第21卷 第1期
1989年1月

力学学报
ACTA MECHANICA SINICA

Vol. 21, No. 1
Jan., 1989

论拉氏乘子法的几点灵活性

梁立孚　章梓茂
(哈尔滨船舶工程学院)

提要　本文论述了拉氏乘子法的几点灵活性：(1) 拉氏乘子表达式的不唯一性. (2) 在泛函的变分式中引入拉氏乘子. (3) 应用拉氏乘子法推导有先决条件的广义变分原理. (4) 应用拉氏乘子法时出现的特殊情况.

关键词　拉氏乘子法，变分原理，广义变分原理.

拉氏乘子法在力学中得到广泛的应用[1-3]，本文从几个不同的角度论述拉氏乘子法的几点灵活性.

1. 拉氏乘子表达式的不唯一性

应用变量代换原则，可将最小势能原理的泛函变换为

$$\Pi_1' = \iiint_V \left(\frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ij} e_{kl} + \sigma_{ij,j} u_i\right) dV - \iint_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_j u_i dS \tag{1}$$

其先决条件变换为

$$\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i = 0, \quad \text{在} V \text{中}, \tag{a}$$

$$\sigma_{ij} n_j - \bar{P}_i = 0, \quad \text{在} S_\sigma \text{上}; \tag{b}$$

$$e_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i} = 0, \quad \text{在} V \text{中}, \tag{c}$$

$$u_i - \bar{u}_i = 0, \quad \text{在} S_u \text{上}. \tag{d}$$

引入拉氏乘子 ρ_i, β_i, $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$, μ_i，将先决条件 (a)、(b)、(c)、(d) 计入泛函中，则有

$$\Pi_x = \iiint_V \left[\frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ij} e_{kl} + \sigma_{ij,j} u_i + \rho_i(\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i) + \lambda_{ij}\left(e_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i}\right)\right] dV$$
$$- \iint_{S_\sigma} \sigma_{ij} n_j u_i dS_\sigma + \iint_{S_\sigma} \beta_i(\sigma_{ij} n_j - \bar{P}_i) dS + \iint_{S_u} \mu_i(u_i - \bar{u}_i) dS. \tag{2}$$

由 $\delta\Pi_x = 0$，求得 Π_x 的驻值条件为

$$a_{ijkl} e_{kl} + \lambda_{ij} = 0, \quad \text{在} V \text{中}, \tag{3.1}$$

$$\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i = 0, \quad \text{在} V \text{中}, \tag{3.2}$$

$$u_i + \rho_i = 0, \quad \text{在} V \text{中}, \tag{3.3}$$

$$\sigma_{ij,j} + \lambda_{ij,j} = 0, \quad \text{在} V \text{中}, \tag{3.4}$$

本文于1986年7月18日收到，1988年4月20日收到修改稿.

$$e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0,\quad \text{在} V \text{中};\tag{3.5}$$

$$\sigma_{ij}n_j-\bar{P}_i=0,\quad \text{在} S_\sigma \text{上},\tag{3.6}$$

$$u_i-\beta_i=0,\quad \text{在} S_\sigma \text{上},\tag{3.7}$$

$$\sigma_{ij}n_j+\lambda_{ij}n_j=0,\quad \text{在} S_\sigma \text{上},\tag{3.8}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0,\quad \text{在} S_u \text{上},\tag{3.9}$$

$$\mu_i-\lambda_{ij}n_j=0,\quad \text{在} S_u \text{上}.\tag{3.10}$$

由 (3.4) 和 (3.8) 可得

$$\lambda_{ij}=-\sigma_{ij},\tag{4.1}$$

由 (3.3) 可得

$$\rho_i=-u_i,\tag{4.2}$$

由 (3.7) 可得

$$\beta_i=u_i,\tag{4.3}$$

由 (3.10) 可得

$$\mu_i=-\sigma_{ij}n_j.\tag{4.4}$$

将 (4) 代入 (2)，则泛函 Π_x 变换为泛函

$$\Pi_3=\iiint_V\left[\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-\bar{F}_iu_i-\sigma_{ij}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right]dV$$
$$-\iint_{S_\sigma}\bar{P}_iu_idS-\iint_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\sigma_{ij}n_jdS.\tag{5}$$

即泛函 Π_x 为胡海昌-鹫津原理的泛函 Π_3[4,5]。

如果我们由 (3.1) 求得

$$\lambda_{ij}=-a_{ijkl}e_{kl},\tag{6.1}$$

由 (3.3) 求得

$$\rho_i=-u_i,\tag{6.2}$$

由 (3.7) 求得

$$\beta_i=u_i,\tag{6.3}$$

再由 (3.10) 求得

$$\mu_i=-a_{ijkl}e_{kl}n_j.\tag{6.4}$$

将 (6) 代入 (2)，则泛函 Π_x 变换为泛函[2]

$$\Pi_P^*=\iiint_V\left[\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-\bar{F}_iu_i-a_{ijkl}e_{kl}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right]dV$$
$$-\iint_{S_\sigma}\bar{P}_iu_idS-\iint_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)a_{ijkl}e_{kl}n_jdS.\tag{7}$$

以上情况表明，由于拉氏乘子表达式的不唯一性，引入一组拉氏乘子，得到两种不同的广义变分原理。

2. 应用拉氏乘子法推导有先决条件的变分原理的驻值条件

最小余能原理的泛函为

$$\Gamma_1 = \iiint_V \frac{1}{2} b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} dV - \iint_{S_u} \bar{u}_i \sigma_{ij} n_j dS. \tag{8}$$

其先决条件为 (a)、(b) 式。

将 Γ_1 变分，并令 $\delta\Gamma_1 = 0$，则有

$$\delta\Gamma_1 = \iiint_V b_{ijkl}\sigma_{kl}\delta\sigma_{ij} dV - \iint_{S_u} \bar{u}_i \delta\sigma_{ij} n_j dS = 0. \tag{9}$$

其先决条件变换为

$$\delta\sigma_{ij,j} = 0 \tag{a'}$$

$$\delta\sigma_{ij} n_j = 0 \tag{b'}$$

引入拉氏乘子 μ_i 和 λ_i，将 (a') 和 (b') 计入 $\delta\Gamma_1$ 的表达式中，经变换可得

$$\delta\Gamma_1 = \iiint_V (b_{ijkl}\sigma_{kl} - \mu_{i,j})\delta\sigma_{ij} dV + \iint_{S_\sigma} (\mu_i + \lambda_i)\delta\sigma_{ij} n_j dS + \iint_{S_u} (\mu_i - \bar{u}_i)\delta\sigma_{ij} n_j dS = 0 \tag{10}$$

由于引入拉氏乘子使虚变分 $\delta\sigma_{ij}$ 彼此独立无关[6]，这就要求 (10) 式中所有系数均为零。故有

$$b_{ijkl}\sigma_{kl} - \mu_{i,j} = 0, \quad 在 V 中. \tag{11.1}$$

$$\mu_i + \lambda_i = 0, \quad 在 S_\sigma 上. \tag{11.2}$$

$$\mu_i - \bar{u}_i = 0, \quad 在 S_u 上. \tag{11.3}$$

由 (11.3) 可知，在 S_u 上有 $\mu_i = \bar{u}_i$，从而可知在 V 域中有 $\mu_i = u_i$，在 S_σ 上有 $\lambda_i = -u_i$。

将拉氏乘子表达式代入 (10) 式，可得

$$\delta\Gamma_1 = \iiint_V \left(b_{ijkl}\sigma_{kl} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i}\right)\delta\sigma_{ij} dV + \iint_{S_u} (u_i - \bar{u}_i)\delta\sigma_{ij} n_j dS = 0 \tag{12}$$

故得最小余能原理的驻值条件

$$b_{ijkl}\sigma_{kl} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i} = 0, \quad 在 V 中. \tag{13.1}$$

$$u_i - \bar{u}_i = 0, \quad 在 S_u 上. \tag{13.2}$$

在文献 [4] 中，作为胡海昌-鹫津原理的特例，得到泛函

$$\Gamma_{2e} = \iiint_V \left(\sigma_{ij} e_{ij} - \frac{1}{2} a_{ijkl} e_{ij} e_{kl}\right) dV - \iint_{S_u} \bar{u}_i \sigma_{ij} n_j dS \tag{14}$$

其先决条件为 (a)、(b) 式。

这个变分原理的驻值条件，直接推导起来很难，借助如上的拉氏乘子法的程式，则可比较容易地推出这个变分原理的驻值条件为

$$\sigma_{ij} - a_{ijkl} e_{kl} = 0, \quad 在 V 中. \tag{15.1}$$

$$e_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i} = 0, \quad 在 V 中. \tag{15.2}$$

$$u_i - \bar{u}_i = 0, \quad \text{在 } S_u \text{ 上。} \tag{15.3}$$

可见，这个变分原理反映的规律[7](自然条件[8])为本构方程和连续条件，它是一个有先决条件的广义变分原理。

3. 应用拉氏乘子法推导有先决条件的广义变分原理

在 1 中，我们在泛函的全量式中引入拉氏乘子来推导无先决条件的广义变分原理，在 2 中，我们在泛函的变分式中引入拉氏乘子来推导有先决条件的变分原理的驻值条件，这里我们联合应用两种程式来推导有先决条件的广义变分原理。

应用变量代换原则，将本构方程从 (8) 式中分离出来，则有

$$\Gamma_{10} = \iiint_V \frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}dV - \iint_{S_u} \bar{u}_i\sigma_{ij}n_j dS \tag{16}$$

其先决条件除 (a)、(b) 外，还有

$$e_{ij} - b_{ijkl}\sigma_{kl} = 0, \quad \text{在 } V \text{ 中} \tag{f}$$

考虑到 (f) 式与

$$\sigma_{ij} - a_{ijkl}e_{kl} = 0, \quad \text{在 } V \text{ 中} \tag{e}$$

的等价性，将 Γ_{10} 的先决条件变换为 (a)、(b)、(e) 式。

引入拉氏乘子 β_{ij}，将 (e) 计入泛函中，则有

$$\Gamma_y = \iiint_V \left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij} + \beta_{ij}(\sigma_{ij} - a_{ijkl}e_{kl})\right]dV - \iint_{S_u} \bar{u}_i\sigma_{ij}n_j dS \tag{17}$$

其先决条件为 (a)、(b) 式。

将 Γ_y 变分，并令 $\delta\Gamma_y = 0$，其先决条件变换为 (a′) 和 (b′) 式。引入拉氏乘子 μ_i 和 λ_i，将 (a′) 和 (b′) 计入 $\delta\Gamma_y$ 的表达式中，经整理可得

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_y = &\iiint_V \left[\left(\frac{1}{2}e_{ij} + \beta_{ij} - \mu_{i,j}\right)\delta\sigma_{ij} + \left(\frac{1}{2}\sigma_{ij} - a_{ijkl}\beta_{kl}\right)\delta e_{ij}\right.\\ &\left. + (\sigma_{ij} - a_{ijkl}e_{kl})\delta\beta_{ij}\right]dV\\ &+ \iint_{S_\sigma}(\lambda_i + \mu_i)\delta\sigma_{ij}n_j dS + \iint_{S_u}(\mu_i - \bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}n_j dS = 0\end{aligned} \tag{18}$$

由 (18) 式求出 Γ_y 的驻值条件，再由驻值条件解得 $\beta_{ij} = \frac{1}{2}e_{ij}$，将 β_{ij} 表达式代入(17)，则 Γ_y 变换为

$$\Gamma_{2c} = \iiint_V \left(\sigma_{ij}e_{ij} - \frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}\right)dV - \iint_{S_u} \bar{u}_i\sigma_{ij}n_j dS \tag{14}$$

其先决条件为 (a)、(b) 式。

4. 应用拉氏乘子法时出现的特殊情况

引入拉氏乘子 μ_i，λ_i 和 $\beta_{ij} = \beta_{ji}$，将 (a)、(b) 和 (f) 式计入泛函 Γ_{10} 中，则有

$$\begin{aligned}\Gamma_z = &\iiint_V \left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij} + \beta_{ij}\left(e_{ij} - \frac{1}{2}u_{ij} - \frac{1}{2}u_{j,i}\right) + \mu_i(\sigma_{ij,j} + \bar{F}_i)\right]dV\\ &- \iint_{S_u} \bar{u}_i\sigma_{ij}n_j dS + \iint_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j - \bar{P}_i)\lambda_i dS\end{aligned} \tag{19}$$

将 Γ_z 变分，并令 $\delta\Gamma_z=0$，可得其驻值条件；再由驻值条件解得拉氏乘子的表达式

$$\beta_{ij}=-\frac{1}{2}\sigma_{ij},\quad \mu_i=u_i,\quad \lambda_i=-u_i \tag{20}$$

将 (20) 代入 (19)，整理可得

$$\Gamma_z=\iiint_V\left[\underline{\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}}-\underline{\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)u_i\right]dV-\iint_{S_u}\bar{u}_i\sigma_{ij}n_jdS-\iint_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\bar{P}_i)u_idS \tag{21}$$

上式画横线的两项相消，使泛函中减少了一类变量，从而使泛函 Γ_z 变换为

$$\Gamma_2=\iiint_V\left[\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)u_i\right]dV-\iint_{S_u}\bar{u}_i\sigma_{ij}n_jdS-\iint_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\bar{P}_i)u_idS \tag{22}$$

由此可见，Γ_2 是 Reissner 变分原理的泛函。

应用变量代换原则，最小势能原理的泛函变换为

$$\Pi_{10}=\iiint_V\left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}-\bar{F}_iu_i\right)dV-\iint_{S_\sigma}\bar{P}_iu_idS \tag{23}$$

其先决条件为 (c)、(d)、(e) 式。

引入拉氏乘子 β_{ij}，将 (e) 式计入泛函中，则

$$\Pi_z=\iiint_V\left[\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}-\bar{F}_iu_i+\beta_{ij}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}e_{kl})\right]dV-\iint_{S_\sigma}\bar{P}_iu_idS \tag{24}$$

其先决条件为 (c)、(d) 式。

应用 2 中的方法，解得 $\beta_{ij}=-\frac{1}{2}e_{ij}$。将 β_{ij} 表达式代入 (24)，可得

$$\Pi_z=\iiint_V\left(\underline{\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}}-\underline{\frac{1}{2}\sigma_{ij}e_{ij}}+\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-\bar{F}_iu_i\right)dV-\iint_{S_\sigma}\bar{P}_iu_idS. \tag{25}$$

(25) 式中画横线的两项相消，使泛函中减少了一类变量，从而使泛函 Π_z 变换为最小势能原理的泛函

$$\Pi_1=\iiint_V\left(\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-\bar{F}_iu_i\right)dV-\iint_{S_\sigma}\bar{P}_iu_idS \tag{26}$$

其先决条件为 (c)、(d) 式。

参　考　文　献

[1] 钱伟长，弹性力学中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，«力学与实践»，1(1979)，16；2(1979)，18.

[2] 钱伟长，拉氏乘子法、高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理，«应用数学和力学»，4，2(1983).

[3] 胡海昌，关于拉氏乘子法及其它，«力学学报»，5(1985).
[4] 胡海昌，论弹性体力学与受范性体力学中的一般变分原理，«物理学报»，10(1954).
[5] Washizu, K. On the variational principles of elasticity and Plasticity, Aeroelastic and Structurse Research Laboratory, Massachusetts Institute of Technologe, Technical Report 25-18, March, 1955.
[6] Washizu, K, Variational Method in Elasticity and Plasticity (第一版 1968，第二版1975，第三版1981，第二版有中译本).
[7] 胡海昌，弹性力学的变分原理及其应用，科学出版社(1981).
[8] 钱伟长，变分法及有限元，科学出版社，(1980).
[9] Ressner. E. On a Variational theorem in elasticity. *Journal of Mathematics and Physics*, 29, 2(1950), p. 90.

ON SOME FLEXIBILITY OF THE METHOD OF UNDETERMINED LAGRANGE MULTIPLIER

Liang Lifu Zhang Zimao

(Harbin Shipbuilding Engineering Institute)

Abstract Some flexibility of the method of undetermined Largrange multiplier is studied in this paper. (1) The non-uniqueness of the expression of undetermined Lagrange multiplier. (2) The introduction of undetermined Lagrange multiplier in variational expression of original functional. (3) The derivation of generalized variational principles with preconditions by the use of the Lagrange multiplier method. (4) An exceptional cose arising from using the method of undetermined Lagrange multiplier.

Key words Lagrange multiplier method, variational principle generalized variational principle