 的 k 次复合映射. 若存在这样的 $z \in \mathcal{H}^k$, 使之成立

$$\left. \begin{aligned} z &= f^k(z, \alpha) \\ \det \left(\frac{Df^k(z, \alpha)}{Dz} - \lambda I \right) &= 0 \\ |\lambda| &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中 λ 是 f^k 的 Jacobi 阵 $Df^k(z, \alpha)/Dz$ 的一个特征值, I 是 $n \times n$ 单位阵. 设满足条件(3)的集合为 $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}^k \times \mathcal{D}^k$, π_B 是投影算子, 即

$$\pi_B: A \times B \rightarrow B$$

则称 $\mathcal{A}$ 在投影算子 π_α

$$\pi_\alpha: \mathcal{A} \subset \mathcal{H}^k \times \mathcal{D}^k \rightarrow \mathcal{S}^k \subset \mathcal{D}^k \quad (4)$$

下的像 $\mathcal{S}^k$ 为周期 k 解在参数空间 R^m 中的分叉曲面. 显然 $\mathcal{S}^k$ 是 R^m 中的 $m-1$ 维曲面.

存在较强的关于分叉曲面的定义. 例如, 将(3)式改为

$$\left. \begin{aligned} z &= f^k(z, \alpha) \\ \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

则由此定义的周期 k 解分叉曲面, 记为 $\mathcal{S}_p^k$. 与(5)截然相反的另一情况, 则是

$$\left. \begin{aligned} z &= f^k(z, \alpha) \\ \min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由(6)所定义的周期 k 解分叉曲面, 记为 $\mathcal{S}_s^k$.

显然, $\mathcal{S}_p^k \subset \mathcal{S}^k$, $\mathcal{S}_s^k \subset \mathcal{S}^k$.

三、二维映射系统

令(1)式中的 $n = m = 2$, 并分别将 $\lambda = 1$ 和 $\lambda = -1$ 代入方程(3), 得到确定切分叉、倍分叉曲线的两组方程

$$\text{切分叉: } \begin{cases} z - f^k(z, \alpha) = 0 \\ \det \left(\frac{Df^k}{Dz} - I \right) = 0 \end{cases} \quad z, \alpha \in R^2 \quad (7)$$

$$\text{倍分叉: } \begin{cases} z - f^k(z, \alpha) = 0 \\ \det \left(\frac{Df^k}{Dz} + I \right) = 0 \end{cases} \quad z, \alpha \in R^2 \quad (8)$$

1. 分叉曲线的数值计算公式

设 $\{z^1, z^2, \dots, z^k, z^{k+1}\}$ 是每一次 f_α 映射下的像, 即

$$z^{l+1} = f(z^l, \alpha), \quad l = 1, 2, \dots, k$$

以及 $z^{k+1} = z^1$ (周期 k 解). 又设 $z = (z_1, z_2)^T$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$, $f = (f_1, f_2)^T$, $W = Df(z, \alpha)/Dz$ 及 $W^k = Df^k(z, \alpha)/Dz$, 即

$$W_{ij} = \partial f_i(z, \alpha) / \partial z_j, \quad W_{ij}^k = \partial f_i^k(z, \alpha) / \partial z_j, \quad i, j = 1, 2$$

其中 $f_i^k(z, \alpha)$ 系指 $f^k(z, \alpha)$ 的第 i 个分量。

分别将(7)、(8)展开, 则得到

$$\left. \begin{aligned} z^1 - f^k(z^1, \alpha) &= 0 \\ 1 \mp (W_{11}^k + W_{21}^k) + W_{11}^k W_{21}^k - W_{21}^k W_{11}^k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中“ $\mp$ ”分别表示切分叉和倍分叉曲线的情况。对于 W^k , 我们有递推关系式

$$W^l = \prod_{i=1}^l W(z^i, \alpha) \quad (10)$$

(10)式可通过复合求导公式得到。

下面讨论确定切分叉和倍分叉曲线的方程(9)。由于它们的形式都是由三个方程、四个未知量所构成的一组非线性方程组, 显然可以将 z_1^1 、 z_2^1 和一个参数(不妨取) α_1 作为求解方程(9)的自变量, 而 α_2 则作为方程解的参数, 从而可以在参数平面 $\alpha_1 - \alpha_2$ 上求得周期 k 解的分叉曲线 $\mathcal{S}^k$ 。设 $\xi = (z_1^1, z_2^1, \alpha_1)^T$, $\mu = \alpha_2$, 则问题转化为求解方程

$$\Phi_\mu(\xi) = 0 \quad (11)$$

的求根问题。其中 Φ_μ 是在固定参数 μ 下方程组(9)的算子表示。

对方程(11)进行迭代求解, 意味着周期 k 解分叉曲线的简单打靶计算。存在许多有效的迭代计算方法, 如需要计算 Φ_μ 的一阶导数矩阵 (Jacobi 阵) $D\Phi_\mu/D\xi$ 的 Newton 法以及不需要一阶导数矩阵而采用各种更新公式的拟 Newton 法。值得注意的是, 我们可以递推地得到 Φ_μ 的一阶导数矩阵的各个分量的解析表达式。设

$$\frac{D\Phi_\mu}{D\xi} = \begin{bmatrix} I - W^k & -U^k \\ (\mp V^k + T^k)^T & \mp S^k + Y^k \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} U^k &= \frac{d}{d\alpha_1} f^k(z^1, \alpha) \\ V^k &= \frac{\partial}{\partial z^1} (W_{11}^k + W_{21}^k) \\ T^k &= \frac{\partial}{\partial z^1} (W_{11}^k W_{21}^k - W_{21}^k W_{11}^k) \\ S^k &= \frac{d}{d\alpha_1} (W_{11}^k + W_{21}^k) \\ Y^k &= \frac{d}{d\alpha_1} (W_{11}^k W_{21}^k - W_{21}^k W_{11}^k) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

又设

$$H_{ij}^n = \frac{\partial}{\partial z_i} W_{ij}^n(z, \alpha)$$

$$G_{ij}^n = \frac{d}{d\alpha_i} f_i^n(z, \alpha)$$

$$D_{ij}^n = \frac{d}{d\alpha_i} W_{ij}^n(z, \alpha)$$

则同样可由复合函数求导法则得到

$$H_{ij}^n = H_{ii}(z^n, \alpha) W_{ii}^{n-1} W_{ij}^{n-1} + W_{ii}(z^n, \alpha) H_{ij}^{n-1} \quad (14)$$

$$G_{ij}^n = W_{ii}(z^n, \alpha) G_{ij}^{n-1} + G_{ij}(z^n, \alpha) \quad (15)$$

$$D_{ij}^n = [H_{ii}(z^n, \alpha) G_{ii}^{n-1} + D_{ii}(z^n, \alpha)] W_{ij}^{n-1} + W_{ii}(z^n, \alpha) D_{ij}^{n-1} \quad (16)$$

其中 $n = 2, 3, \dots, k$. 对下标根据 Einstein 哑标求和原则求和.

递推关系式(10)、(14)–(16)表明, 只要给出映射系统这些求导量的初值, 则很容易计算得到公式(13)的值, 其表达式是

$$\left. \begin{aligned} U_i^k &= G_{ii}^k \\ V_i^k &= H_{ii}^k + H_{ii}^k \\ T_i^k &= H_{ii}^k W_{ii}^k + W_{ii}^k H_{ii}^k - (H_{ii}^k W_{ii}^k + W_{ii}^k H_{ii}^k) \\ S^k &= D_{ii}^k + D_{ii}^k \\ Y^k &= D_{ii}^k W_{ii}^k + W_{ii}^k D_{ii}^k - (D_{ii}^k W_{ii}^k + W_{ii}^k D_{ii}^k) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

注意, 由于 α_2 是固定的, 在递推过程中, 根本无须对 G_{ii}^n , D_{ii}^n ($n = 1, 2, \dots, k$) 进行计算, 这由(17)以及(15)和(16)的表达形式也可以看出.

2. 周期 k 解在参数平面中的特性分析

由(7)、(8)可确定周期 k 解的分叉曲线, 对其两侧邻域内周期 k 解的存在性和稳定性问题, 又是一个值得进一步研究的问题. 对一维映射已有一些分析结果, 例如看^[4], 但相应的结论不能简单地推广到高维多参数情况. 而双参数二维映射则是一种常见的有意义的映射系统. 下面我们对此作简要的讨论.

不妨设在分叉曲线 $\mathcal{S}^k$ 上 $|\lambda_1| = 1$ 成立, 则在 $\mathcal{S}^k$ 的两侧矩阵 Df^k/Dz 的特征值存在如下的分布状况:

- (i) $\mathcal{S}^k$ 的两侧都是 $|\lambda_2| < 1$, $|\lambda_1| < 1$.
- (ii) $\mathcal{S}^k$ 的两侧都是 $|\lambda_2| < 1$, $|\lambda_1| > 1$.
- (iii) $\mathcal{S}^k$ 的一侧是 $|\lambda_2| < 1$, $|\lambda_1| < 1$; 另一侧则是 $|\lambda_2| < 1$, $|\lambda_1| > 1$.
- (iv) $\mathcal{S}^k$ 的两侧都是 $|\lambda_2| > 1$, $|\lambda_1| < 1$.
- (v) $\mathcal{S}^k$ 的两侧都是 $|\lambda_2| > 1$, $|\lambda_1| > 1$.
- (vi) $\mathcal{S}^k$ 的一侧是 $|\lambda_2| > 1$, $|\lambda_1| < 1$; 另一侧则是 $|\lambda_2| > 1$, $|\lambda_1| > 1$.

其中情形 (i)–(iii) 对应于 $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, 情形 (iv)–(vi) 对应于 $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. 从稳定性角度而言, 情形(i)表明 $\mathcal{S}^k$ 的两侧周期 k 解都是稳定的, 情形(iii)则是一侧稳定, 一侧不稳定, 而情形(ii)、(iv)–(vi) 表明 $\mathcal{S}^k$ 的两侧周期 k 解都是不稳定的. 又, 情形(iii)、(vi) 非退化而其它情形则都是退化的. 确定上述 6 种情形各自发生的区域是困难的. 然而, 我们却可以比较容易地将 $\mathcal{S}^k$ 划分成两个部分, 在这两部分的两侧邻域分别只可能是情形 (i) + (ii) + (iii) 以及情形 (iv) + (v) + (vi), 这两部分正好分别是我们在前面已定义过的 $\mathcal{S}_+^k$ 和 $\mathcal{S}_-^k$.

对于二维映射系统, 确定 $\mathcal{S}_+^k$ 、 $\mathcal{S}_-^k$ 的(5)、(6)式, 它们的第二式分别等价于

$$\left| \det \frac{Df^k(z, \alpha)}{Dz} \right| \leq 1, \quad \left| \det \frac{Df^k(z, \alpha)}{Dz} \right| \geq 1$$

由递推关系式(10)知, 上述两不等式左端绝对号内的行列式 $r[z, \alpha]$ 为

$$\gamma([z], \alpha) = \prod_{j=1}^k \det W(z^j, \alpha)$$

其中 $[z] = \{z^l: z^{l+k} = z^l, z^{l+1} = f(z^l, \alpha)\}$. 如果 $\gamma([z], \alpha)$ 与 $[z]$ 无关, 则显然成立

$$\mathcal{S}_\beta^k = \{|\gamma(\alpha)| \leq 1\} \cap \mathcal{S}^k$$

$$\mathcal{S}_\beta^k = \{|\gamma(\alpha)| \geq 1\} \cap \mathcal{S}^k$$

而当 $\gamma([z], \alpha)$ 与 $[z]$ 有关时, 特别是在存在多个周期 k 解的情况下, 全局确定 $\mathcal{S}_\beta^k$, $\mathcal{S}_\beta^k$ 是不容易的. 设

$$\mathcal{S}_\beta^k([z]) = \{|\gamma([z], \alpha)| \leq 1\} \cap \mathcal{S}^k$$

$$\mathcal{S}_\beta^k([z]) = \{|\gamma([z], \alpha)| \geq 1\} \cap \mathcal{S}^k$$

则有

$$\mathcal{S}_\beta^k = \bigcap_{[z] \in \mathcal{B}} \mathcal{S}_\beta^k([z]) \quad (18)$$

$$\mathcal{S}_\beta^k = \bigcap_{[z] \in \mathcal{B}} \mathcal{S}_\beta^k([z]) \quad (19)$$

其中 $\mathcal{B} = \pi_2 \mathcal{A}$, π_2 是关于状态空间的投影算子.

对于(18)、(19)式的情形, 数值处理时只需对 $\mathcal{S}^k$ 上的周期 k 解验算是否成立

$$\bigcap_{[z] \in \mathcal{B}} \{|\gamma([z], \alpha)| \leq 1\} \quad \text{或} \quad \bigcap_{[z] \in \mathcal{B}} \{|\gamma([z], \alpha)| \geq 1\}$$

若结论是肯定的, 则有

$$\alpha \in \mathcal{S}_\beta^k \quad \text{或} \quad \alpha \in \mathcal{S}_\beta^k.$$

3. 迭代初值的选取

方程(11)的求解, 其收敛性的好坏, 在很大程度上依赖于迭代初值 ξ° 的选取. 在可能的情况下, 选取 ξ° 通常是选择某种参数状态 α° , 使得在这种状态下二维映射系统退化为一维映射系统. 一维映射的周期窗口构成 MSS 序列. 通过较为容易的求解, 将其周期 k 解 z° 和 α° 作为迭代求解方程(11)的初值 $\xi^\circ = (z^\circ, \alpha^\circ)^T$.

四、Hénon 映射和耦合 Logistic 映射

基于本文提供的方法, 我们建立了对二维含参映射系统普适的通用程序. 作为应用, 本节给出两个算例.

1. Hénon 映射

对于 Hénon 映射

$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= a - x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

递推关系式(10)、(14)–(16)中的几个初始量为

$$\begin{cases} f_1(z, \alpha) = a - x^2 + y \\ f_2(z, \alpha) = bx \end{cases}$$

$$W(z, \alpha) = \begin{bmatrix} -2x & 1 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$[H_{ij1}] = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [H_{ij2}] = 0$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{bmatrix}, [D_{ij1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $z = (x, y)^T$, $\alpha = (b, a)^T$, $\xi = (x, y, b)^T$.

由 $\det W(z, \alpha) = -b$, 我们得到

$$\mathcal{S}_b^1 = \{|b| \leq 1\} \cap \mathcal{S}^1$$

$$\mathcal{S}_b^2 = \{|b| \geq 1\} \cap \mathcal{S}^1$$

令(20)中 $b = 0$ 得到一维映射系统, 取其分叉点^[3]为迭代确定 Hénon 映射分叉曲线的初始值.

2. 一个耦合 Logistic 映射^[4]

对于具有如下形式的耦合 Logistic 映射

$$\begin{cases} f_1(z, \alpha) = 4\mu x(1-x) + bxy \\ f_2(z, \alpha) = 4\mu y(1-y) + bxy \end{cases} \quad (21)$$

计算给出下面的初始量

$$W(z, \alpha) = \begin{bmatrix} 4\mu(1-2x) + by & bx \\ by & 4\mu(1-2y) + bx \end{bmatrix}$$

$$[H_{ij1}] = \begin{bmatrix} -8\mu & b \\ 0 & b \end{bmatrix}, [H_{ij2}] = \begin{bmatrix} b & 0 \\ b & -8\mu \end{bmatrix}$$

其中 $z = (x, y)^T$, $\alpha = (\mu, b)^T$, $\xi = (x, y, \mu)^T$, 则有

$$G = \begin{bmatrix} 4x(1-x) & xy \\ 4y(1-y) & xy \end{bmatrix}$$

$$[D_{ij1}] = \begin{bmatrix} 4(1-2x) & 0 \\ 0 & 4(1-2y) \end{bmatrix}$$

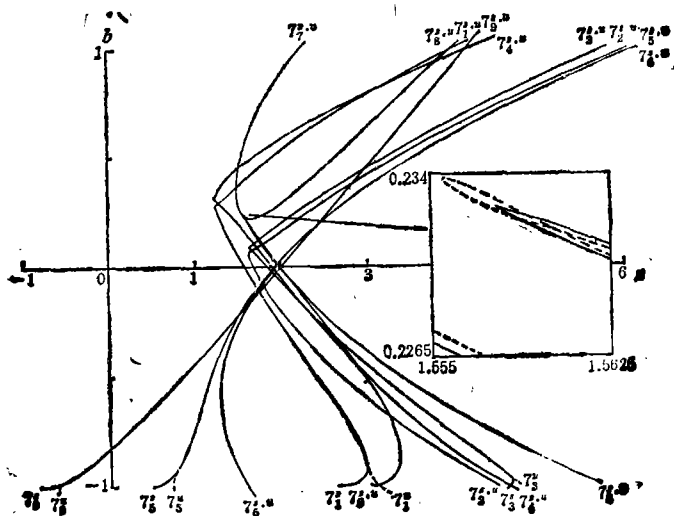


图 1 Hénon 映射周期 6 分叉曲线

同样, 令(21)中的 $b = 0$ 得到一维映射系统, 从而将其结果作为确定分叉曲线的初值。

我们实际计算了 Hénon 映射直到周期 7 解及耦合 Logistic 映射直至周期 4 解的全部分叉曲线。对于 Hénon 映射, 我们的结果不仅包含了文献中的所有结果^[1,5-7], 并且第一次完整地给出了周期 7 解的分叉曲线。周期 6 及周期 7 的分叉曲线分别由图 1、图 2 给出。图中显示出高周期分叉曲线体现的复杂性态。图 2 中给出了周期 7 分叉曲线尖点附近的细节, 在此倍周期分叉曲线打结而有自交点。周期 6 分叉曲线也有类似情况。

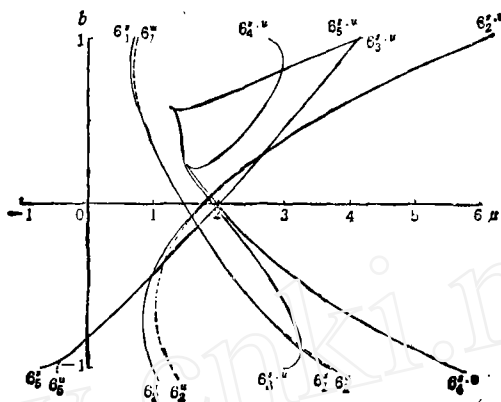


图 2 Hénon 映射周期 7 分叉曲线

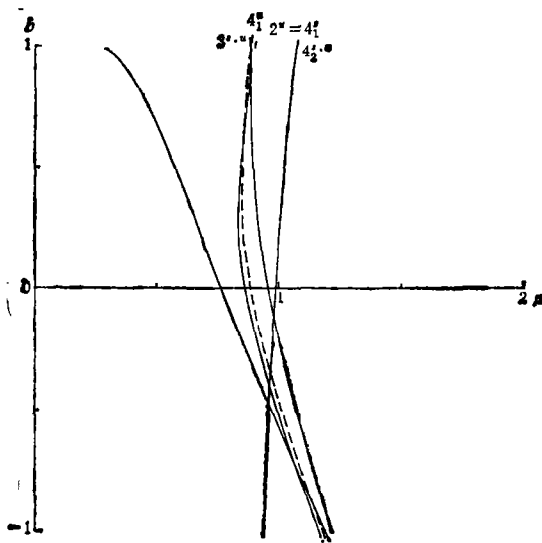


图 3 耦合 Logistic 映射周期 k 解分叉曲线

对于耦合 Logistic 映射(21), 存在两种解耦的简单情形。一是当(21)式中 $x = y$ 时得到一维双参数映射系统

$$\varphi: z \mapsto 4\mu z(1-z) + bz^2, \quad z, \mu, b \in \mathbb{R} \quad (22)$$

另一种情形则是令(21)式中的 $b = 0$ 而得到一维单参映射系统

$$\phi: z \mapsto 4\mu z(1-z), z, \mu \in \mathbb{R} \quad (23)$$

由映射系统(23)我们可以确定映射系统(21)的周期 k 解分叉曲线 $\mathcal{S}^k$ 的初值。由分叉曲线的定义知, 一维双参映射系统(22)的周期 k 解分叉曲线仅仅是(21)所确定的 $\mathcal{S}^k$ 的子曲线。我们所计算的映射系统(21)下的分叉曲线, 见图 3。

参 考 文 献

- [1] Ling, F. H., *Physics Letter*, **110A** (1985), 116—120.
- [2] 凌复华, *力学与实践*, **7**(1985), 5: 17—20.
- [3] May, Robert M., *Nature*, **261** (1976), 459—467.
- [4] Gu, Yan et al., *Physical Review Letters*, **52** (1984), 701—704.
- [5] Hamouly, H. El, and Mira, C., *C. R. A. S Paris*, **293** (1981), 525—528. **294** (1981), 387—390.
- [6] Hitzl, D. L. and Zele, F., *Physica*, **14D** (1985), 305—306.
- [7] 黄永念, *中国科学, A 辑*, (1986), 822—832.
- [8] Guckenheimer, J. and Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, (1983).

NUMERICAL CALCULATION OF THE BIFURCATION CURVES OF PARAMETRIZED TWO-DIMENSIONAL MAPS

Ling Fuhua, Bao Guangwei, Song Yingdong

(Department of Engineering Mechanics Shanghai Jiao Tong University)

Abstract A numerical method has been proposed to calculate the bifurcation curves of parametrized two-dimensional maps. Under the weakest definition of bifurcation (branching), this method is a direct extension of the idea suggested by one of the authors to general two-dimensional parametrized maps. The recursion formulas required in the calculation have been given. Moreover, the structure of k -period solution on both sides of the bifurcation curves have been discussed from the viewpoint of stability. According to some further definitions of bifurcation, we suggested a way to determine the bifurcation curves under respective criteria numerically. Two examples of the Henon map and a coupled logistic map have been treated and some new results have been obtained.

Key words parameterized map, periodic solution, bifurcation curve, shooting method.