

在均匀剪切流动中的 Stokes 波

陶 明 德 岑 韵
(复 旦 大 学)

提要 本文从 Euler 方程出发讨论在均匀剪切流动中的 Stokes 波。把未知函数和波速展开成渐近级数, 利用 Fredholm 择一定理来确定待定常数。得到了在均匀剪切流中二阶波形并研究了均匀剪切流对增水的影响。当流速为零时, 本文的结果就退化为已有的在静水中的 Stokes 波。

关键词 斯托克斯波, 均匀剪切流, Fredholm 择一定理。

1. 引言

Stokes 在 1847 年就研究了在半无限深流体中的有限振幅波, 得到了相对于小振幅波而言的高阶修正, 这种波称为 Stokes 波^[1]。[2]把未知量利用某一小参数作渐近展开, 也得到了二阶 Stokes 波。[3]利用平均变分方法求解了在非均匀的一维流动中的 Stokes 波。本文讨论流速在垂向可变的流动中的 Stokes 波, 不是从 Laplace 方程出发而是从 Euler 方程出发, 把流函数和波速都作渐近展开, 利用 Fredholm 择一定理所给出的非齐次方程可解性条件来定出待定常数, 不必消去长期项。当非均匀流速为零时, 就退化为 [2]中的结果。从所得的结果可看到非均匀流速对 Stokes 波的影响。

2. 方程

我们来考察图 1 中的二维波动, 底部水平且位于 $y = -h$ 处。除了非均匀流速 $u_0(y)$ 外, 还有扰动速度 $V(u, v)$ 。设流体的密度为 ρ , 总压力为 P , 自由面方程为 $y = \eta(x, t)$ 。我们假设带有“,”号的量为有量纲量, k 为波数, A 为波幅, h 为水深, 则无量纲量为

$$\begin{aligned} x &= kx', \quad y = y'/h, \quad \eta = \eta'/A, \quad t = k\sqrt{gh}t', \quad p = \\ & p' / \left(\frac{A}{h} \cdot \rho gh \right), \quad u_0 = u'_0 / \sqrt{gh}, \quad c = c' / \sqrt{gh}, \quad \phi = \phi' / \\ & \sqrt{gh} \cdot \frac{A}{h} \cdot h \end{aligned}$$

则 $\phi, p (= P + \rho gy)$ 和 η 所满足的无量纲方程为

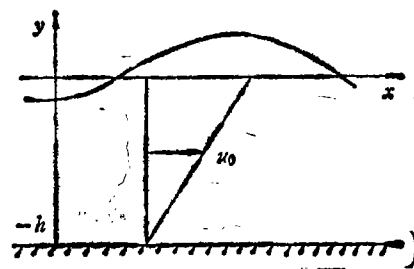


图 1

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \phi) + (u_0 - \varepsilon \phi_y) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) \\ + \varepsilon \phi_x \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \phi) - u'_0 \phi_x = 0 \end{aligned} \right\}$$

本文于 1988 年 5 月 26 日收到, 1988 年 12 月 26 日收到修改稿。

$$\left. \begin{aligned} p + \varepsilon \eta \partial p / \partial y + \cdots &= \eta \quad (y = 0) \\ \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - (u_0 - \varepsilon \psi_y) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] + \varepsilon \eta \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \\ &+ \cdots = 0 \quad (y = 0) \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0 \quad (y = -1) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $\nabla_1^2 = \mu^2 \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$, 这里的无量纲参数 $\varepsilon = A/h$, $\mu = kh$. (1) 就是我们所要讨论的定解问题.

我们把各未知函数展成关于小参数 ε 的渐近级数

$$\{\psi, \eta, p\} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \{\psi_{\alpha}, \eta_{\alpha}, p_{\alpha}\} \varepsilon^{\alpha}$$

而 $\psi_{\alpha} = \psi_{\alpha}(\theta, y)$, $p_{\alpha} = p_{\alpha}(\theta, y)$, $\eta_{\alpha} = \eta_{\alpha}(\theta)$, 其中 $\theta = x - ct$. 再把 c 也关于 ε 作渐近展开

$$c = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \cdots$$

将上面的各渐近展开式代入(1), 可得一系列递推方程. 对应于 ε^0 , 我们有

$$(u_0 - c_0)(\mu^2 \psi_{0,111} + \psi_{0,122}) - u_0' \psi_{0,1} = 0 \quad (2)$$

$$p_0 = \eta_0 \quad (y = 0) \quad (3)$$

$$\psi_{0,1} + c_0 \eta_{0,1} - u_0 \eta_{0,1} = 0 \quad (y = 0) \quad (4)$$

$$\psi_{0,1} = 0 \quad (y = -1) \quad (5)$$

由 x 方向的动量方程还可得到

$$(c_0 - u_0) \psi_{0,12} + u_0' \psi_{0,1} + p_{0,1} = 0 \quad (6)$$

我们约定 $\psi_{0,1}$ 和 $\psi_{1,2}$ 分别表示 ψ_0 对 θ 和 ψ_1 对 y 的偏导数, 这约定可依此类推. 我们可从(2)–(6)求 ψ_0 , p_0 , η_0 和 c_0 , 用同样方法可求高阶未知量.

3. 求解

我们假定基本流动的无量纲速度为 $u_0 = u_s(1 + y)$, 这是一种均匀剪切流动. 其次假设 $\psi_0 = \psi_{01}(y) \cos \theta$, 则由(2)可得

$$L\psi_{01} \equiv \psi_{01}'' - \mu^2 \psi_{01} = 0 \quad (7a)$$

由(3)–(6)可得

$$M\psi_{01} \equiv (c_0 - u_0)[(c_0 - u_0)\psi_{01}' + u_s \psi_{01}] - \psi_{01} = 0 \quad (y = 0) \quad (7b)$$

$$\psi_{01} = 0 \quad (y = -1) \quad (7c)$$

L 和 M 是两个线性算子. 由(7)可得

$$\psi_{01} = N \operatorname{sh} \mu(y + 1) \text{ 或 } \psi_0 = N \operatorname{sh} \mu(y + 1) \cos \theta \quad (8a)$$

以及

$$(c_0 - u_s)^2 \mu \operatorname{ch} \mu + (c_0 - u_s) u_s \operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu = 0 \quad (8b)$$

当 $u_s = 0$ 时, (8b) 就为静水中小振幅波的色散关系式.

再来求下一阶修正, ψ_1 应满足

$$\mu^2 \psi_{1,111} + \psi_{1,122} = 0 \quad (9)$$

$$(c_0 - u_0)[(c_0 - u_0)\phi_{1,12} + u_0'\phi_{1,1}] - \phi_{1,1} = \alpha \sin \theta + \beta \sin 2\theta \quad (10)$$

$$(y = 0)$$

其中

$$\alpha = c_1 N \left[(c_0 - u_1) \mu \operatorname{ch} \mu - \frac{\operatorname{sh} \mu}{u_1 - c_0} \right]$$

$$\beta = N^2 \left[-\frac{1}{2} \mu u_1 \operatorname{sh} \mu \operatorname{ch} \mu - \frac{\mu \operatorname{sh} \mu \operatorname{ch} \mu}{u_1 - c_0} + \frac{c_0 - u_1}{2} \mu^2 (\operatorname{ch}^2 \mu - 3 \operatorname{sh}^2 \mu) \right]$$

$$\phi_{1,1} = 0 \quad (y = -1) \quad (11)$$

根据(10)可设

$$\phi_1 = \phi_{11}(y) \cos \theta + \phi_{12}(y) \cos 2\theta \quad (12)$$

上式中的第二项是由非线性效应引起的二次谐波。 ϕ_{11} 和 ϕ_{12} 应分别满足

$$\mathcal{L}\phi_{11} = 0 \quad (13a)$$

$$\phi_{12}' - 4\mu^2 \phi_{12} = 0 \quad (14a)$$

$$M\phi_{11} = -\alpha \quad (13b)$$

$$M\phi_{12} = -\beta/2 \quad (14b)$$

$$\phi_{11} = 0 \quad (13c)$$

$$\phi_{12} = 0 \quad (14c)$$

显见,(7)恰为非齐次问题(13)所对应的齐次问题,因此根据 Fredholm 择一定理可知为使(13)有非零解 ϕ_{11} , 必须要满足一个可解性条件^[4]

$$\alpha \cdot \phi_{10}|_{y=0} = 0 \quad \text{即} \quad \alpha = 0 \quad (15)$$

根据 α 的表达式可知,唯一的可能是

$$c_1 = 0 \quad (16)$$

在得到(15)时,包含 ϕ_{11} 的项自然消失. 因此在求得(16)时不必知道 ϕ_{11} 的具体形式. 但是在[2]中,即使只讨论静水中的波动问题,在求得 $c_1 = 0$ 时必须要知道下一阶的速度势的具体表达式.

我们再来求 ϕ_{12} , 由(14a,c)可得

$$\phi_{12} = B \operatorname{sh} 2\mu(y+1)$$

由(14b)得

$$B = - \frac{\left[-\frac{u_1}{2} \mu \operatorname{sh} \mu \operatorname{ch} \mu - \frac{\mu \operatorname{sh} \mu \operatorname{ch} \mu}{u_1 - c_0} + \frac{c_0 - u_1}{2} \mu^2 (\operatorname{ch}^2 \mu - 3 \operatorname{sh}^2 \mu) \right]}{2\{(c_0 - u_1)[(c_0 - u_1)2\mu \operatorname{ch} 2\mu + u_1 \operatorname{sh} 2\mu] - \operatorname{sh} 2\mu\}} \cdot N^2$$

以后记 $R = B/N^2$. 最后可得 ϕ_1 中的二阶项为

$$\phi_1 = RN^2 \operatorname{sh} 2\mu(y+1) \cos 2\theta \quad (17)$$

按[2]的做法,要求 η_1 在一个波长内的平均值为零,则有

$$\eta_1 = N^2 \operatorname{sh} 2\mu \left[\frac{\mu}{4} \frac{1}{(u_1 - c_0)^2} - \frac{R}{c_0 - u_1} \right] \cos 2\theta \quad (18)$$

4. 结果

由(8b)和(16)可得无量纲波速为

$$c = c_0 = u_1 - \frac{u_1}{2} \tilde{c}^2 \pm \sqrt{\left(\frac{u_1}{2}\right)^2 \tilde{c}^2 + \tilde{c}^2} \quad (19)$$

其中 $\bar{c} = \sqrt{gh/\mu}$ 为静水中小振幅波的无量纲波速。当 $u_s = 0$ 时, c 就退化为 $\bar{c}$ 。从上式可见, 顺流和逆流传播的波速是不相等的。

其次我们来考察波形, 有量纲波形为

$$\eta' = A \frac{N \operatorname{sh} \mu}{u_s - c_0} \cos \theta + \frac{A^2}{h} N^2 \operatorname{sh} 2\mu \left[\frac{\mu}{4(c_0 - u_s)^2} - \frac{R}{c_0 - u_s} \right] \cos 2\theta$$

波高 $H = 2A$, 另外取 $N = (u_s - c_0)/\operatorname{sh} \mu$, 则二阶 Stokes 波波形为

$$\eta' = \frac{H}{2} \cos \theta + \left(\frac{H}{2} \right)^2 \frac{(c_0 - u_s)^2 k \operatorname{sh} 2\mu}{\operatorname{sh}^2 \mu} \times \left[\frac{1}{4(c_0 - u_s)^2} - \frac{R}{\mu(c_0 - u_s)} \right] \cos 2\theta \quad (20)$$

当 $u_s = 0$ 时, 相应地 $c_0 = \bar{c}$, 则上式就是静水中的二阶 Stokes 波波形^[2]。(19)和(20)给出了在均匀剪切流动中二阶 Stokes 波的主要结果。

利用上述结果可以考察均匀剪切流动对 Stokes 波的影响。例如利用(20)我们来考察均匀剪切流动对增水(平均自由面相对于静止水面的增高量)的影响。存在均匀剪切流动时的增水为(20)第二项的系数之值, 在该系数中置 $u_s = 0$ 和 $c_0 = \bar{c}$ 就得到了在静水中的增水。设前者对后者的比为 ξ , ξ 随 u_s 的变化如图 2 所示。当波顺流传播时, u_s 越大, 则 ξ 也越大, 加强了增水效应; 当波逆流传播时, 情况就相反。

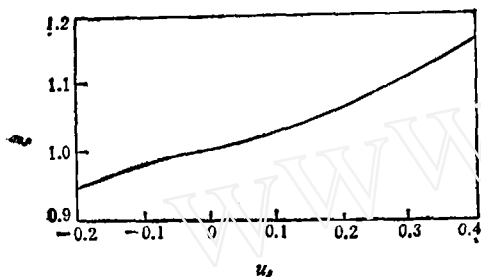


图 2

参 考 文 献

- [1] 易家训, 流体力学, 章克本等译, 高等教育出版社(1982), 149—151.
- [2] 薛鸿超等, 海岸动力学, 人民交通出版社(1980), 74—79.
- [3] Whitham, G. B., Linear and Nonlinear Waves, Wiley-Interscience Publication (1974), 471—476 and 564—565.
- [4] 梅强中, 水波动力学, 戴世强, 周显初整理, 科学出版社(1984), 57.

STOKES WAVES IN UNIFORM SHEAR FLOW

Tao Mingde, Cen Yun

(Fudan University)

Abstract In this paper, we discuss the Stokes waves in uniform shear flow from the Euler equations. The unknown functions and the wave velocity are expanded as asymptotic series, and an undetermined constant is determined using Fredholm's theorem. The 2nd-order shapes of the free surface in uniform shear flow and the effect of uniform shear flow on set-up is studied. When the flow velocity is equal to zero, the results in this paper degenerate to the Stokes waves which have already been obtained in rest water.

Key words Stokes waves, uniform shear flow, Fredholm's alternative theorem