

动力学分区变分原理及其广义变分原理

钱伟长 卢文达 王 蜀

(上海市应用数学和力学研究所, 上海)

提要 本文引用并推广文^[1]的分区最小位能原理, 提出并论证了动力学分区变分原理。并进一步采用钱伟长提出的引入拉格朗日乘子并加以识别的方法^[1,2](1980, 1985), 得到了不完全和完全的动力学分区广义变分原理。本文采用笛卡尔张量符号。

关键词 变分原理, 分区变分, 广义变分,

一、基本方程

应变位移关系:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

物理方程:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

动力学运动方程:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3)$$

位移已知边界条件:

$$u_i = \bar{u}_i \quad s \in s_u \quad (4)$$

应力已知边界条件:

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{p}_i \quad s \in s_p \quad (5)$$

起始和终了位置:

$$u_i(t_1) = \bar{u}_i(t_1), \quad u_i(t_2) = \bar{u}_i(t_2) \quad (6)$$

或

$$\delta u_i(t_1) = \delta u_i(t_2) = 0 \quad (6')$$

交界面位移连续条件:

$$u_i^{(1)}(t) = u_i^{(2)}(t) \quad s \in s_0 \quad (7)$$

交界面应力合力连续条件:

$$\sigma_{ij}^{(1)}(t) n_j^{(1)}(t) + \sigma_{ij}^{(2)}(t) n_j^{(2)}(t) = 0 \quad s \in s_0 \quad (8)$$

弹性体内应变能密度:

$$A(\varepsilon_{ij}^{(a)}) = \frac{1}{2} [\lambda \varepsilon_{kk}^{(a)} \varepsilon_{ll}^{(a)} + 2\mu \varepsilon_{kl}^{(a)} \varepsilon_{kl}^{(a)}] \quad (9)$$

二、动力学分区变分原理

我们这里只讨论动力学问题, 各个变量均是时间 t 的函数. 设弹性体的体积可以分为两部分, 即: $V = V_1 + V_2$, 在 V_1 的表面上有 S_{p_1}, S_{u_1} 两部分, 在 V_2 表面上有 S_{p_2}, S_{u_2} 两部分, S_{p_1}, S_{p_2} 是外力已给的表面, S_{u_1}, S_{u_2} 是位移已给的表面, V_1 和 V_2 的交界面为 S_0 , 在任意时刻 t , 设在 S_0 上从 V_1 指向 V_2 的法向单位矢量为 $n_i^{(1)}(t)$, 从 V_2 指向 V_1 的法向单位矢量为 $n_i^{(2)}(t)$, 则有:

$$n_i^{(1)}(t) = -n_i^{(2)}(t) \quad (10)$$

在 $V_\alpha (\alpha = 1, 2)$ 中的位移、应变和应力分别用 $u_i^{(\alpha)}(t)$, $\epsilon_{ij}^{(\alpha)}(t)$ 和 $\sigma_{ij}^{(\alpha)}(t)$ 表示.

这样, 动力学分区变分原理可陈述如下:

对任意时刻 t , 在表面 S_{u_1}, S_{u_2} 上满足已给的边界条件(4)式和在 V_1, V_2 中满足位移应变关系(1)式, 而在 S_0 上满足位移连续条件(7)式. 那么, 在满足已知的起始位置和终了位置[即满足(6)式]的可能运动 $u_i^{(\alpha)}, \epsilon_{ij}^{(\alpha)}, \sigma_{ij}^{(\alpha)}$ 中, 实际的运动 $u_i^{(\alpha)}, \epsilon_{ij}^{(\alpha)}, \sigma_{ij}^{(\alpha)}$ 必使下列泛函取驻值:

$$\begin{aligned} \Pi_{D1} = & \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \left[T^{(\alpha)} - U^{(\alpha)} + \int_{V_{\alpha}} F_i^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} dV_{\alpha} \right. \\ & \left. + \int_{S_{P_{\alpha}}} \bar{p}_i^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} dS_{\alpha} \right] dt \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $T^{(\alpha)}$ 是物体的动能,

$$T^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \int_{V_{\alpha}} \rho \dot{u}_i^{(\alpha)} \dot{u}_i^{(\alpha)} dV_{\alpha} \quad (12)$$

$U^{(\alpha)}$ 是弹性体的应变能,

$$U^{(\alpha)} = \int_{V_{\alpha}} A(\epsilon_{ij}^{(\alpha)}) dV_{\alpha} \quad (13)$$

式中 $A(\epsilon_{ij}^{(\alpha)})$ 由(9)式表示, ρ 是质量密度.

证明: 变分得:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{D1} = & \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{V_{\alpha}} (\rho \dot{u}_i^{(\alpha)} \delta \dot{u}_i^{(\alpha)} - \sigma_{ij}^{(\alpha)} \delta \epsilon_{ij}^{(\alpha)} + F_i^{(\alpha)} \delta u_i^{(\alpha)}) dV_{\alpha} \right. \\ & \left. + \int_{S_{P_{\alpha}}} \bar{p}_i^{(\alpha)} \delta u_i^{(\alpha)} dS_{\alpha} \right] dt \end{aligned} \quad (14)$$

将第一个体积分先对时间 t 作分部积分, 并利用条件(6)式, 我们有:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_{\alpha}} \rho \dot{u}_i^{(\alpha)} \delta \dot{u}_i^{(\alpha)} dV_{\alpha} dt \\ &= \int_{V_{\alpha}} \rho \left[\dot{u}_i^{(\alpha)} \delta u_i^{(\alpha)} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}_i^{(\alpha)} \delta u_i^{(\alpha)} dt \right] dV_{\alpha} \\ &= \int_{V_{\alpha}} \rho \left[- \int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}_i^{(\alpha)} \delta u_i^{(\alpha)} dt \right] dV_{\alpha} \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_{\alpha}} \rho \ddot{u}_i^{(\alpha)} \delta u_i^{(\alpha)} dV_{\alpha} dt \end{aligned} \quad (15)$$

将第二个体积分先对坐标作分部积分, 并利用格林定理, 得:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_\alpha} (-\sigma_{ij}^{(\alpha)} \delta \varepsilon_{ij}^{(\alpha)}) dV_\alpha dt \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_\alpha} \sigma_{ij}^{(\alpha)} \delta u_{i,j}^{(\alpha)} dV_\alpha dt \\
&= - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{S_{P_\alpha} + S_{u_\alpha} + S_0} \sigma_{ij}^{(\alpha)} \delta u_i^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} dS_\alpha - \int_{V_\alpha} \sigma_{ij,j}^{(\alpha)} \delta u_i^{(\alpha)} dV_\alpha \right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \int_{V_\alpha} \sigma_{ij}^{(\alpha)} \delta u_{i,j}^{(\alpha)} dV_\alpha dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{S_{P_\alpha} + S_0} \sigma_{ij}^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} \delta u_i^{(\alpha)} dS_\alpha
\end{aligned} \quad (16)$$

再把(15)式和(16)式代入(14)式,得:

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_{D1} &= \sum_\alpha \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{V_\alpha} (\sigma_{ij,j}^{(\alpha)} + F_i^{(\alpha)} - \rho \ddot{u}_i^{(\alpha)}) \delta u_i^{(\alpha)} dV_\alpha \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{S_{P_\alpha}} (\sigma_{ij}^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} - \bar{p}_i^{(\alpha)}) \delta u_i^{(\alpha)} dS_\alpha \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_{S_0} \sigma_{ij}^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} \delta u_i^{(\alpha)} dS \right] dt \right\}
\end{aligned} \quad (17)$$

由于对任意时刻 t , 交界面 S_0 上有位移连续条件(7)式, 则,

$$\begin{aligned}
& \sum_\alpha \int_{t_1}^{t_2} \int_{S_0} \sigma_{ij}^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} \delta u_i^{(\alpha)} dS dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \int_{S_0} \left(\sum_\alpha \sigma_{ij}^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} \right) \delta u_i^{(1)} dS dt
\end{aligned} \quad (18)$$

最后得:

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_{D1} &= \sum_\alpha \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{V_\alpha} (\sigma_{ij,j}^{(\alpha)} + F_i^{(\alpha)} - \rho \ddot{u}_i^{(\alpha)}) \delta u_i^{(\alpha)} dV_\alpha \right. \\
&\quad \left. - \int_{S_{P_\alpha}} (\sigma_{ij}^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} - \bar{p}_i^{(\alpha)}) \delta u_i^{(\alpha)} dS_\alpha \right] dt \\
&\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_{S_0} \left(\sum_\alpha \sigma_{ij}^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} \right) \delta u_i^{(1)} dS dt
\end{aligned} \quad (19)$$

由于对任意时刻 t , $\delta u_i^{(\alpha)}$ 都是任意的, 所以得分区的运动方程:

$$\sigma_{ij,j}^{(\alpha)} + F_i^{(\alpha)} - \rho \ddot{u}_i^{(\alpha)} = 0 \quad V \in V_\alpha \quad (20)$$

和任意时刻 t 外力已知的分区边界条件:

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} - \bar{p}_i^{(\alpha)} = 0 \quad S \in S_{P_\alpha} \quad (21)$$

以及交界面 S_0 上的应力连续条件:

$$\sum_\alpha \sigma_{ij}^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} = 0 \quad S \in S_0 \quad (22)$$

证毕

从以上的论证得知, 只要在任何时刻 t 保证交界面上位移的连续性, 动力学变分原理就可以分区进行计算。这是复杂结构动力有限元计算的基础。下面, 我们写出分 N 个区域的动力学变分原理:

设弹性体分成 N 个区域 $V_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, N)$, 对任意时刻 t , 在表面 $S_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, N)$, 上满足位移已给的边界条件(4)和在 $V_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, N)$ 中满足位移应变关系(1)式, 并且在诸区域间的交界面 S_0 上满足位移连续条件(7)。那么, 在满足已给的起始位置

和终了位置[即满足(6)式]的可能运动 $u_i^{(\alpha)}, \varepsilon_{ij}^{(\alpha)}, \sigma_{ij}^{(\alpha)} (\alpha = 1, 2, \dots, N)$ 中, 真实的运动 $u_i^{(\alpha)}, \varepsilon_{ij}^{(\alpha)}, \sigma_{ij}^{(\alpha)} (\alpha = 1, 2, \dots, N)$ 必使下列泛函取驻值:

$$\begin{aligned} \Pi_{D1}^* = \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{V_{\alpha}} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i^{(\alpha)} \dot{u}_i^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{kk}^{(\alpha)} \varepsilon_{ll}^{(\alpha)} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \mu \varepsilon_{kl}^{(\alpha)} \varepsilon_{kl}^{(\alpha)} + F_i^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} \right) dV_{\alpha} \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{S_{p_{\alpha}}} \bar{p}_i^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} dS_{\alpha} \right] dt \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

若考虑系统的自由振动, 则令上式中的 $\bar{p}_i^{(\alpha)} = 0$, 得泛函如下:

$$\begin{aligned} \Pi_{D1}^{**} = \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{V_{\alpha}} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i^{(\alpha)} \dot{u}_i^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{kk}^{(\alpha)} \varepsilon_{ll}^{(\alpha)} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \mu \varepsilon_{kl}^{(\alpha)} \varepsilon_{kl}^{(\alpha)} + F_i^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} \right) dV_{\alpha} \right] dt \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

再若在自由振动中, 不考虑体力(自重等)的影响, 则令(24)中的 $F_i^{(\alpha)} = 0$ 即可。

三、动力学分区广义变分原理

我们可以看出, 在(二)中所导出的变分原理都有下列的约束条件: 应变位移关系(1)式, 应力应变关系(2)式, 位移已知边界条件(4)式, 以及各区域间的位移连续条件(7)式。用作者提出的引入拉格朗日乘子并加以识别的方法^[1](1980)和高阶乘子法^[2](1985), 我们可以把这些约束条件引入泛函成为变分取驻值的自然条件而得到没有约束条件或较少约束条件的完全广义变分原理或不完全广义变分原理。

首先讨论交界面的位移连续条件(7)式的放松。引入拉格朗日乘子 σ_i , 从(11)式, 我们得到下列新的泛函,

$$\begin{aligned} \Pi_{D2} = \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \left[T^{(\alpha)} - U^{(\alpha)} + \int_{V_{\alpha}} F_i^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} dV_{\alpha} \right. \\ \left. + \int_{S_{p_{\alpha}}} \bar{p}_i^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} dS_{\alpha} \right] dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \int_{S_0} \lambda_i (u_i^{(1)} - u_i^{(2)}) dS dt \end{aligned} \quad (25)$$

将上式变分, 并利用(17)式, 我们有:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{D2} = \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{V_{\alpha}} (\sigma_{ij,i}^{(\alpha)} + F_i^{(\alpha)} - \rho \ddot{u}_i^{(\alpha)}) \delta u_i^{(\alpha)} dV_{\alpha} \right. \\ \left. - \int_{S_{p_{\alpha}}} (\sigma_{ij}^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} - \bar{p}_i^{(\alpha)}) \delta u_i^{(\alpha)} dS_{\alpha} \right. \\ \left. - \int_{S_0} \sigma_{ij}^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} \delta u_i^{(\alpha)} dS \right] dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{S_0} (u_i^{(1)} - u_i^{(2)}) \delta \lambda_i dS \right. \\ \left. + \int_{S_0} \lambda_i (\delta u_i^{(1)} - \delta u_i^{(2)}) dS \right] dt \end{aligned} \quad (26)$$

整理:

$$\sum_{\alpha=1}^2 \sigma_{ij}^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} \delta u_i^{(\alpha)} + \lambda_i (\delta u_i^{(1)} - \delta u_i^{(2)})$$

$$= (\sigma_{ij}^{(1)} n_j^{(1)} + \lambda_i) \delta u_i^{(1)} + (\sigma_{ij}^{(2)} n_j^{(2)} - \lambda_i) \delta u_i^{(2)}. \quad (27)$$

于是(25)式的驻值条件可写为:

$$\delta \Pi_{D2} = \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{V_{\alpha}} (\sigma_{ij,j}^{(\alpha)} + F_i^{(\alpha)} - \rho \ddot{u}_i^{(\alpha)}) \delta u_i^{(\alpha)} dV_{\alpha} \right. \\ \left. - \int_{S_{P_{\alpha}}} (\sigma_{ij}^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} - \bar{p}_i^{(\alpha)}) \delta u_i^{(\alpha)} dS_{\alpha} \right] dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{S_0} (u_i^{(1)} - u_i^{(2)}) \delta \lambda_i dS \right. \\ \left. + \int_{S_0} (\sigma_{ij}^{(1)} n_j^{(1)} + \lambda_i) \delta u_i^{(1)} dS \right. \\ \left. + \int_{S_0} (\sigma_{ij}^{(2)} n_j^{(2)} - \lambda_i) \delta u_i^{(2)} dS \right] dt \quad (28)$$

由于 $\delta u_i^{(2)}$ 和 $\delta \lambda_i$ 都是独立变量, 则得到分区的运动方程,

$$\sigma_{ij,j}^{(\alpha)} + F_i^{(\alpha)} = \rho \ddot{u}_i^{(\alpha)} \quad V \in V_{\alpha} \quad (29)$$

分区外力已知边界条件,

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} - \bar{p}_i^{(\alpha)} = 0 \quad S \in S_{P_{\alpha}} \quad (30)$$

交界面上的位移连续条件,

$$u_i^{(1)} = u_i^{(2)} \quad S \in S_0 \quad (31)$$

和决定 λ_i 的条件,

$$\lambda_i = \sigma_{ij}^{(2)} n_j^{(2)} = -\sigma_{ij}^{(1)} n_j^{(1)} \quad S \in S_0 \quad (32)$$

从(31)式, 我们看到位移连续条件(7)式在变分中也得到了自然满足。因此, 我们得到了下面不完全的动力学分区广义变分原理。

对任意时刻 t , 在表面 S_{u_1}, S_{u_2} 上满足位移已知边界条件(4)式和在 V_1, V_2 中满足应变位移关系(1), 那么, 在满足已给的起始位置和终了位置[即满足(6)式]的可能运动 $u_i^{(\alpha)}, \varepsilon_{ij}^{(\alpha)}, \sigma_{ij}^{(\alpha)}$ 中, 真实的运动 $u_i^{(\alpha)}, \varepsilon_{ij}^{(\alpha)}, \sigma_{ij}^{(\alpha)}$ 必使下列泛函取驻值:

$$\Pi_{D2} = \sum_{\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \left[T^{(\alpha)} - U^{(\alpha)} + \int_{V_{\alpha}} F_i^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} dV_{\alpha} \right. \\ \left. + \int_{S_{P_{\alpha}}} \bar{p}_i^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} dS_{\alpha} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{S_0} \sigma_{ij}^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} (u_i^{(\alpha')} - u_i^{(\alpha)}) dS \right] dt \quad (33)$$

式中 $T^{(\alpha)}$ 和 $U^{(\alpha)}$ 分别见(12)式和(13)式, α' 表示与 α 对立的编号。

通过引入拉格朗日乘子并加以识别的方法, 我们还可以根据需要放松其他约束条件中的一个或全部, 从而得到新的广义泛函。下面我们给出分 N 个区域的完全的动力学广义变分原理:

设弹性体分成 N 个区域 $V_{\alpha} (\alpha = 1, 2, \dots, N)$, 在满足已给起始位置和终了位置[即满足(6)式]的一切可能运动 $u_i^{(\alpha)}, \varepsilon_{ij}^{(\alpha)}, \sigma_{ij}^{(\alpha)}$ 中, 真实运动 $u_i^{(\alpha)}, \varepsilon_{ij}^{(\alpha)}, \sigma_{ij}^{(\alpha)}$ 必使下列泛函取

驻值,

$$\begin{aligned}
 \Pi_D = & \sum_{\alpha=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{V_\alpha} \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i^{(\alpha)} \dot{u}_i^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ij}^{(\alpha)} \varepsilon_{ij}^{(\alpha)} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \mu \varepsilon_{ij}^{(\alpha)} \varepsilon_{ij}^{(\alpha)} + F_i^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} \right) dV_\alpha \right. \\
 & - \int_{V_\alpha} \sigma_{ij}^{(\alpha)} \left[\varepsilon_{ij}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} (u_{i,j}^{(\alpha)} + u_{j,i}^{(\alpha)}) \right] dV_\alpha \\
 & + \int_{S_P} \bar{p}_i^{(\alpha)} u_i^{(\alpha)} dS_\alpha \\
 & + \int_{S_0} \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{(\alpha')} n_j^{(\alpha')} (u_i^{(\alpha)} - u_i^{(\alpha')}) dS \\
 & \left. - \int_{S_\alpha} \sigma_{ij}^{(\alpha)} n_j^{(\alpha)} (u_i^{(\alpha)} - \bar{u}_i^{(\alpha)}) dS_\alpha \right\} dt
 \end{aligned} \quad (34)$$

也就是说,使上述泛函取驻值的 $u_i^{(\alpha)}$, $\varepsilon_{ij}^{(\alpha)}$, $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$ 必满足运动方程(3)式,应变位移关系(1)式,位移已知的边界条件(4)式和外力已知的边界条件(5)式,以及各区域间的交界面 S_0 上的位移和应力的合力的连续条件(7)式和(8)式。(34)式中的 α' 表示与 V_α 域相邻的诸域的编号。

证明: 略。

参 考 文 献

- [1] 钱伟长,“变分法与有限元”上册,科学出版社,(1980)
- [2] 钱伟长,“广义变分原理”知识出版社,1985,3,上海.
- [3] Washizu, K., “Variational Methods in Elasticity and Plasticity”, 2nd edition 1975, Pergamon Press.
- [4] 钱伟长、叶开源,“弹性力学”,科学出版社(1956).
- [5] Pian, T. H. H. and Tong, P., “Basis of Finite Element Methods for Solid Continuum”, *Int. J. for Num. Methods in Engineering*, 1(1969), pp. 3—28.
- [6] 胡海昌“弹性力学的变分法及其应用”,科学出版社(1981).

DYNAMIC REGION-WISE VARIATIONAL PRINCIPLES AND GENERALIZED VARIATIONAL PRINCIPLES

Chien Weizang, Lu Wenda, Wang Shu

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics)

Abstract In this paper, dynamic region-wise variational principles have been developed and proved by extending regionwise potential energy principles^[1]. Furthermore, we have gotten dynamic region-wise generalized variation principles by the method developed by prof. Chien Weizang, introducing Lagrangian multipliers and distinguishing them^[1,2] (1980, 1985). Cartesian notations are used in the paper.

Key words variational principle, region-wise variation, generalized variation.