

结构动力分析的高精度 ρ 法¹⁾

谢 闯 生
(华侨大学土木系)

摘要 本文提出了计算结构动力方程的4次,五次精度的无条件稳定积分格式的 ρ 法。 ρ 法具有良好的算法阻尼特性和周期延长率。没有超越现象。和以往的高精度方法相比, ρ 法具有存贮空间小,计算量少的优点。 ρ 法的无条件稳定性的证明,可不要求阻尼矩阵满足振型正交条件。

关键词 算法阻尼,周期延长率,无条件稳定

一、前 言

直接积分法从稳定的角度分,可分为无条件稳定和条件稳定两大类。由于条件稳定积分格式的步长要小于临界步长,故条件稳定的积分格式在运用中受到了很大的限制,而无条件稳定积分格式在选择步长时,不受临界步长的限制,所以无条件稳定积分格式在工程中得到广泛的运用。如 Wilson- θ 法等。但需要指出,以往无条件稳定积分格式的证明均假定阻尼为古典阻尼,即阻尼矩阵满足振型正交条件^[1-2]。当阻尼矩阵不满足振型正交条件时,以往的无条件稳定积分格式是否是无条件稳定的,未给出证明。

从精度上分,直接积分法可分为两大类:二次精度的方法和二次以上精度的高精度方法。以往提出的高精度方法,如 Hilber^[4] 指出的需要求解一个比二次精度大的多的隐式方程;和需要比二次精度大两倍或两倍以上的时间空间和计算量。正是由于以上原因,限制了高精度方法的运用,在工程中运用较多的通常是二次精度的方法。

本文提出的高精度 ρ 法,不仅对古典阻尼而且对非古典阻尼均是无条件稳定的。 ρ 法所需的存贮空间与二次精度方法大体相等。对非线性问题时,每步积分通常仅需计算一个与二次精度相等的隐式方程,计算量与二次精度方法大致相当。对线性问题, ρ 法每步积分所需的计算量大于二次精度的方法,但运算时间的延长可由适当放大时间步长得到补偿。

二、精度和稳定性的讨论

n 个自由度的结构动力方程为

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{R\} \quad (1)$$

其中 $[M]$, $[C]$ 和 $[K]$ 分别为结构的质量,阻尼和刚度矩阵。 $\{\ddot{u}\}$, $\{\dot{u}\}$, $\{u\}$ 分别为结构

本文于1987年4月22日收到第一次稿,于1987年12月6日收到修改稿。

1) 本文是在麦淑良教授的帮助下完成的。

的加速度,速度和位移向量。{R}是外荷载向量。(1)式可写成一阶常微分方程组的形式

$$[A]\{\dot{z}\} + [B]\{z\} = \{Y\} \quad (2)$$

其中[A]和[B]是 $2n \times 2n$ 的矩阵

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix}$$

{Z}和{Y}是 $2n$ 个元素的向量

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{u\} \end{Bmatrix}, \quad \{Y\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{R\} \end{Bmatrix}$$

设方程(2)的齐次解为 $\{Z\} = \{\phi\}e^{st}$ 代入方程(2),令 $\{Y\} = 0$,得

$$S[A]\{\phi\} + [B]\{\phi\} = 0 \quad (3)$$

文献[5-6]

$$\{\phi_i\} = \begin{Bmatrix} S_i \{\phi_i\} \\ \{\phi_i\} \end{Bmatrix}, \quad S_i = -\xi_i \omega_i \pm i \omega_{Di}$$

$$\omega_i = |S_i|, \quad \xi_i = -\operatorname{Re}(S_i)/|S_i| \quad \text{和} \quad \omega_{Di} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$$

设 $\{\phi_i\}$, $\{\phi_j\}$ 分别为(3)式的第 i 个和第 j 个振型向量,由(3)式有

$$S_i[A]\{\phi_i\} + [B]\{\phi_i\} = 0$$

$$S_j[A]\{\phi_j\} + [B]\{\phi_j\} = 0$$

用 $\{\phi_j\}^T$, $\{\phi_i\}^T$ 分别乘上述两式

$$S_j \{\phi_j\}^T [A] \{\phi_i\} + \{\phi_j\}^T [B] \{\phi_i\} = 0 \quad (4)$$

$$S_i \{\phi_i\}^T [A] \{\phi_j\} + \{\phi_i\}^T [B] \{\phi_j\} = 0 \quad (5)$$

由于[K],[M]和[C]是对称方阵([C]不必满足振型正交条件),则(4)式转置后可写成

$$S_i \{\phi_i\}^T [A] \{\phi_j\} + \{\phi_i\}^T [B] \{\phi_j\} = 0 \quad (6)$$

(5)式和(6)式相减,由于 $(S_j - S_i) \neq 0$,故

$$\{\phi_i\}^T [A] \{\phi_j\} = 0$$

$$\{\phi_i\}^T [B] \{\phi_j\} = 0$$

当 $i = j$ 时

$$S_i = -\frac{\{\phi_i\}^T [B] \{\phi_i\}}{\{\phi_i\}^T [A] \{\phi_i\}} = -\frac{B_i}{A_i} \quad (7)$$

设振型坐标 $\{Z\} = [\phi]\{z\}$ 代入(2)式,由正交条件可得 $2n$ 个非耦合的动平衡方程

$$A_i \dot{z}_i + B_i z_i = \{\phi_i\}^T \{Y\} \quad i = 1, 2, \dots, 2n \quad (8)$$

由(7),(8)式又可写成

$$\dot{z}_i = S_i z_i + \{\phi_i\}^T \{Y\} / A_i \quad (9)$$

此时对(9)式的 $2n$ 个方程用相同的积分格式和相同的步长进行直接积分,那么这完全等价于对(1)式用同样的积分格式和相同步长进行直接积分,于是把对(1)式的精度和稳定性的讨论,转化为对(9)式精度和稳定性的讨论。由于(9)式中 $2n$ 个方程是类似的,故只需研究其中一个典型方程。

当 $t = t_j$ 时, (9) 式有

$$z_i(t_j + \Delta t) = z_i(t_j) + \int_{t_j}^{t_j + \Delta t} (S_i z_i(\tau) + \{\hat{\phi}_i\}^T \{Y(\tau)\} / A_i) d\tau \quad (10)$$

(11) 式为 (10) 式的近似公式加上局部截断误差 R_{j+1}

$$z_i(t_j + \Delta t) = z_i(t_j) + v_1 D_{i1}(t_j) + \gamma_2 D_{i2}(t_j) + v_3 D_{i3}(t_j) + R_{j+1} \quad (11)$$

$$D_{i1}(t_j) = S_i \Delta t (z_i(t_j) + \rho D_{i1}(t_j)) + \{\hat{\phi}_i\}^T \{Y(t_j + \alpha_1 \Delta t)\} \Delta t / A_i \quad (12)$$

$$D_{i2}(t_j) = S_i \Delta t (z_i(t_j) + \rho_{21} D_{i1}(t_j) + \rho D_{i2}(t_j)) + \{\hat{\phi}_i\}^T \{Y(t_j + \alpha_2 \Delta t)\} \Delta t / A_i \quad (13)$$

$$D_{i3}(t_j) = S_i \Delta t (z_i(t_j) + \rho_{31} D_{i1}(t_j) + \rho_{32} D_{i2}(t_j) + \rho D_{i3}(t_j)) + \{\hat{\phi}_i\}^T \{Y(t_j + \alpha_3 \Delta t)\} \Delta t / A_i \quad (14)$$

把整理后的 $D_{i1}(t_j)$, $D_{i2}(t_j)$ 和 $D_{i3}(t_j)$ 代入 (11) 式, 并与 (10) 式相减, 整理得

$$\begin{aligned} (1 - S_i \Delta t \rho)^3 R_{j+1} &= \int_{t_j}^{t_j + \Delta t} (1 - S_i \Delta t \rho)^3 (S_i z_i(\tau) + \{\hat{\phi}_i\}^T \{Y(\tau)\} / A_i) d\tau \\ &- \Delta t (1 - S_i \Delta t \rho)^3 \cdot ((\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) S_i z_i(t_j) + \gamma_1 \{\hat{\phi}_i\}^T \{Y(t_j + \alpha_1 \Delta t)\} / A_i \\ &+ \gamma_2 \{\hat{\phi}_i\}^T \{Y(t_j + \alpha_2 \Delta t)\} / A_i + \gamma_3 \{\hat{\phi}_i\}^T \{Y(t_j + \alpha_3 \Delta t)\} / A_i) \\ &- \Delta t^2 (1 - S_i \Delta t \rho) ((\gamma_2 \rho_{21} + \gamma_3 \rho_{31} + \gamma_3 \rho_{32}) S_i^2 z_i(t_j) \\ &+ (\gamma_2 \rho_{21} + \gamma_3 \rho_{31}) \{\hat{\phi}_i\}^T \{Y(t_j + \alpha_1 \Delta t)\} S_i / A_i + \gamma_2 \rho_{22} \{\hat{\phi}_i\}^T \{Y(t_j + \alpha_2 \Delta t)\} S_i / A_i \\ &- \gamma_3 S_i^2 \Delta t^3 \rho_{32} \rho_{21} (S_i z_i(t_j) + \{\hat{\phi}_i\}^T \{Y(t_j + \alpha_1 \Delta t)\} / A_i) \end{aligned} \quad (15)$$

把积分号里的函数在 t_j 处展开为

$$\begin{aligned} S_i z(\tau) + \{\hat{\phi}_i\}^T \{Y(\tau)\} / A_i &= S_i (z(t_j) + \dot{z}(t_j) \Delta \tau + \ddot{z}(t_j) \Delta \tau^2 / 2 + \ddot{Z}(t_j) \Delta \tau^3 / 6 \\ &+ o(\Delta \tau^4)) + \{\hat{\phi}_i\}^T (\{Y(t_j) + \dot{Y}(t_j) \Delta \tau + \ddot{Y}(t_j) \Delta \tau^2 / 2 + \ddot{Y}(t_j) \Delta \tau^3 / 6 \\ &+ o(\Delta \tau^4)\}) / A_i \end{aligned}$$

把 $\{Y(t_j + \alpha_k \Delta t)\}$ $K = 1, 2$ 在 t_j 处展开为

$$\begin{aligned} \{Y(t_j + \alpha_k \Delta t)\} &= \{Y(t_j) + \alpha_k \Delta t \dot{Y}(t_j) + (\alpha_k \Delta t)^2 \ddot{Y}(t_j) / 2 \\ &+ (\alpha_k \Delta t)^3 \ddot{Y} / 6 + o(\Delta t^4)\} \end{aligned}$$

代入 (15) 式, 当系数满足下述关系

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 &= 1 & \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3 &= \frac{1}{2} \\ \gamma_1 \alpha_1^2 + \gamma_2 \alpha_2^2 + \gamma_3 \alpha_3^2 &= \frac{1}{3} & \gamma_1 \alpha_1^3 + \gamma_2 \alpha_2^3 + \gamma_3 \alpha_3^3 &= \frac{1}{4} \\ \gamma_3 \rho_{32} \rho_{21} &= \frac{1}{6} - \rho + \rho^2 & (\gamma_2 \rho_{21} + \gamma_3 \rho_{31}) \alpha_1^2 + \gamma_3 \rho_{32} \alpha_2^2 &= \frac{1}{12} - \rho / 3 \\ \gamma_3 \rho_{32} \rho_{21} \alpha_1 &= \frac{1}{24} - \rho / 3 + \rho^2 / 2 & (\gamma_2 \rho_{21} + \gamma_3 \rho_{31}) \alpha_1 + \gamma_3 \rho_{32} \alpha_2 &= \frac{1}{6} - \rho / 2 \\ \gamma_2 \rho_{21} + \gamma_3 \rho_{31} + \gamma_3 \rho_{32} &= \frac{1}{2} - \rho & \rho^3 - \frac{3}{2} \rho^2 + \frac{1}{2} \rho - \frac{1}{24} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

局部截断误差为

$$R_{j+1} = o(\Delta t^4) / (1 - S_i \Delta t \rho)^3$$

即当系数满足上述关系时, 该方法为四次精度。由系数关系可求得

$$\rho_1 = 1.0685679 \quad \rho_2 = 0.3025346 \quad \rho_3 = 0.1288864$$

其它系数见表1. 由于 α_k 项($k=1, 2, 3$)不是整数, 当外荷载不是函数表达式时, 荷载项难以计算, 可由(17)式近似

$$\{Y(t_j + \alpha_k \Delta t)\} = \{Y(t_j)\} + \alpha_k \{f_k\{Y(t_j + 3\Delta t)\} + B_k\{Y(t_j + 2\Delta t)\} + C_k\{Y(t_j + \Delta t)\} + l_k\{Y(t_j)\} + o(\Delta t^4)\} \quad k=1, 2, 3 \quad (17)$$

$$f_k = \frac{(\alpha_k - 1)(\alpha_k - 2)}{6}, \quad B_k = \frac{(\alpha_k - 1)(3 - \alpha_k)}{2}$$

$$C_k = \frac{2 - (\alpha_k - 1)(4 - \alpha_k)}{2}, \quad l_k = 1 - f_k - B_k - C_k$$

用(17)式近似不会改变该方法的精度. 与四次精度相同, 令(10)式的近似公式(18)加上局部截断误差为

$$z_i(t_j + \Delta t) = z_i(t_j) + \gamma_1 D_{i1}(t_j) + \gamma_2 D_{i2}(t_j) + \gamma_3 D_{i3}(t_j) + \gamma_4 D_{i4}(t_j) + R_{j+1} \quad (18)$$

$$D_{i1}(t_j) = S_j \Delta t (z_i(t_j) + \rho D_{i1}(t_j)) + \{\hat{\phi}_i\}^T \{Y(t_j + \alpha_1 \Delta t)\} \Delta t / A_i \quad (19)$$

$$D_{i2}(t_j) = S_j \Delta t (z_i(t_j) + \rho_{21} D_{i1}(t_j) + \rho D_{i2}(t_j)) + \{\hat{\phi}_i\}^T \{Y(t_j + \alpha_2 \Delta t)\} \Delta t / A_i \quad (20)$$

$$D_{i3}(t_j) = S_j \Delta t (z_i(t_j) + \rho_{31} D_{i1}(t_j) + \rho_{32} D_{i2}(t_j) + \rho D_{i3}(t_j)) + \{\hat{\phi}_i\}^T \{Y(t_j + \alpha_3 \Delta t)\} \Delta t / A_i \quad (21)$$

$$D_{i4}(t_j) = S_j \Delta t (z_i(t_j) + \rho_{41} D_{i1}(t_j) + \rho_{42} D_{i2}(t_j) + \rho_{43} D_{i3}(t_j) + \rho D_{i4}(t_j)) + \{\hat{\phi}_i\}^T \{Y(t_j + \alpha_4 \Delta t)\} \Delta t / A_i \quad (22)$$

用同四次精度的方式, 当系数满足下述关系,

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 &= 1 & \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3 + \gamma_4 \alpha_4 &= \frac{1}{2} \\ \gamma_1 \alpha_1^2 + \gamma_2 \alpha_2^2 + \gamma_3 \alpha_3^2 + \gamma_4 \alpha_4^2 &= \frac{1}{3} & \gamma_1 \alpha_1^3 + \gamma_2 \alpha_2^3 + \gamma_3 \alpha_3^3 + \gamma_4 \alpha_4^3 &= \frac{1}{4} \\ \gamma_1 \alpha_1^4 + \gamma_2 \alpha_2^4 + \gamma_3 \alpha_3^4 + \gamma_4 \alpha_4^4 &= \frac{1}{5} & B^4 - 2B^3 + B^2 - B/6 + \frac{1}{120} &= 0 \\ \gamma_2 \rho_{21} + \gamma_3 \rho_{31} + \gamma_3 \rho_{32} + \gamma_4 \rho_{41} + \gamma_4 \rho_{42} + \gamma_4 \rho_{43} &= \frac{1}{2} - \rho \end{aligned} \quad (23)$$

$$\alpha_1 (\gamma_2 \rho_{21} + \gamma_3 \rho_{31} + \gamma_4 \rho_{41}) + (\gamma_3 \rho_{32} + \gamma_4 \rho_{42}) \alpha_2 + \gamma_4 \rho_{43} \alpha_3 = \frac{1}{6} - \rho/2$$

$$\alpha_1^2 (\gamma_2 \rho_{21} + \gamma_3 \rho_{31} + \gamma_4 \rho_{41}) + (\gamma_3 \rho_{32} + \gamma_4 \rho_{42}) \alpha_2^2 + \gamma_4 \rho_{43} \alpha_3^2 = \frac{1}{12} - \rho/3$$

$$\alpha_1^3 (\gamma_2 \rho_{21} + \gamma_3 \rho_{31} + \gamma_4 \rho_{41}) + (\gamma_3 \rho_{32} + \gamma_4 \rho_{42}) \alpha_2^3 + \gamma_4 \rho_{43} \alpha_3^3 = \frac{1}{20} - \rho/4$$

$$(\gamma_3 \rho_{32} \rho_{21} + \gamma_4 (\rho_{42} \rho_{21} + \rho_{43} \rho_{31})) + \gamma_4 \rho_{43} \rho_{32} = \frac{1}{6} - \rho + \rho^2$$

$$\alpha_1 (\gamma_3 \rho_{32} \rho_{21} + \gamma_4 (\rho_{42} \rho_{21} + \rho_{43} \rho_{31})) + \gamma_4 \rho_{43} \rho_{32} \alpha_2 = \frac{1}{24} - \rho/3 + \rho^2/2$$

$$\alpha_1^2 (\gamma_3 \rho_{32} \rho_{21} + \gamma_4 (\rho_{42} \rho_{21} + \rho_{43} \rho_{31})) + \gamma_4 \rho_{43} \rho_{32} \alpha_2^2 = \frac{1}{60} - \rho/6 + \rho^2/3$$

$$\gamma_4 \rho_{43} \rho_{32} \rho_{21} \alpha_1 = \frac{1}{120} - \rho/8 + \rho^2/2 - \rho^3/2$$

表 1 四次精度 ρ 法的积分步骤

A. 初始计算

1. 形成质量矩阵 $[M]$, 阻尼矩阵 $[C]$ 及刚度矩阵 $[K]$ 2. 选择时间步长 Δt , 及计算积分常数:

$$\rho = \alpha_1 = 1.0685679$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_3 = 1 - \rho$$

$$\rho_{31} = \frac{1}{2} - \rho$$

$$\rho_{31} = 2\rho$$

$$\rho_{32} = 1 - 4\rho$$

$$r_1 = r_3 = 1/(6(2\rho - 1)^2)$$

$$r_2 = 1 - 1/(3(2\rho - 1)^2)$$

$$d_1 = \Delta t \rho$$

$$d_2 = d_1^2$$

$$d_3 = \Delta t d_1$$

$$f_k = \frac{(\alpha_k - 1)(\alpha_k - 2)}{6}$$

$$c_k = \frac{2 - (\alpha_k - 1)(4 - \alpha_k)}{2}$$

$$B_k = \frac{(\alpha_k - 1)(3 - \alpha_k)}{2}$$

$$l_k = 1 - (f_k + B_k + C_k)$$

3. 计算等效刚度

$$[\hat{K}] = [M] + d_1[C] + d_2[K]$$

4. 对 $[\hat{K}]$ 进行三角分解

$$[\hat{K}] = [L][D][L]^T$$

B. 对每一时间步长

1. $\{F\}_j = \{\hat{u}\}_j$, $\{FF\}_j = \{u\}_j$ 2. 循环 $i = 1, 2, 3$ 计算在 $t_j + \Delta t$ 的等效荷载

$$\{\hat{R}\}_j = \{R(t_j)\}\Delta t + \alpha_1(f_1\{R(t_j + 3\Delta t)\}) + E_1\{R(t_j + 2\Delta t)\} + C_1\{R(t_j + \Delta t)\} + l_1\{R(t_j)\}\Delta t - [C]\{F\}_j - [K](\Delta t\{FF\}_j + d_1\{F\}_j)$$

求解在 $t = t_j$ 处的 $\{\bar{D}\}_j$,

$$[L][D][L]^T \{\bar{D}\}_j = \{\hat{R}\}_j$$

$$\{\bar{D}\}_j = \Delta t\{F\}_j + d_1\{\bar{D}\}_j$$

为下次循环做变换

$$\{F\}_j = \{\hat{u}\}_j + \sum_{k=1}^i \rho_{k+1,k} \{\bar{D}\}_k$$

$$\{FF\}_j = \{u\}_j + \sum_{k=1}^i \rho_{k+1,k} \{\bar{D}\}_k$$

3. 计算 $t = t_j + \Delta t$ 处的速度, 位移

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{u\} \end{Bmatrix}_{j+1} = \begin{Bmatrix} \{\dot{u}\} \\ \{u\} \end{Bmatrix}_j + v_1 \begin{Bmatrix} \{\bar{D}\}_j \\ \{\bar{D}\}_j \end{Bmatrix} + v_2 \begin{Bmatrix} \{\bar{D}\}_j \\ \{\bar{D}\}_j \end{Bmatrix} + v_3 \begin{Bmatrix} \{\bar{D}\}_j \\ \{\bar{D}\}_j \end{Bmatrix}$$

局部截断误差为

$$R_{j+1} = o(\Delta t^6)/(1 - S_j \Delta t \rho)$$

即当系数满足 (23) 式时, 该方法为五次精度. 由系数关系式可得

$$\rho_1 = 1.3453664$$

$$\rho_2 = 0.3888576$$

$$\rho_3 = 0.1744841$$

$$\rho_4 = 0.0912917$$

其它系数见附录 1.

在讨论近似公式稳定性时, 可令 $\{Y\} = 0$. 由近似公式 (11), (18) 和关系式 (16), (23) 可得 (为了书写方便, 略去下标.)

四次精度的 ρ 法为

$$z_{j+1} = \left(\frac{1 + (-3\rho + 1)S\Delta t + \left(3\rho^2 - 3\rho + \frac{1}{2}\right)(S\Delta t)^2}{1 - 3\rho S\Delta t + 3(\rho S\Delta t)^2} \right. \\ \left. + \frac{\left(\frac{1}{6} - \frac{3}{2}\rho + 3\rho^2 - \rho^3\right)(S\Delta t)^3}{-(\rho S\Delta t)^3} \right) z_j \quad (24)$$

五次精度的 ρ 法为

$$z_{j+1} = \left(\frac{1 + (-4\rho + 1)S\Delta t + \left(6\rho^2 - 4\rho + \frac{1}{2}\right)(S\Delta t)^2 + \left(-4\rho^3 + 6\rho^2 - 2\rho + \frac{1}{6}\right)(S\Delta t)^3}{1 - 4\rho S\Delta t + 6(\rho S\Delta t)^2 - 4(\rho S\Delta t)^3} \right. \\ \left. + \frac{\left(\rho^4 - 4\rho^3 + 3\rho^2 - \frac{2}{3}\rho + \frac{1}{24}\right)(S\Delta t)^4}{+(\rho S\Delta t)^4} \right) z_j \quad (25)$$

(24) 式和 (25) 式的特征值分别为

$$\lambda_{1,2} = \left(\frac{1 + (-3\rho + 1)S\Delta t + \left(3\rho^2 - 3\rho + \frac{1}{2}\right)(S\Delta t)^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{2}\rho + 3\rho^2 - \rho^3\right)(S\Delta t)^3}{1 - 3\rho S\Delta t + 3(\rho S\Delta t)^2 - (\rho S\Delta t)^3} \right) \\ - A \pm Bi \quad (26)$$

$$\lambda_{1,2} = \left(\frac{1 + (-4\rho + 1)S\Delta t + \left(6\rho^2 - 4\rho + \frac{1}{2}\right)(S\Delta t)^2 + \left(-4\rho^3 + 6\rho^2 - 2\rho + \frac{1}{6}\right)(S\Delta t)^3}{1 - 4\rho S\Delta t + 6(\rho S\Delta t)^2 - 4(\rho S\Delta t)^3} \right. \\ \left. + \frac{\left(\rho^4 - 4\rho^3 + 3\rho^2 - \frac{2}{3}\rho + \frac{1}{24}\right)(S\Delta t)^4}{+(\rho S\Delta t)^4} \right) - A \pm Bi \quad (27)$$

由文献 [7], 要使积分格式 (24), (25) 为无条件稳定, 必须使特征值满足 (28) 式

$$\max |\lambda_i| \leq 1 \quad i = 1, 2 \quad (28)$$

图 1 表明, 对四次精度的 ρ 法仅当 $\rho_1 = 1.0685679$ 时, 特征值满足 (28) 式, 当 $\xi \approx 0$ 时, 特征值小于 $\xi = 0.0$ 时的情况。这表明仅 $\rho_1 = 1.0685679$ 时, 该法为无条件稳定。

图 2 表明, 对五次精度的 ρ 法, 仅当 $\rho_1 = 1.3453664$ 时, 特征值满足 (28) 式, 当 $\xi \approx 0$ 时, 特征值小于 $\xi = 0$ 时的情况。这表明仅 $\rho_1 = 1.3453664$ 时, 该法为无条件稳定。

特征值可写成

$$\lambda_{1,2} = A \pm Bi = \exp[\bar{Q}(-\xi \pm i)]$$

(26), (27) 式可写成

$$z_j = \exp(-\xi \omega t_j) (c_1 \cos \omega t_j + c_2 \sin \omega t_j) \\ \omega = \bar{Q}/\Delta t, \quad \xi = -\ln(A^2 + B^2)/2\bar{Q}, \quad \bar{Q} = \arctan|B/A|$$

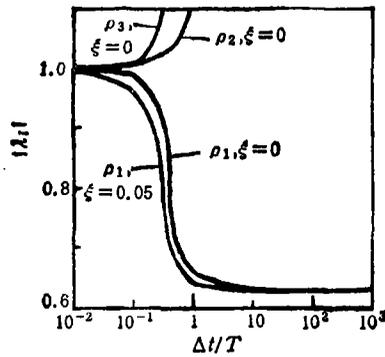


图 1 四次精度的特征值

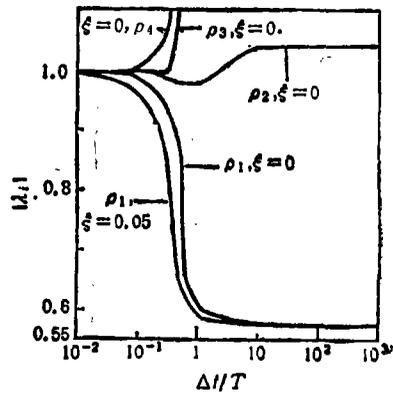


图 2 三次精度的特征值

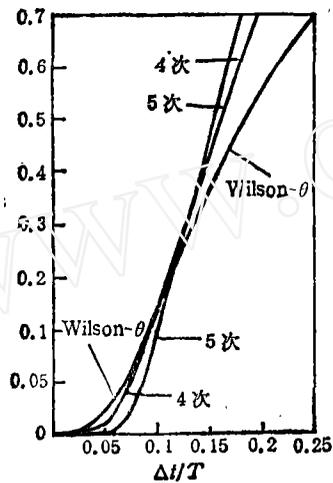


图 3 三种积分格式的算法阻尼比

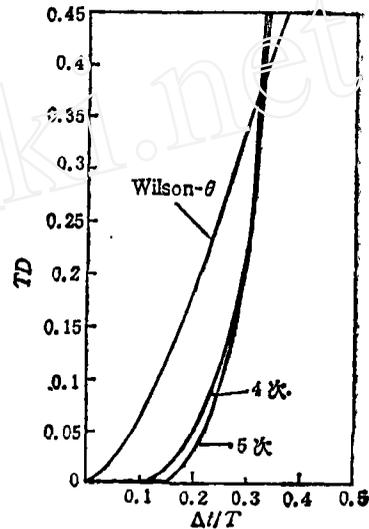


图 4 三种积分格式的周期延长率

c_1, c_2 可由初始条件来确定。

ξ 是算法阻尼比, 周期延长率为

$$TD = \frac{\bar{T} - T}{T} = \frac{\omega \Delta t}{\Omega} - 1$$

这些量是用来度量算法的精度。

由图 3 可见, 本文方法的算法阻尼比在低振型处的耗散性比 Wilson- θ 法小, 在高振型处的耗散性比 Wilson- θ 法大。五次精度的算法阻尼比在低振型处的耗散性比四次精度的耗散性小, 在高振型处耗散性强于四次精度的耗散性。

图 4 为周期延长率。本文方法的周期延长率在低振型处比 Wilson- θ 法小的多。

同理五次精度的 ρ 法也可采用类似的过程实现。

三、超越现象的讨论

在计算初始阶段,当 $\omega\Delta t$ 较大时,有的方法由于其固有的性质,会发生位移,速度的某一项,或两项远远超过其真实解的现象,这就是所谓超越现象.一个方法具有竞争力,不仅要无条件稳定,而且还应不具有超越现象.

假定 $\omega\Delta t \rightarrow \infty$, 仅保留有意义的项,由文献 [4], Wilson- θ 法可写成

$$u_1 \sim o(\Omega^2)u_0 + o(\Delta t)\dot{u}_0$$

$$\dot{u}_1 \sim o(\Omega)\omega u_0 + o(1)\dot{u}_0$$

本文方法由 (26), (27) 式可写成

$$z_1 \sim o(1)z_0$$

Wilson- θ 法的位移是 $(\omega\Delta t)$ 的平方,速度是 $\omega\Delta t$ 的一次方,这表明 Wilson- θ 法的位移有严重的超越现象,速度有中等程度的超越现象.而本文方法则没有超越现象.

表 2 为 $\Delta t = 10$ 秒, $\xi = 0$, $\omega = 2\pi$, $u_0 = 0$, $\dot{u}_0 = 20\text{cm/sec}$ 时的计算结果.

表 2

$t_i(\text{sec})$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Wilson- θ $u_i(\text{cm})$	98.03	-77.07	62.82	-49.4	38.45	-29.78	23.02	-17.77	13.71	-10.6
四次精度 $u_i(\text{cm})$	0.119	-0.150	0.142	-0.119	0.093	-0.070	0.054	-0.037	0.026	-0.018
五次精度 $u_i(\text{cm})$	0.109	-0.125	0.108	-0.083	0.059	-0.040	0.027	-0.018	0.012	-0.007

四、计算时间和存贮空间

高精度方法要向广泛使用的二次精度方法挑战,必须要有和二次精度方法相当的存贮空间和取得某一相同精度时,花费更少的计算量.

在计算中, ρ 法所需存贮的矩阵维数和个数与 Wilson- θ 法完全相同.故 ρ 法的存贮空间和 Wilson- θ 法大体相当.

直接积分法在计算非线性动力问题时,由于等效刚度的不断变化,每前进一步直接积分的计算量主要由三角分解求隐式方程所决定.当 n 较大时,用三角分解的办法求隐式方程组大致需要 $n^3/3$ 次的乘法运算.由于 ρ 法每前进一步仅需进行一个和二次精度大小相同的三角分解,故 ρ 法在进行非线性分析时的计算量与二次精度的方法大体相当.但本文方法的精度高于二次精度的方法.

对线性问题的分析,每前进一步,计算量主要决定于向量与矩阵相乘,一个向量与矩阵乘要进行 n^2 次乘法运算.四次精度的 ρ 法,每前进一步要进行 9 次向量与矩阵相乘.五次精度的 ρ 法,每前进一步要进行 12 次向量与矩阵相乘.二次精度的方法每前进一步要进行 3 次矩阵与向量相乘.高精度方法运算时间的延长可由适当放大时间步长得到补偿.表 3 为 ρ 法和 Wilson- θ 法精度和计算量的比较: $\omega = 2\pi$, $u_0 = 10\text{cm}$, $\dot{u}_0 = 0$. 平均误差率为

$$|\varepsilon_N| = \frac{\sum_{j=1}^N |u(t_j) - u_j|}{N}$$

表 3 计算量和精度的比较

$t_j(\text{sec})$	8×10^{-3}	16×10^{-3}	24×10^{-3}	32×10^{-3}	40×10^{-3}
Wilson- θ $\Delta t = 10^{-3} e_N $	6×10^{-8}	23×10^{-8}	53×10^{-8}	95×10^{-8}	148×10^{-8}
四次精度 $\Delta t = 4 \times 10^{-3} e_N $	0.5×10^{-8}	1×10^{-8}	1×10^{-8}	1×10^{-8}	2×10^{-8}
五次精度 $\Delta t = 8 \times 10^{-3} e_N $	7×10^{-8}	10×10^{-8}	13×10^{-8}	16×10^{-8}	18×10^{-8}
$t_j(\text{sec})$	48×10^{-3}	56×10^{-3}	64×10^{-3}	72×10^{-3}	80×10^{-3}
Wilson- θ $\Delta t = 10^{-3} e_N $	213×10^{-8}	289×10^{-8}	377×10^{-8}	476×10^{-8}	585×10^{-8}
四次精度 $\Delta t = 4 \times 10^{-3} e_N $	2×10^{-8}	2×10^{-8}	3×10^{-8}	4×10^{-8}	5×10^{-8}
五次精度 $\Delta t = 8 \times 10^{-3} e_N $	21×10^{-8}	24×10^{-8}	26×10^{-8}	29×10^{-8}	31×10^{-8}

其中 $u(t_j)$ 为精确解, u_j 为近似解, N 为步数.

四次精度的 ρ 法步长虽然是 Wilson- θ 法的 4 倍, 但精度仍比 Wilson- θ 法高约 2 个数量级. 五次精度的 ρ 法步长是 Wilson- θ 法的 8 倍, 但误差仍小于 Wilson- θ 法. 由此可见, 在一定步长的条件下, 从取得相同精度所需的计算量来讲, ρ 法所需的计算量小于 Wilson- θ 法.

附 录 1

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \rho \\ \alpha_2 &= \left(\frac{1}{60} - \frac{5}{24} \rho + \frac{2}{3} \rho^2 - \frac{\rho^3}{2} \right) / \left(\frac{1}{24} - \frac{\rho}{2} + \frac{3}{2} \rho^2 - \rho^3 \right) \\ \alpha_3 &= \left(\frac{1}{20} - \frac{\rho}{3} + \frac{\rho^2}{3} - \alpha_2 \left(\frac{1}{12} - \frac{\rho}{2} + \frac{\rho^2}{2} \right) \right) / \left(\left(\frac{1}{2} - \alpha_2 \right) \cdot \left(\frac{1}{6} - \rho + \rho^2 \right) \right) \\ \alpha_4 &= \left(\frac{1}{5} - \frac{\rho}{4} - \alpha_2 \left(\frac{1}{4} - \frac{\rho}{3} \right) \right) - \alpha_3 \left(\frac{1}{4} - \frac{\rho}{3} - \alpha_2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\rho}{2} \right) \right) / \left(\frac{1}{4} - \frac{\rho}{3} - \alpha_2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\rho}{2} \right) \right) \\ &\quad - \alpha_3 \left(\frac{1}{3} - \rho/2 - \alpha_2 \left(\frac{1}{2} - \rho \right) \right) \\ r_4 &= \left(\frac{1}{4} - \frac{\rho}{3} - \alpha_2 \left(\frac{1}{3} - \frac{\rho}{2} \right) - \alpha_3 \left(\frac{1}{3} - \frac{\rho}{2} - \alpha_2 \left(\frac{1}{2} - \rho \right) \right) \right) / \left((\alpha_3 - \rho)(\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1) \right) \\ r_3 &= \left(\frac{1}{3} - \rho/2 - \alpha_2 \left(\frac{1}{2} - \rho \right) - \frac{\frac{1}{4} - \frac{\rho}{3} - \alpha_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\rho}{2} \right) - \alpha_3 \left(\frac{1}{3} - \frac{\rho}{2} - \alpha_2 \left(\frac{1}{2} - \rho \right) \right)}{\alpha_3 - \alpha_2} \right) / \left((\alpha_3 - \rho)(\alpha_3 - \alpha_2) \right) \\ r_2 &= \frac{1}{2} - \rho - (\alpha_3 - \rho)r_3 - (\alpha_4 - \rho)r_4 \\ r_1 &= 1 - (r_2 + r_3 + r_4) \\ \rho_{11} &= \alpha_2 - \rho \\ \rho_{31} &= \left(\frac{1}{6} - \rho + \rho^2 - \left(\frac{1}{24} - \frac{\rho}{2} + \frac{3}{2} \rho^2 - \rho^3 \right) / (\alpha_2 - \rho) - r_3 \rho_{32} \rho_{21} - r_4 \rho_{42} \rho_{11} \right) / \rho_{23} \\ \rho_{32} &= \left(\frac{1}{24} - \frac{\rho}{2} + \frac{3\rho^2}{2} - \rho^3 \right) (\alpha_3 - \rho)(\alpha_3 - \alpha_1) / \left((\alpha_3 - \rho) \left(\frac{1}{6} - \rho + \rho^2 \right) \left(\frac{1}{2} - \alpha_2 \right) \right) \\ \rho_{41} &= \frac{1}{2} - \rho - (r_3 \rho_{32} + r_4 \rho_{42}) - r_4 \rho_{43} - r_3 \rho_{21} - r_2 \rho_{31} \end{aligned}$$

$$\rho_{31} = \left(\frac{\left(\frac{1}{6} - \rho + \rho^2 \right) \left(\alpha_3 - \frac{1}{2} \right)}{(\alpha_2 - \rho)(\alpha_3 - \alpha_2)} - r_3 \rho_{32} \right) / r_4$$

$$\rho_{43} = \left(\frac{1}{6} - \rho + \rho^2 \right) \left(\frac{1}{2} - \alpha_3 \right) / ((\alpha_3 - \rho)(\alpha_3 - \alpha_4) \cdot r_4)$$

$\{R(t_j + \alpha_k \Delta t)\}$ 可由下式近似

$$\{R(t_j + \alpha_k \Delta t)\} = \{R(t_j)\} + \alpha_k \{g_k R(t_j + 4\Delta t) + f_k R(t_j + 3\Delta t) + B_k R(t_j + 2\Delta t) + C_k R(t_j + \Delta t) + I_k R(t_j)\} + O(\Delta t^2)$$

$$k = 1, 2, 3, 4$$

$$g_k = \frac{(\alpha_k - 1)(\alpha_k - 2)(\alpha_k - 3)}{24}$$

$$f_k = \frac{(\alpha_k - 1)(\alpha_k - 2)(4 - \alpha_k)}{6}$$

$$B_k = \frac{\alpha_k - 1}{2} - \frac{1}{4} (\alpha_k - 1)(\alpha_k - 2)(5 - \alpha_k)$$

$$C_k = 2 - \alpha_k - \frac{1}{6} (\alpha_k - 1)(\alpha_k - 2)(\alpha_k - 6)$$

$$I_k = 1 - (g_k + f_k + B_k + C_k)$$

参 考 文 献

- [1] 朱镜清, 力学学报, 4(1983).
 [2] Bathe, K. J., Wilson, E. L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, (1976).
 [3] Igusa, T., Kiureghian, A. Der, and Sackman, J. L., *Eur. Eng. Str. Dyn.*, 1(1984).
 [4] Hilber, H. M., Hughes, T. J. R. *Eur. Eng. Str. Dyn.*, 6(1978).
 [5] Hurty W. C. and Rubinstein, M. F., Dynamics of Structures, McGraw-Hill, New York, (1967).
 [6] Singh, M. P., *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 106, (1980), 1405.
 [7] Lax P. E., Richtmyer, R. D., *Communication in pure Applied Mathematics*, 9(1956).
 [8] 孙焕纯, 力学学报, 2(1981).
 [9] G. W. 吉尔, 常微分方程初值问题的数值解法, 科学出版社(1978).

A HIGH ACCURATE ρ METHOD FOR STRUCTURAL DYNAMIC ANALYSIS

Xie Minsheng

(Huaqiao University, Department of civil Engineering)

Abstract The paper poses a ρ method of unconditionally stable direct integration, with fourth-order and fifth-order accuracy. The ρ method shows a good algorithmic damping and period extension property, and no "overshooting" phenomenon. It needs less calculation and storage space than other high accurate methods. The proof of its unconditionally stable requires no damping matrix to satisfying the condition of the orthogonality of modes.

Key words algorithmic damping, period extension, unconditionally stable.