

正交异性理想弹塑性材料 III 型静止裂纹 尖端场和小范围屈服解¹⁾

郑 耀

(哈尔滨工业大学, 哈尔滨)²⁾

提要 本文假定 R. Hill 屈服准则, 得到了正交异性理想塑性材料的 III 型静止裂纹尖端场。在承认歪形能屈服准则的前提下, 运用仿射变换和复函数映射的方法, 求得了正交异性线弹性理想塑性材料 III 型静止裂纹的小范围屈服解, 进而给出了张开位移的表达式。

关键词 裂纹张开位移, 弹性理想塑性材料, 弹塑性, 断裂力学, 尖端场, 正交异性材料, 小范围屈服解

原始各向异性金属材料 and 延性复合材料的弹塑性断裂, 导致了对各向异性材料弹塑性断裂问题的研究。早在五六十年代, J. A. H. Hult, F. A. McClintock^[1] 和 J. R. Rice^[2,3] 等对各向同性材料的 III 型问题作过一系列研究。J. R. Rice^[4] 沿着一般化的道路, 对各向异性理想弹塑性材料的 III 型问题作过详细的讨论, 并在例子中考虑了四种情况。本文将就常见的具有弹性正交异性和椭圆屈服面的材料的 III 型问题作一探讨, 以补充 J. R. Rice 的算例。在处理弹性正交异性时, 我们引入了仿射变换。

1. 材料性能的假设

设所论材料是线弹性理想塑性的。取坐标系, 使坐标轴和异性主轴重合。对这一反平面问题, R. Hill 屈服准则退化为

$$2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 = 1 \quad (1)$$

为数学处理上的方便计, 我们承认歪形能屈服准则。于是, 又有弹性模量间的相依关系 (图 1):

$$\tau_{yz} = \frac{\sqrt{M+L}}{2L\gamma_0} \gamma_{yz}, \quad \gamma_{yz} \leq \sqrt{\frac{2L}{M+L}} \gamma_0; \quad \tau_{yz} = \frac{1}{\sqrt{2L}}, \quad \gamma_{yz} > \sqrt{\frac{2L}{M+L}} \gamma_0 \quad (2)$$

$$\tau_{zx} = \frac{\sqrt{M+L}}{2M\gamma_0} \gamma_{zx}, \quad \gamma_{zx} \leq \sqrt{\frac{2M}{M+L}} \gamma_0; \quad \tau_{zx} = \frac{1}{\sqrt{2M}}, \quad \gamma_{zx} > \sqrt{\frac{2M}{M+L}} \gamma_0 \quad (3)$$

其中 γ_0 为无量纲材料常数。我们既假定 R. Hill 准则, 又承认歪形能准则, 并不是二元论, 而只是在承认前一准则的前提下, 来研究其物理根源。

1) 本文曾在第一届全国塑性力学学术交流会上宣读, 1986 年 11 月, 杭州。

2) 现地址: 浙江大学土木系, 杭州。

本文于 1987 年 3 月 23 日收到第一次稿, 于 1988 年 1 月 7 日收到修改稿。

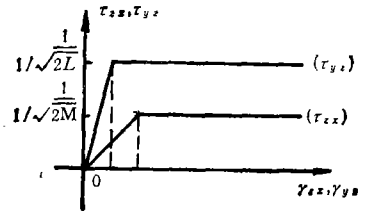


图 1 应力应变关系的假设

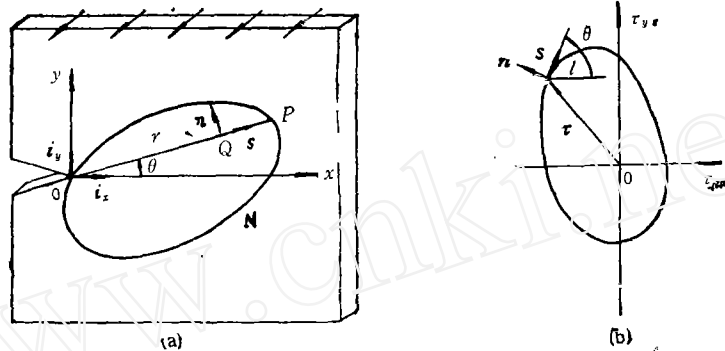


图 2

(a) III 型尖切口; (b) 屈服面

2. III 型尖切口问题

J. R. Rice^[4] 详尽地分析了一般各向异性理想弹塑性材料 III 型尖切口问题,并得出了一些普遍结论。如果引入剪应力向量和剪应变向量

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{xx}\mathbf{i}_x + \tau_{yx}\mathbf{i}_y, \quad \boldsymbol{\gamma} = \gamma_{xx}\mathbf{i}_x + \gamma_{yx}\mathbf{i}_y \quad (4)$$

则弹性应变可写成

$$\boldsymbol{\gamma}^e = \boldsymbol{\Gamma}^* \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (5)$$

其中 $\boldsymbol{\Gamma}^*$ 为 2×2 的并向量。若令 $\Gamma_{,,}$ 和 $\Gamma_{,,n}$ 分别为 $\mathbf{s}$ 方向上单位应力向量引起的在 $\mathbf{s}$ 和 $\mathbf{n}$ 方向上的应变分量,则有

$$\Gamma_{,,}\mathbf{s} + \Gamma_{,,n}\mathbf{n} = \boldsymbol{\Gamma}^* \cdot \mathbf{s} \quad (6)$$

塑性区内,在自尖端发出的任一直线上,应力为常量。对给定的与 x 轴成 θ 角的 $\mathbf{s}$ 线,其上任一点的应力向量对应于屈服面上的一点,此点的单位切向量 $\mathbf{s}$ 与 τ_{xx} 轴成同一 θ 角。对于弹塑性边界上的两点 N 、 P ,成立着

$$w_P = w_N + R_P(\mathbf{s}_P \cdot \boldsymbol{\Gamma}^* \cdot \boldsymbol{\tau}_P) - R_N(\mathbf{s}_N \cdot \boldsymbol{\Gamma}^* \cdot \boldsymbol{\tau}_N) + \int_{l_N}^{l_P} R(l)\Gamma_{,,}(l)dl \quad (7)$$

其中 l 是屈服面上的弧长(沿反时针方向增大,零参考点任取)。对于塑性区内的点 Q ,有

$$w_Q = w_P - (R_P - r)(\Gamma_{,,}\tau_{xx} + \Gamma_{,,n}\tau_{yx}) \quad (8)$$

3. 尖端塑性场

设所考虑的点的极角为 θ 。对于椭圆屈服面 (1), 注意到椭圆的切线方程, 由前述普遍结论, 可得

$$M\tau_{xx} + L\text{tg}\theta\tau_{yx} = 0 \left(\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots \right) \text{ 或 } \tau_{xx} = \pm \frac{1}{\sqrt{2M}} \quad (9)$$

联合(1)式, 进而有

$$\tau_{yz} = \frac{M \cos \theta}{\sqrt{2LM(M \cos^2 \theta + L \sin^2 \theta)}}, \tau_{zx} = -\frac{L \sin \theta}{\sqrt{2LM(M \cos^2 \theta + L \sin^2 \theta)}} \quad (10)$$

或
$$\tau_{yz} = 0, \tau_{zx} = \pm \frac{1}{\sqrt{2M}} \quad (11)$$

设裂纹尖端全部被塑性区所包围。注意到边界条件及应力分量的坐标变换, 可得应力场表式

$$\tau_{\theta z} = -\frac{1}{\sqrt{2LM}} \sqrt{M \cos^2 \theta + L \sin^2 \theta}, \tau_{rz} = \frac{(M - L) \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2LM(M \cos^2 \theta + L \sin^2 \theta)}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (12)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{\sqrt{2M}} \sin \theta, \tau_{rz} = -\frac{1}{\sqrt{2M}} \cos \theta \quad \left(\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi\right) \quad (13)$$

$$\tau_{\theta z} = -\frac{1}{\sqrt{2M}} \sin \theta, \tau_{rz} = \frac{1}{\sqrt{2M}} \cos \theta \quad \left(-\pi \leq \theta < -\frac{\pi}{2}\right) \quad (14)$$

易见, 这一应力场是连续应力场。在没有给出远场条件时, 位移场和应变场是不唯一的。

4. 线弹性奇性场

把应力应变关系(2)(3)代入平衡方程, 可得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial (sy)^2} = 0 \quad (15)$$

其中 $s = \sqrt{\frac{L}{M}}$ 。于是有解析函数 $\omega(z_1)$ ($z_1 = x + isy$), 使

$$w = \frac{2M\gamma_0}{\sqrt{M+L}} \operatorname{Im} \omega(z_1), \omega'(z_1) = s\tau_{yz} + i\tau_{zx} \quad (16)$$

类似于各向同性材料的情形, 我们有

$$s\tau_{yz} + i\tau_{zx} = \frac{sK_{III}}{\sqrt{2\pi z_1}} + O(\sqrt{z_1}) \quad (K_{III} = \sqrt{\pi a \tau}) \quad (\text{当 } |z| \rightarrow 0) \quad (17)$$

及沿裂纹面的渐近边界条件(当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, 有 $|z_1| \rightarrow \infty$)

$$s\tau_{yz} + i\tau_{zx} \rightarrow \frac{sK_{III}}{\sqrt{2\pi z_1}} \quad (18)$$

由(16)的第二式可知, 有解析函数 $F(\zeta)$, 使

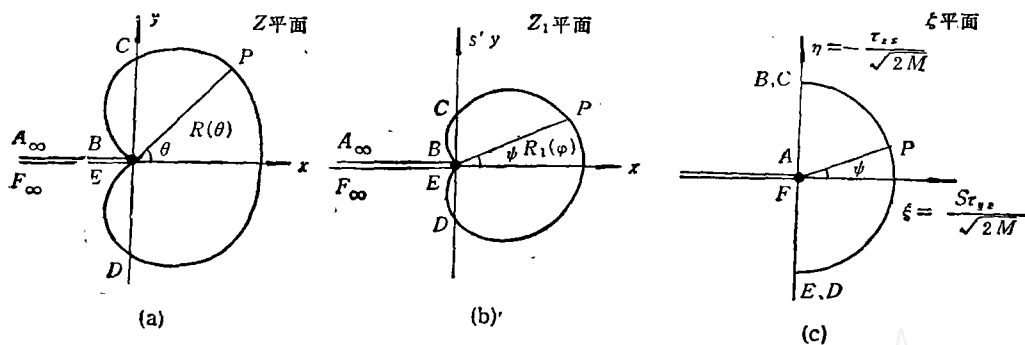
$$x - isy = F(\zeta), \zeta = \sqrt{2M}(s\tau_{yz} - i\tau_{zx}) \quad (19)$$

5. 小范围屈服解

在弹塑性交界线的 P 点上, 有 $x + iy = R(\theta)e^{i\theta}$ 。通过仿射变换, 得到在 z_1 平面上的象(如图 3)。在对点 P 上, 有 $x + isy = R_1(\phi)e^{i\phi}$ 。从而

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \phi, R(\theta) = \frac{1}{s} R_1(\phi) \sqrt{S^2 \cos^2 \phi + \sin^2 \phi} \quad (20)$$

在物理平面 z 上, 注意到尖端塑性应力场的表式, 可知图 3 所示的映象关系。类似于各向



(a) 物理平面

(b) 假想物理平面

(c) 假想弹性区在应力平面上的象

图3 裂纹近尖端的小范围屈服

同性的情形,我们可知

$$F(\xi) = \frac{LK_{III}^2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right), R_1(\phi) = \frac{2LK_{III}^2}{\pi} \cos \phi \quad (21)$$

于是

$$R(\theta) = \frac{R_0 \cos \theta}{\cos^2 \theta + s^2 \sin^2 \theta} \left(R_0 = \frac{2LK_{III}^2}{\pi}\right) \quad (22)$$

它表示一个椭圆。特别对各向同性材料, $s=1$, 有 $R(\theta) = R_0 \cos \theta$ 。塑性区是一个圆。小范围屈服时, 塑性区内的应力分布如(12)式。由(19)(21)可得弹性区内的应力应变分布:

$$s\tau_{yz} + i\tau_{zx} = \frac{sK_{III}}{\sqrt{2\pi}} \left(z_1 - \frac{LK_{III}^2}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}, \gamma_{yz} + i\gamma_{zx} = \frac{2\sqrt{LM}\gamma_0}{\sqrt{M+L}} (s\tau_{yz} + i\tau_{zx}) \quad (23)$$

注意到应力应变关系(2)、(3), 知

$$\Gamma_{xx} = \frac{2\gamma_0}{\sqrt{M+L}} (M \cos^2 \theta + L \sin^2 \theta), \Gamma_{yy} = 0, \Gamma_{zz} = 0, s \cdot \Gamma^* \cdot \tau = \Gamma_{xx} \tau, \quad (24)$$

取N点, 使其在Ox轴上, 并令 $w_N = 0$, 根据(7)式, 有

$$w_P = \frac{2\sqrt{2LM}\gamma_0 K_{III}^2 \sin \theta}{\pi \sqrt{M+L}} \sqrt{M \cos^2 \theta + L \sin^2 \theta} \quad (25)$$

及裂纹张开位移

$$\delta = \frac{4\sqrt{2M}\gamma_0}{\sqrt{M+L}} \frac{LK_{III}^2}{\pi} \quad (26)$$

由(8)式有

$$w_Q = w_P - (R(\theta) - r) \frac{2(M-L)\gamma_0 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2LM(M+L)}} \sqrt{M \cos^2 \theta + L \sin^2 \theta} \quad (27)$$

可见, 一般地, 每一s线上的位移w并非为常量。只有各向同性时才为常量。如果忽略塑性区内的弹性变形, 借助于特征场方法, 可知一般地s线上的位移w为常量。由此得到的

位移不同于(25)(27)式,但张开位移和(26)式相同。

作者在写作过程中,得到了导师袁祖培副教授的指导 and 帮助,在此深表谢意。

参 考 文 献

- [1] Hult, J. A. H. and McClintock, F. A., Elastic-plastic stress and strain distribution around sharp notches under repeated shear, *Proc. 9th Inter. Congr. Appl. Mech.*, Brussels, 8(1956), 51—62.
- [2] Rice, J. R., Contained plastic deformation near cracks and notches under longitudinal shear, *Inter. J. Fracture Mech.*, 2(1966), 426—447.
- [3] Rice, J. R., Stresses due to a sharp notch in a work-hardening elastic-plastic material loaded by longitudinal shear, *J. Appl. Mech. (ASME)*, 34(1967), 287—298.
- [4] Rice, J. R., On the theory of perfectly plastic anti-plane straining, *Mechanics of Materials*, 3(1984), 55—80.

TIP FIELDS AND SMALL-SCALE YIELDING SOLUTION OF A MODE III STATIC CRACK IN ORTHOTROPIC ELASTIC PERFECTLY-PLASTIC MATERIALS

Zheng Yao

(Harbin Institute of Technology, Harbin)

Abstract In this paper, tip fields of a mode III static crack in orthotropic perfectly-plastic materials are presented by supposing the R. Hill's yield criterion. On the assumption of distortion energy yield criterion, a small-scale yielding solution in linear elastic perfectly-plastic materials is obtained by using affine transformation and complex function mapping, and the crack opening displacement is discussed as well.

Key words crack opening displacement, elastic perfectly-plastic materials, elasto-plasticity, fracture mechanics, near-tip fields, orthotropic materials, small-scale yielding solution.