第21卷 第2期　　力 学 学 报　　Vol. 21, No. 2
1989 年 3 月　　ACTA MECHANICA SINICA　　Mar., 1989

线性振动亏损系统的广义模态理论

时国勤　诸德超
（北京航空学院）

提要 本文求出了线性振动亏损系统的一个完备的广义特征向量系，称之为广义模态；找出并证明了系统与其伴随系统的广义模态之间的部分双正交关系，并据此导出线性振动系统最一般的传递函数和脉冲响应函数表达式．示例表明了本文理论和方法的正确性和有效性．

关键词 结构动力学，线性振动亏损系统，广义模态

引　言

处理结构动力问题的实用理论与方法，如[1]—[3]，全都假设控制运动方程的系数矩阵是非亏损的，即整个空间可为一完备的特征向量系所张满．然而，实际上还存在许多问题，如具有非比例阻尼矩阵或在非保守力作用下的结构动力分析及气动弹性颤振分析等，其有关的系数矩阵都可能是亏损的，即不存在完备的特征向量系足以张满整个空间．因此，有必要发展一种处理具有亏损系数矩阵的结构动力问题的理论与方法，以适应日益增长的工程需要．为此，本文作者在文献[6]中已给出了判定一般矩阵亏损性质的方法，在此基础上，本文发展了一种适用于一般线性振动系统(包括亏损和非亏损系统)的模态理论——姑称之为广义模态理论．

广义模态理论

一般线性振动系统的运动方程为

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t) \tag{1}$$

其中 M、C、K 可为 n 阶复系数非对称矩阵，M 可逆．设系统具有 r 个互异特征值 $(r \leqslant 2n)$ 且不一定具有完备的特征向量系．系统的状态方程为

$$\dot{y} = Ay + p(t) \tag{2}$$

其中

$$y = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & O \end{bmatrix}, \quad p(t) = \begin{bmatrix} M^{-1}f(t) \\ O \end{bmatrix}$$

1. 广义模态的定义

线性振动系统的模态的经典意义可解释为：若系统的运动在由N个独立向量为基底所张成的空间中能够完全解耦，展开为N个一维的独立运动，则把这组基底向量称为系统

本课题得到国家自然科学基金资助．本文于 1987 年 10 月28日收到．

的模态. 显然非亏损系统具有完备的特征向量系,可使其运动在特征空间中完全解耦;而亏损系统却不具有完备的解耦特征向量系足以张满整个空间,这时,如果仅在由这些不完备的特征向量为基底所张成的空间中描述其运动,即仅用这些模态进行迭加,其结果的正确性与收敛性自然都存在疑问. 因此,经典的模态意义需要进一步拓宽. 然而,对于亏损系统,仍可以不完备的独立特征向量系为基础,寻求并补充另外一些新的独立向量,组成一个完备的独立向量系以张满整个空间,使系统的运动能在该基底下的空间中得到正确描述且在最大程度上解耦. 在此意义上,称该向量组中的向量为系统的广义模态(或广义特征向量).

利用文献[6]中的方法,确定了系统自由振动方程

$$\dot{y} = Ay \tag{3}$$

的亏损性质和独立的特征向量后,可设其解的形式为

$$Y(t) = Ue^{Jt} \tag{4}$$

其中

$$Y(t) = [Y_1 Y_2 \cdots\cdots Y_r],\quad U = [U_1 U_2 \cdots\cdots U_r]$$
$$Y_i(t) = [Y_{i1} Y_{i2} \cdots\cdots Y_{in_i}],\quad U_i = [U_{i1} U_{i2} \cdots\cdots U_{in_i}]$$
$$Y_{ij}(t) = [y_1^{ij} y_2^{ij} \cdots\cdots y_{m_{ij}}^{ij}],\quad U_{ij} = [u_1^{ij} u_2^{ij} \cdots\cdots u_{m_{ij}}^{ij}]$$
$$J = \mathrm{diag}\{J_1 J_2 \cdots\cdots J_r\},\quad J_i = \mathrm{diag}\{J_{i1} J_{i2} \cdots\cdots J_{in_i}\}$$

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_{ij}\times m_{ij}},$$

$$e^{J_{ij}t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2} & \cdots\cdots & \dfrac{t^{m_{ij}-1}}{(m_{ij}-1)!} \\ & 1 & t & \cdots\cdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_i t} \tag{5}$$

在(4)(5)中, n_i 表示对应于第 i 个特征值 λ_i 的若当块数目, m_{ij} 表示对应于第 i 个特征值 λ_i 的第 j 个若当块的阶次;若用 m_i 表示 λ_i 的重数, N 表示$\boldsymbol{A}$的阶次,则有

$$m_i = \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij}$$

$$N = \sum_{i=1}^{r} m_i = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} \tag{6}$$

将(4)式代入方程(3),得

$$AU = UJ \tag{7}$$

即

$$\begin{aligned} & Au_1^{ij} = \lambda_i u_1^{ij} \qquad i = 1,2,\cdots\cdots,r \ \ j = 1,2,\cdots\cdots,n_i \\ & Au_k^{ij} = \lambda_i u_k^{ij} + u_{k-1}^{ij} \ \ k = 2,3,\cdots\cdots,m_{i_j} \end{aligned} \tag{8}$$

由此可得到系统的广义特征向量系即广义模态．式(8)表明：1) 非亏损系统的运动可分解为N个独立的一维特征运动，而亏损系统只能分解为 $\sum_{i=1}^{r} n_i$ 个维数分别为 m_{i_j} 的广义特征运动；2)非亏损系统的每一个特征值对应于一个独立的模态且各模态之间互不耦合，故有可能实现纯模态运动，而亏损系统对应于 λ_i 则有 m_{i_j} 个耦合在一起的广义模态，它们互相牵连、不可分割，因而无法实现纯模态运动．

2. 伴随系统

对于一般的线性振动系统的伴随系统即共轭转置系统，其运动方程及状态方程分别为：

$$M^H \ddot{\underline{x}} + C^H \dot{\underline{x}} + K^H \underline{x} = \underline{f}(t) \tag{9}$$

$$\dot{\underline{y}} = A^H \underline{y} + \underline{p}(t) \tag{10}$$

其中

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} M^H \dot{\underline{x}} \\ -K^H \underline{x} \end{bmatrix}, \underline{p}(t) = \begin{bmatrix} \underline{f}(t) \\ O \end{bmatrix}$$

下横杠代表伴随系统相应的物理量，上标H表示共轭转置．容易看出，伴随系统矩阵 A^H 与原系统矩阵 A 具有互为共轭的若当标准形，因此，伴随系统自由振动方程解的形式为

$$\underline{Y}(t) = V e^{\bar{J}t} \tag{11}$$

其中 $\underline{Y}(t)$，V、$\bar{J}$ 与原系统的 $Y(t)$、U、J 具有完全类似的形式．同样可得：

$$A^H V = V\bar{J} \tag{12}$$

即

$$\begin{aligned} & A^H v_1^{ij} = \bar{\lambda}_i v_1^{ij} \qquad i = 1,2,\cdots r,\ j = 1,2,\cdots,n_i \\ & A^H v_k^{ij} = \bar{\lambda}_i v_k^{ij} + v_{k-1}^{ij} \ \ k = 2,3,\cdots m_{i_j}, \end{aligned} \tag{13}$$

其中 v_k^{ij} 是伴随系统的广义模态，上横杠表示共轭．

3. 广义模态之间的部分双正交关系

由(8)式中第 l 个方程及(13)式中第 k 个方程

$$Au_l^{jq} = \lambda_j u_l^{jq} + u_{l-1}^{jq} \tag{14}$$

$$A^H v_k^{ip} = \bar{\lambda}_i v_k^{ip} + v_{k-1}^{ip} \tag{15}$$

将(14)式左乘 v_k^{ipH}，(15) 式共轭转置后右乘 u_l^{jq}，然后二式相减，得

$$(\lambda_j - \lambda_i) v_k^{ipH} u_l^{jq} + v_k^{ipH} u_{l-1}^{jq} - v_{k-1}^{ipH} u_l^{jq} = 0 \tag{16}$$

式中 $u_0^{jq} = v_0^{ip} \equiv 0$.　根据(16)式，当 i, j, p, q, k, l 取遍其取值范围时，利用递推关系，我们可证明 v, u 之间的部分双正交关系，为简明起见用下列表格示出．

在表中，根据(16)式先证明第一行，由第一行结果，递推证明第二行，然后再递推可证明第三行．

表 1

$v_k^{ipH}\ u_l^{jq}$ (k,l \ i,j,p,q)		$i \neq j$	$i = j$ $p \neq q$	$i = j$ $p = q$
$k = 1$	$l = 1$	0	0	$a_1^{ip}(m_{ij} = 1)$ $0(m_{ij} > 1)$
$k = 1$	$l = 2,3,\cdots\cdots(m_{jq} - 1)$ $l = m_{jq}$	0	0	0 a_1^{ip}
$k = 2,3,\cdots,m_{ip}$	$l = 2,3,\cdots\cdots(m_{ip} - k)$ $l = (m_{jq} - k + 1),(m_{jq} - k + 2),\cdots,m_{jq}$	0	0	0 $a_n^{ip}(n = k + l - m_{ip})$

表中结果表明：对应于不同特征值（$i \neq j$）的广义模态是正交的(表中第一列)；对应于同一特征值（$i = j$）不同若当块（$p \neq q$）的广义模态是可正交化的(表中第二列)；而对应于同一特征值（$i = j$）同一若当块（$p = q$）的广义模态是部分正交的(表中第三列)．若用矩阵形式表示这种部分正交关系，则有

$$T = V^H U \tag{17}$$

其中：

$$V_i^H U_j = O \quad 当\ i \neq j$$

$$V_{ip}^H U_{jq} = O \quad 当\ i = j, p \neq q$$

$$T_{ip} = V_{ip}^H U_{ip} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1^{ip} \\ \vdots & & a_1^{ip} & a_2^{ip} \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ a_1^{ip} & a_2^{ip} & \cdots & a_{m_{ip}}^{ip} \end{bmatrix} \quad 当\ i = j,\ p = q$$

因此，矩阵 $\underset{\sim}{T}$ 为一个块对角矩阵，其每一块的阶次与相应的若当块阶次相同，即

$$T = \mathrm{diag}\{T_{11}\cdots\cdots T_{1n_1} T_{21}\cdots\cdots T_{2n_2}\cdots\cdots T_{r1}\cdots\cdots T_{rn_r}\} \tag{18}$$

4. 一般线性振动系统的传递函数及脉冲响应函数

为使系统的运动部分解耦，将状态空间中的运动变换到以广义模态为基底的空间中，设

$$\boldsymbol{y}(t) = U\boldsymbol{z}(t) \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{z}(t)$ 表示广义模态的坐标向量．将此代入状态方程(2)且左乘 $\boldsymbol{V}^H$ 并利用式 (7)，管理后得到

$$\dot{\boldsymbol{z}}(t) = J\boldsymbol{z}(t) + T^{-1}V^H\boldsymbol{p}(t) \tag{20}$$

式 (20) 已是部分解耦了的运动方程，它由 $\sum_{i=1}^{r} n_i$ 组独立的 m_{ij} 阶方程组所构成，当 m_{ij}

$\ll N$ 时，对其求解比直接求解(2)式要简便得多.

设系统处于零初始状态，对方程(20)进行拉普拉斯变换后，得到

$$Z(s)=\tilde{H}(s)Q(s) \tag{21}$$

其中

$$Z(s)=\int_0^\infty Z(t)e^{-st}dt \tag{22}$$

$$Q(s)=T^{-1}V^H\int_0^\infty \boldsymbol{p}(t)e^{-st}dt=T^{-1}V^HP(s) \tag{23}$$

$$\tilde{H}(s)=(sI-J)^{-1} \tag{24}$$

$\tilde{H}(s)$ 是一个块对角矩阵，其中的每一个块矩阵为

$$\tilde{H}_{ij}(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{(s-\lambda_i)} & \frac{1}{(s-\lambda_i)^2} & \cdots\cdots & \frac{1}{(s-\lambda_i)^{m_{ij}-1}} \\ & \frac{1}{(s-\lambda_i)} & \cdots\cdots & \frac{1}{(s-\lambda_i)^{m_{ij}-2}} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \frac{1}{(s-\lambda_i)} \end{bmatrix}_{m_{ij}\times m_{ij}} \quad \begin{matrix} i=1,2,\cdots r, \\ j=1,2,\cdots n_i, \end{matrix} \tag{25}$$

为得到用广义模态表示的传递函数，对(19)式进行拉氏变换，并结合式(21)—(25)，得到：

$$Y(s)=H(s)P(s) \tag{26}$$

其中

$$H(s)=U\tilde{H}(s)T^{-1}V^H \tag{27}$$

由式(17)(18)知 T 是块对角矩阵，故 T^{-1} 也是块对角矩阵，且每一个块矩阵是上三角阵

$$T_{ij}^{-1}=\begin{bmatrix} b_{m_{ij}}^{ij} & \cdots\cdots & b_2^{ij} & b_1^{ij} \\ \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ b_2^{ij} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & 0 \\ b_1^{ij} & & & \end{bmatrix} \tag{28}$$

其中

$$b_1^{ij}=1/a_1^{ij}$$

$$b_k^{ij}=\sum_{l=1}^{k-1} b_l^{ij}a_{k-l+1}^{ij}/a_1^{ij},\ k=2,3,\cdots\cdots,m_{ij} \tag{29}$$

于是 $\tilde{H}(s)T^{-1}$ 也是块对角矩阵，每一块矩阵为

$$\tilde{H}_{ij}^{(s)}T_{ij}^{-1}=\begin{bmatrix} h_{m_{ij}}^{ij} & \cdots\cdots & h_2^{ij} & h_1^{ij} \\ \vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ h_2^{ij} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & 0 \\ h_1^{ij} & & & \end{bmatrix} \tag{30}$$

其中

$$h_k^{ij}=\sum_{l=1}^{k}\frac{b_{k-l+1}^{ij}}{(s-\lambda_i)^l},\ k=1,2,\cdots\cdots m_{ij} \tag{31}$$

因此

$$\begin{aligned} H(s)&=U\tilde{H}(s)T^{-1}V^H \\ &=\sum_{i=1}^{r}U_i\tilde{H}_i(s)T_i^{-1}V_i^H \\ &=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m_{ij}}\sum_{l=1}^{\beta}h_\gamma^{ij}u_l^{ij}v_k^{ijH} \end{aligned} \tag{32}$$

$$\beta=m_{ij}-k+1,\ \gamma=\beta-l+1$$

式(32)即是由系统全部广义模态参数所表示的最一般的传递函数矩阵表达式。对(32)式进行拉氏反变换,即可得到一般线性振动系统的脉冲响应函数

$$G(t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m_{ij}}\sum_{l=1}^{\beta}g_\gamma^{ij}u_l^{ij}v_k^{ijH}\quad \beta=m_{ij}-k+1\quad \gamma=\beta-l+1 \tag{33}$$

其中

$$g_\gamma^{ij}=\sum_{m=1}^{\gamma}\frac{b_{\gamma-m+1}^{ij}}{(m-1)!}t^{m-1}e^{\lambda_i t} \tag{34}$$

5. 系统在物理坐标下的传递函数和脉冲响应函数

设Φ是由 $2n$ 个广义振型向量 φ_l^{ij} 组成的矩阵, Ψ 是由伴随系统的 $2n$ 个广义振型向量 ψ_k^{ij} 组成的矩阵. Φ、Ψ 与广义模态矩阵 U、V 的关系为

$$U=\begin{bmatrix}\Phi J\\ \Phi\end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix}M^H\Psi J\\ -K^H\Psi\end{bmatrix} \tag{35}$$

将(35)代入(7)或(12)式中,可得

$$\left.\begin{aligned} &(\lambda_i^2M+\lambda_iC+K)\varphi_1^{ij}=0 \\ &(\lambda_i^2M+\lambda_iC+K)\varphi_k^{ij}=-(2\lambda_i M+C)\varphi_{k-1}^{ij}-M\varphi_{k-2}^{ij} \\ &i=1,2,\cdots r,\ j=1,2,\cdots n_i,\ k=2,\cdots\cdots m_{ij},\ \varphi_0^{ij}\equiv O \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

而 ψ_k^{ij} 则满足类似的伴随方程.

又由位移向量与状态向量之间的关系

$$x(t)=[O\ I_n]y(t) \tag{37}$$

对(37)式做拉氏变换并结合(35)、(26)、(32),经整理后得到:

$$X(s)=H_x(s)F(s) \tag{38}$$

其中位移传递函数 $H_x(s)$ 为

$$H_x(s)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m_{ij}}\sum_{l=1}^{\beta}h_\gamma^{ij}\varphi_l^{ij}(\phi_{k-1}^{ijH}+\lambda_i\phi_k^{ijH}) \tag{39}$$

脉冲响应函数为

$$G_x(t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=1}^{m_{ij}}\sum_{l=1}^{\beta}g_\gamma^{ij}\varphi_l^{ij}(\phi_{k-1}^{ijH}+\lambda_i\phi_k^{ijH}) \tag{40}$$

以上 $\beta=m_{ij}-k+1$，$\gamma=\beta-l+1$，$\phi_0^{ij}\equiv O$ 上面两式中的 h_γ^{ij} 和 g_γ^{ij} 与式(31)(34)中的有完全相同的形式，所不同者是两式中的广义模态参数 a_n^{ij} 应由广义振型表示

$$a_n^{ij}=(\lambda_i\phi_k^{ijH}+\phi_{k-1}^{ijH})M(\lambda_i\varphi_l^{ij}+\varphi_{l-1}^{ij})-\phi_k^{ijH}K\varphi_l^{ij} \tag{41}$$

6. 两种特殊情况

(1) 有重特征值的非亏损系统。这时系统具有完备的特征向量系，对应于象一个特征值 λ_i 的所有若当块（$n_i>1$）均有 $m_{ij}\equiv1$，故系统的广义模态就是经典意义下的模态。把恒为 1 的下标略去，其双正交关系为

$$v^{ipH}u^{jq}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 0 & i=j,\quad p\neq q\\ a^{ij} & i=j\quad p=q\end{cases} \tag{42}$$

于是传递函数(39)及脉冲响应函数(40)可退化为

$$H_x(s)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\lambda_i\varphi^{ij}\phi^{ijH}}{a^{ij}(s-\lambda_i)} \tag{43}$$

$$G_x(t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\lambda_i\varphi^{ij}\phi^{ijH}}{a^{ij}}e^{\lambda_it} \tag{44}$$

(2) 仅有若干对二重特征值的亏损系统。这时系统的特征值 $\lambda_i(i=1,\cdots r_1,r_1+1,\cdots\cdots r)$具有如下亏损性质，

$$m_i=\begin{cases}2 & i\leqslant r_1\\ 1 & r_1<i\leqslant r,\end{cases}\quad n_i\equiv1,m_{ij}=\begin{cases}2 & i\leqslant r_1\\ 1 & r_1<i\leqslant r,\end{cases}$$

于是广义模态之间的部分正交关系为

$$V_i^HU_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \begin{bmatrix}0 & a_1^i\\ a_1^i & a_2^i\end{bmatrix} & i=j\leqslant r_1\\ a_1^i & r_1<i=j\leqslant r\end{cases} \tag{45}$$

传递函数与脉冲响应函数矩阵分别为

$$\begin{aligned}H_x(s)=&\sum_{i=1}^{r_1}\left\{\left[\frac{b_2^i}{s-\lambda_i}+\frac{b_1^i}{(s-\lambda_i)^2}\right]\lambda_i\varphi_1^i\phi_1^{iH}+\frac{b_1^i}{s-\lambda_i}[\varphi_1^i(\phi_1^{iH}+\lambda_i\phi_2^{iH})\right.\\&\left.+\lambda_i\varphi_2^i\phi_1^{iH}]\right\}+\sum_{i=r_1+1}^{r}\frac{b_1^i}{s-\lambda_i}\varphi_1^i\phi_1^{iH}\end{aligned} \tag{46}$$

$$G_x(t)=\sum_{i=1}^{r_1}e^{\lambda_it}\{[b_2^i+tb_1^i]\lambda_i\varphi_1^i\phi_1^{iH}+b_1^i[\varphi_1^i\phi_1^{iH}$$

$$+ \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_1^i \boldsymbol{\phi}_2^{iH} + \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_2^i \boldsymbol{\phi}_1^{iH}] \} + \sum_{i=r_1+1}^{r} e^{\lambda_i t} b_1^i \lambda_i \boldsymbol{\varphi}_1^i \boldsymbol{\phi}_1^{iH} \tag{47}$$

数　　例

考虑一具有非比例阻尼矩阵的线性结构振动系统，设

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{K} = \begin{bmatrix} 36 & \\ & 81 \end{bmatrix}$$

据此算得状态矩阵 A 的互异特征值为 $\lambda_{1,2} = -\dfrac{5}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{191}}{2}$，由文献[6]中的方法可得知 $\lambda_{1,2}$ 各对应于一个二阶若当块，该系统是亏损的。系统只具有一对共轭的特征向量 $\boldsymbol{u}_1^1$、$\boldsymbol{u}_1^2$，利用(8)式进一步求得广义特征向量 $\boldsymbol{u}_2^1$, $\boldsymbol{u}_2^2$，将它们组合起来，构成一完备的广义特征向量系：

$$\mathrm{U} = [\boldsymbol{u}_1^1 \ \ \boldsymbol{u}_2^1 \ \ \boldsymbol{u}_1^2 \ \ \boldsymbol{u}_2^2]$$

其中

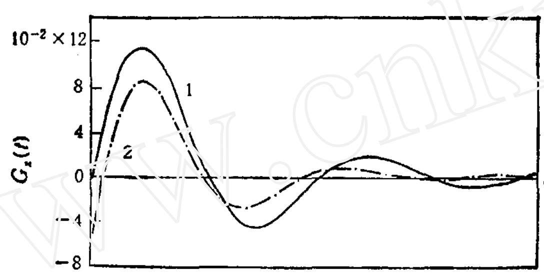

图 1　二自由度亏损系统的脉冲响应

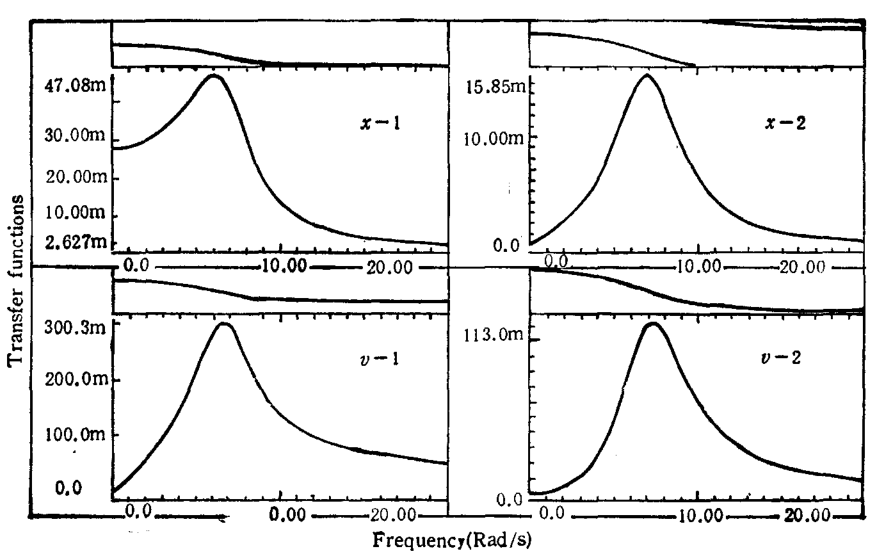

图 2　二自由度亏损系统的相频曲线和幅频曲线

$$\boldsymbol{u}_1^1=\begin{Bmatrix}-2.5+j6.9101\\5.4801+j2.4431\\1.0\\0.0589-j0.8144\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2^1=\begin{Bmatrix}-1.5+j6.9101\\5.8336-j2.4431\\1.0\\-0.4758-j0.6636\end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{u}_1^2=\bar{\boldsymbol{u}}_1^1,\ \boldsymbol{u}_2^2=\bar{\boldsymbol{u}}_2^1$$

以此为基底张满整个空间，可使得系统的运动得以正确的描述，其脉冲响应如图 1 中曲线 1 所示。若将系统的运动仅由不完备的特征向量系 $\boldsymbol{u}_1^1$、$\boldsymbol{u}_1^2$ 来描述，则其脉冲响应(如图 1 中曲线 2 所示)与正确结果有较大差别且连初始条件都满足不了。图 2、图 3 给出了该亏损系统的传递函数特性曲线。图 2 中 x-1，x-2 是位移传递函数的相频、幅频曲线，v-1、v-2 是速度传递函数的相频、幅频曲线，图 3 表示位移和速度传递函数的 Nyqist 图。

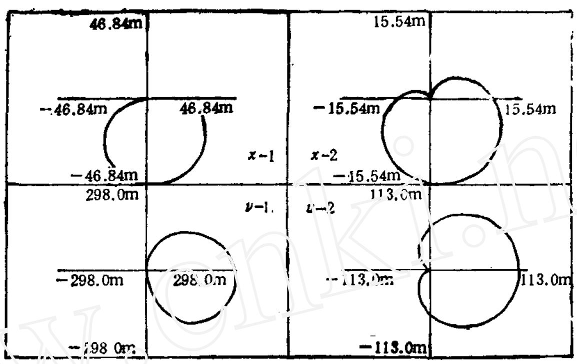

图 3　二自由度亏损系统的 Nygist 图

参　考　文　献

[1] L. Meirovitch, Elements of Vibration Analysis, McGraw-Hill, New York(1975).
[2] 胡海昌，多自由度线性阻尼系统的振动问题，固体力学学报，1(1980)，30—37.
[3] 张阿舟，朱德懋，阻尼系统的振动分析，航空学报，3，(1984)，321—332.
[4] J. H. Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarender Press, Oxford(1965).
[5] K. 侯赛因著，张文译，赵令诚校，多参数系统的振动与稳定性，上海科技出版社(1984).
[6] Zhu Dechao, Shi Guoqin, The Defectiveness of Linear Structural Dynamic Systems, Proc. of the International Conference on Computational Engineering Mechanics, Beijing, June (1987), 21—25.

THE GENERALIZED MODE THEORY OF LINEAR STRUCTURAL VIBRATION DEFECTIVE SYSTEMS

Shi Guoqin, Zhu Dechao

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract In this paper, according to the characteristics of linear vibrating defective systems, a complete set of linearly independent generalized eigenvectors is found for the defective system. Such eigenvectors many be called as generalized modes. The partially bi-orthogonality relation between the generalized modes of the original and the adjoint systems is also found and demonstrated. By use of the bi-orthogonality relation, the most general expressions of the transfer function and the pulse response function of linear vibrating system are derived.

A sample example is given to show the correctness and effectiveness of the suggested theory and method.

Key words structural dynamics, linear vibrating defective systems, generalized modes.